Representaties van Eindige Groepen

lieven le bruyn

Overzicht

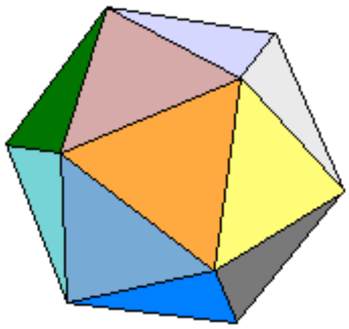
Laatste wijziging: 11 december 2007

Inhoudsopgave

1. DE ICOSAHEDER GROEP

We zullen aantonen dat de *rotatie symmetrie groep* van de **Icosaheder** isomorf is met de kleinste niet-Abelse simpele groep A_5. Verder zullen we een 3-dimensionale **representatie** van deze groep bepalen.

De **icosaheder** is een regelmatig veelvlak bestaande uit



$V = 12$ hoekpunten, $E = 30$ zijden en $F = 20$ zijvlakken. Merk op dat

$$V - E + F = 12 - 30 + 202 = 2$$

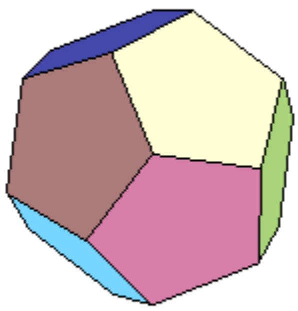
en dit is een speciaal geval van de **stelling van Euler**.

OPGAVE 1. **(stelling van Euler) :** Voor ieder convex veelvlak met V hoekpunten, E zijden en F zijvlakken geldt dat

$$V - E + F = 2$$

Toon dit aan!

OPGAVE 2. Toon aan dat de rotatie-symmetrie groep van de icosaheder isomorf is met de rotatie-suymmetrie groep van de dodecaheder.

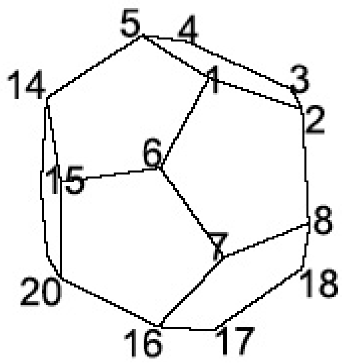


Icosaheder en dodecaheder zijn *duale* convexe veelvlakken dwz. als je de middelpunten van zijvlakken verbind asa de zijvlakken aan elkaar grenzen verkrijg je de andere figuur. Gebruik deze eigenschap.

OPGAVE 3. Toon aan dat de rotatie-symmetrie groep van het dodecahedron (en dus ook van het icosahedron) juist 60 elementen bevat.

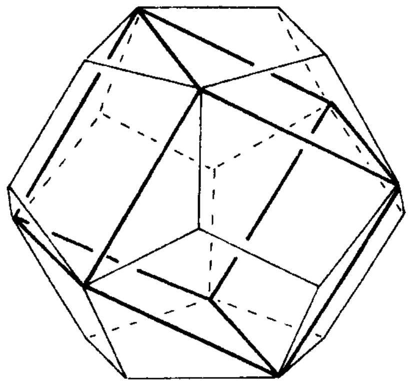
We zullen op 3 verschillende manieren de struktuur van de icosaheder groep bepalen (in stijgende orde van elegantie).

OPGAVE 4. Nummer de 20 hoekpunten van de dodecaheder als volgt :



De hoekpunten van het top-zijvlak worden genummerd 1 t.e.m. 5 in tegenwijzerzin, deze van het beneden-zijvlak 16 t.e.m. 20. De middelste hoekpunten worden 6 t.e.m. 15 genummerd in tegenwijzerzin. Gebruik GAP om na te gaan dat de icosaheder groep inderdaad A_5 is.

OPGAVE 5. De dodecaheder bevat 5 ingeschreven kubussen

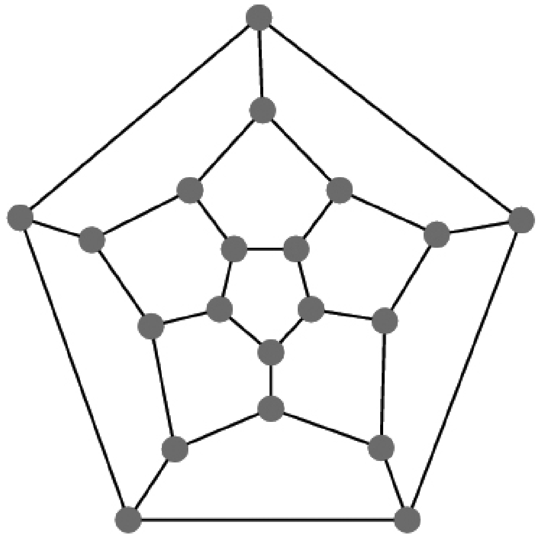


waarvan alle hoekpunten ook hoekpunten van het dodecahedron zijn en waarvan iedere zijde een *diagonaal* is van een van de regelmatige 5-hoeken van de dodecaheder.

Er zijn 12 zijden in een kubus en er zijn net zoveel zijvlakken het dodecahedron. Merk op dat ieder zijvlak juist 1 kubus-zijde als diagonaal toelaat.

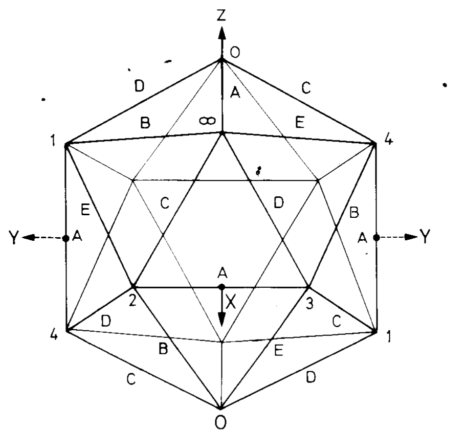
Bijgevolg zal elke rotatie-symmetrie van het dodecahedron een permutatie bepalen van deze 5 kubussen en dus krijgen we een groep-morfisme naar S_5. Toon aan dat het beeld juist A_5 is.

OPGAVE 6. De vlakke graf van het dodecahedron is



De 30 zijden van het dodecahedron kunnen opgesplits worden in vijf 6-tuples van twee aan twee tegenoverliggende zijden waarvan de vlakken loodrecht op elkaar staan. Duid deze 5 deelverzamelingen aan op bovenstaande graf en ga de actie erop na van enkele rotaties (bvb. a en b) en ga na dat deze deelgroep van S_5 inderdaad A_5 is.

Alle rotatie symmetrieën van het icosahedron zijn één van de volgende



- De identiteits-rotatie die elk punt ter plaatse laat.
- Rotaties over 180^o om de *dyadische assen* (die twee tegenoverliggende zijden in twee verdelen, zoals bvb. elk van de drie coordinaatassen in bovenstaande tekening). Er zijn 15 zulke assen, één voor ieder paar van tegenoverliggende zijden.
- Rotaties over 120^o om de *triad assen* die de middelpunten van tegenoverliggende zijvlakken verbinden. Er zijn 20 zulke rotaties, twee voor ieder paar van tegenoverliggende zijvlakken.
- Rotaties over 72^o om de *pentad assen* die door twee tegenoverliggende hoekpunten gaan. Er zijn 6 zulke assen, genoteerd $\infty\infty, 00, 11, 22, 33$ en 44 in de tekening, dus zijn er 12 zulke rotaties (twee voor elke as).
- Rotaties over 144^o om de *pentad assen*. Wederom zijn er juist 12 zulke rotaties.

Elk van deze rotaties kunnen we voorstellen als een 3×3 rotatie-matrix. Bvb. de rotatie over 180^o rond de X-as correspondeert met de matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

en de rotatie over 120^o die de drie assen permuteert correspondeert met de matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Als we dit voor alle rotaties van de rotatie-symmetrie groep A_5 van het icosahedron doen, krijgen we een *groep-morfisme*

$$A_5 \xrightarrow{\phi} GL_3(\mathbb{C})$$

Zulk morfisme noemen we een 3-dimensionale representatie van de groep A_5. Maw. het morfisme ϕ geeft de voorstelling van de abstracte groep A_5 als rotaties (die het icosahedron invariant laten) van de 3-dimensionale ruimte $\mathbb{C}^3$.

Het doel van representatie theorie van eindige groepen is te bepalen welke voorstellingen we kunnen vinden van een abstracte groep G als lineaire automorfismen van een affiene ruimte $\mathbb{C}^n$. In zulke gevallen kunnen we zeggen dat G een eindige groep van symmetrieën is van $\mathbb{C}^n$.

2. REPRESENTATIES VAN EINDIGE GROEPEN

Definitie 1 Een n**-dimensionale representatie** van een groep G is een groep-morfisme

$$G \xrightarrow{\phi_V} GL_n(\mathbb{C})$$

Zulk groepmorfisme definieert een *actie* van de groep G op de n-dimensionale ruimte $V = \mathbb{C}^n$ d.m.v.

$$g.v = \psi(g)v$$

voor elke kolom-vector $v \in \mathbb{C}^n$.

Het hoofddoel van de representatie theorie van eindige groepen is de klassificatie van alle zulke acties op isomorfisme na.

Definitie 2 Een G**-lineaire afbeelding** tussen twee G-representaties V en W is een lineaire afbeelding $V \xrightarrow{\psi} W$ zodat voor elke $g \in G$ het diagram

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "g."'] & W \arrow[d, "g."'] \\ V \arrow[r, "\psi"] & W \end{tikzcd}$$

Bijgevolg noemen we twee G-representaties **isomorf** als ze dezelfde dimensie hebben en hun acties geconjugeerd zijn, d.w.z. er bestaat een basisveranderings matrix $B \in GL_n(\mathbb{C})$ zodat

$$\forall g \in G \qquad : \qquad \phi_W(g) = B^{-1}\phi_V(g)B$$

De vectorruimte van alle G-lineaire afbeeldingen van V naar W noteren we met $Hom_G(V, W)$.

Indien $\psi \in Hom_G(V, W)$ injectief is noemen we V een **deelrepresentatie** van W. Een representatie zonder echte deelrepresentaties noemen we **simpel** of **irreduciebel**.

OPGAVE 7. Toon aan dat volgende operaties nieuwe representaties maken uit reeds gekende.

- De *directe som van representaties* : als V en W G-representaties zijn, dan ook $V \oplus W$ met actie
$$g.(v, w) = (\phi_V(g)v, \phi_W(g)w)$$
- Het *tensor product van representaties* : als V en W G-representaties zijn, dan ook $V \otimes W$ met de *diagonale actie*
$$g.(v \otimes w) = \phi_V(g)v \otimes \phi_W(g)w$$

- De *duale representatie* : als V een G-representatie is, dan ook de duale ruimte $V^* = Hom_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ met als actie
$$g.v^* = \phi_V(g^{-1})^\tau v^*$$
die zodanig is dat de natuurlijke evaluatie afbeelding
$$\langle -,- \rangle \ : \ V^* \times V \longrightarrow V \qquad \langle v^*, v \rangle = v^*(v)$$
G-invariant is, dwz.
$$\langle g.v^*, g.v \rangle = \langle v^*, v \rangle$$

OPGAVE 8. Als V een G-representatie is, toon aan dat de *symmetrische tensors* $Sym^n(V)$ en de *alternerende tensors* $\wedge^n V$ deelrepresentaties zijn van $V^{\otimes n}$ dat door de tensor-actie een G-representatie is.

OPGAVE 9. Als V en W G-representaties zijn, dan ook
$$Hom_{\mathbb{C}}(V, W) = V^* \otimes W$$
Toon aan dat de G-invariante elementen onder deze actie juist de G-morfismen zijn, dwz.
$$Hom_G(V, W) = (V^* \otimes W)^G$$

OPGAVE 10. We noemen een G-represetatie **zelf-duaal** indien $V \simeq V^*$. Toon aan dat de 3-dimensionale representatie van A_5 gegeven door de rotaties zelfduaal is.

Hint : Gebruik dat voor een rotatie-matrix geldt dat $R.R^\tau = I_n$.

OPGAVE 11. Een G-representatie V noemen we een **permutatie-representatie** indien V een basis heeft $\{v_1, \ldots, v_n\}$ zodat de actie van G deze basiselementen permuteert (d.w.z. voor alle $g \in G$ geldt dat $g.v_i = v_j$ voor zekere j.

Toon aan dat de **reguliere representatie** dwz. $V = R_G = \mathbb{C}G = \sum_{g \in G} \mathbb{C}e_g$ met daarop de actie door linksvermenigvuldiging van G (dwz. $g.e_h = e_{gh}$) een permutatie representatie is, ihb. dat dit een representatie is.

Een belangrijke reductiestap om alle representaties van een eindige groep G te klassificeren is dat we ons kunnen beperken tot de studie van simpele representaties.

Lemma 1 *(G een eindige groep) Als W een G-deelrepresentatie is van een G-representatie V, dan bestaat er een G-deelrepresentatie W' zodat*
$$V \simeq W \oplus W'$$
als G-representaties.

Bewijs. We kunnen steeds een vector-ruimte complement van W nemen (een basis van W uitbreiden tot een basis van V) en krijgen dus een directe som van $\mathbb{C}$-vectorruimten
$$V \simeq W \oplus U$$
Laat $\pi_1 : V \twoheadrightarrow W$ de projectie op de eerste component zijn en definieer nu een lineaire afbeelding door uit te middelen over de eindige groep G
$$V \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} W \qquad \pi(v) = \sum_{g \in G} g.(\pi_1(g^{-1}.v))$$
Om te beginnen is dit een G-lineaie afbeelding want voor alle $h \in G$ geldt
$$\pi(h.v) = \sum_{g \in G} g.(\pi_1(g^{-1}.h.v)) = \sum_{g' = h^{-1}g \in G} h.g'.(\pi_1((g')^{-1}.v)) = h.\pi(v)$$

Deze afbeelding is ook surjectief want op elementen van W is π gewoon vermenigvuldiging met de orde $\#G$ van G.

Bijgevolg is de *kern* $Ker(\pi) = \{v \in V \mid \pi(v) = 0\}$ een G-deelrepresentatie van V en hebben we dat $V = W \oplus Ker(\pi)$. $\square$

Issai Schur werd geboren op 10 Januari 1875 in Mogilyov (Russisch Rijk) en stierf op 10 Januari 1941 op exact 66 jarige leeftijd in Tel Aviv (Israel).

Lemma 2 (lemma van Schur) *Als* $V \xrightarrow{\phi} W$ *een* G*-lineaire afbeelding is tussen simpele* G*-representaties, dan is ofwel* $\phi = 0$ *ofwel is* ϕ *een isomorfisme gegeven door scalaire vermenigvuldiging met een* $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$.

Bewijs. Omdat de kern $Ker(\phi)$ een G-deelverzameling is van de simpele G-representatie V is ofwel $Ker(\phi) = 0$ (en dus ϕ injectief) ofwel $Ker(\phi) = V$ (dat is, ϕ is de nulafbeelding). In het eerste geval is het beeld $Im(\phi)$ een G-deelrepresentatie van de simpele G-representatie W en dus is $Im(\phi) = W$ (dus is ϕ ook surjectief en bijgevolg een isomorfisme).

Als ϕ een isomorfisme is mogen we $V = W$ veronderstellen en laat dan λ een eigenwaarde zijn van de matrix die ϕ op V representeert. λid_V is een G-lineaire afbeelding en bijgevolg is ook $\phi - \lambda id_V$ een G-lineaire afbeelding $V \longrightarrow V$. Omdat V simpel is en de kern van deze afbeelding niet nul is moet uit het voorgaande $\phi - \lambda id_V = 0$ en zijn we klaar. $\square$

Stelling 1 (stelling van Maschke) *Als* G *een eindige groep is dan kan iedere* G*-representatie* V *ontbonden worden in simpele representaties*

$$V \simeq S_1^{\oplus e_1} \oplus \ldots \oplus S_k^{\oplus e_k}$$

met alle S_i *niet-isomorfe simpele* G*-representaties. In deze decompositie zijn zowel de simpele factoren* S_i *als hun multipliciteiten* s_i *uniek bepaald.*

Bewijs. Het bestaan van een decompositie in simpele G-representaties volgt uit induktie op de dimensie van V en lemma 1. Immers, ofwel is V simpel ofwel bevat V een deelrepresentatie W. Maar dan is $V \simeq W \oplus W'$ en omdat de dimensie van beide factoren strikt kleiner is mogen we onderstellen dat ze een ontbinding in simpele G-representaties hebben.

Veronderstel dat V twee decomposities toelaat

$$S_1^{\oplus e_1} \oplus \ldots \oplus S_k^{\oplus e_k} \simeq V \simeq T_1^{\oplus f_1} \oplus \ldots \oplus T_l^{\oplus f_l}$$

dan volgt uit het lemma van Schur dat de factor $V_i^{\oplus e_i}$ onder dit isomorfisme gestuurd wordt in de factor $T_j^{\oplus f_j}$ waarvoor $S_i \simeq T_j$ en dus is $e_i \leq f_j$. Maar de inverse is ook een isomorfisme en dan volgt analoog dat $f_j \leq e_i$, klaar! □

Heinrich Mashke werd geboren op 24 october 1853 in Breslau (Duitsland) en stierf op 1 maart 1908 op 55 jarige leeftijd in Chicago (USA). In 1899 bewees hij wat we nu kennen als Mashke's stelling.

OPGAVE 12. Als G een Abelse groep is, toon aan dat alle simpele representaties dimensie 1 hebben. Bereken alle 1-dimensionale representaties van de cyclische groep C_n van orde n op isomorfisme na.

OPGAVE 13. Geef een voorbeeld van een oneindige groep die niet voldoet aan de stelling van Mashke.

OPGAVE 14. Klassificeer de representaties van S_3 de groep van alle permutaties van 3 elementen. Ihb.

- Toon aan dat de triviale representatie T en de *teken representatie* S

$$S_3 \longrightarrow \mathbb{C}^* \qquad \sigma \mapsto sgn(\sigma)$$

  de enige 1-dimensionale S_3-representaties zijn op isomorfisme na.

- Toon aan dat de 3-dimensionale permutatie representatie van S_3 niet simpel is en splits als

$$V \oplus T$$

  met $V = \{(z_1, z_2, z_3)^\tau \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 + z_2 + z_3 = 0\}$. Toon aan dat V simpel is.

- (Moeilijk!) Toon aan dat dit de enige simpele S_3-representaties zijn op isomorfie na. Hint : gebruik eerst je kennis van representaties van de deelgroep $A_3 \simeq C_3$ de cyclische groep van orde 3.

In het volgende deel zullen we een algemene methode ontwikkelen om de simpele representaties van eindige groepen te classificeren.

3. KARAKTERS VAN EINDIGE GROEPEN

We zoeken een stel *invarianten* om te beslissen of twee G-representaties V en W al dan niet isomorf zijn.

Definitie 3 Voor een G-representatie V is het **karakter** χ_V een complex waardige functie gedefinieerd door

$$G \xrightarrow{\chi_V} \mathbb{C} \qquad g \mapsto \chi_V(g) = Tr(g|V)$$

waar de rechterkant het *spoor* is van de matrix die de actie van g op V vastlegt.

OPGAVE 15. Toon aan dat het karakter een *klas-functie* is, dwz. χ_V is constant op conjugatie klassen in V of nog

$$\chi_V(g) = \chi_V(h^{-1}gh)$$

voor alle $g, h \in G$. Toon verder aan dat als $V \simeq W$ als G-representaties, dat dan geldt dat

$$\chi_V(g) = \chi_W(g)$$

voor alle $g \in G$.

OPGAVE 16. Toon aan dat voor alle G-representaties V en W volgende gelijkheden gelden

- $\chi_V(1) = dim_{\mathbb{C}}\, V$
- $\chi_{V^*} = \overline{\chi}_V$
- $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$
- $\chi_{V \otimes W} = \chi_V . \chi_W$

OPGAVE 17. Neem V de permutatie G-representatie corresponderend met de actie van G op een eindige verzameling X. Toon aan dat voor alle $g \in G$

$$\chi_V(g) = \#\{x \in X \mid g.x = x\}$$

dus het karakter is het aantal fixpunten in X onder de actie van G.

Wegens additiviteit van karakters en Mashke's stelling volstaat het de karakters te kennen van simpele G-representaties. Verder, omdat karakters klasfuncties zijn volstaat het de karakter-waarde te kennen op representanten van de verschillende conjugatieklassen in G.

Definitie 4 De **karakter tabel** van een eindige groep G is een $\mathbb{C}$-waardige tabel waarvan de kolommen corresponderen met de verschillende conjugatie klassen $[g]$ van G, de rijen met de verschillende isomorfie klassen V van simpele G-representaties en het getal

$$\chi_V(g)$$

staat op de $(V, [g])$ plaats. Wegens voorgaande oefeningen hangt deze definitie niet af van de gemaakte keuzen.

OPGAVE 18. Gebruik de kennis van alle simpele S_3-representaties om de karakter-tabel voor S_3 te verifiëren

	1	3	2
S_3	1	$(1,2)$	$(1,2,3)$
T	1	1	1
S	1	-1	1
V	2	0	-1

In de opper rij hebben we het aantal elementen in de verschillende conjugatie klassen van S_3 aangegeven.

Voor een G-representatie V en $g \in G$ is de lineaire afbeelding $g, \;:\; V \longrightarrow V$ die de aktie van g geeft niet noodzakelijk een G-morfisme, maar als we deze afbeeldingen uitmiddelen over de groep

$$\phi = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} g. \;:\; V \longrightarrow V$$

krijgen we een G-lineaire endomorfisme van V. Immers,

$$\phi(h.v) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} g.h.v = h.\frac{1}{\#G} \sum_{h^{-1}gh \in G} (h^{-1}gh).v = h.\phi(v)$$

Lemma 3 *De afbeelding $\phi = \frac{1}{\#G}\sum_{g \in G} g.$ is een projectie van V op de G-deelrepresentatie*

$$V^G = \{v \in V \mid \forall g \in G \;:\; g.v = v\}$$

van fixpunten onder de G-actie.

Bewijs. Als $v = \phi(w)$ dan geldt voor alle $h \in G$ dat

$$h.v = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} h.g.w = \frac{1}{\#G} \sum_{g' \in G} g'.w = v$$

dus $Im(\phi) \subset V^G$. Omgekeerd, als $v \in V^G$ dan is

$$\phi(v) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} g.v = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} v = v$$

en dus is $Im(\phi) = V^G$. □

OPGAVE 19. Toon aan dat voor iedere niet-triviale simpele G-representatie V geldt

$$\sum_{g \in G} \chi_V(g) = 0$$

dus, de som over alle elementen van G van de karakterwaarden is nul. Om dit na te gaan in voorbeelden duiden we meestal het aantal elementen in conjugatieklassen aan (zoals in voorbeeld S_3).

Hint : Gebruik voorgaand lemma om te bewijzen dat

$$dim_{\mathbb{C}}\, V^G = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \chi_V(g)$$

en gebruik dan simpelheid van V.

Een andere belangrijke numerieke restrictie op de karakterwaarden komt van de *orthogonaliteits voorwaarden*. Hiervoor definieren we eerst een *Hermitisch inproduk* op de vectorruimte

$$\mathbb{C}_{klas}G = \{\alpha \;:\; G \longrightarrow \mathbb{C} \mid \alpha(g) = \alpha(h^{-1}gh)\; \forall g, h \in G\}$$

van alle klasfuncties. Dit inproduct wordt gedefineerd door

$$(\alpha, \beta) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \overline{\alpha(g)} \beta(g)$$

Stelling 2 (Orthogonaliteits relaties) *De karakters van simpele G-representaties zijn* orthonormaal *t.o.v. dit inproduct op $\mathbb{C}_{klas}G$. M.a.w. als V en W simpele G-representaties zijn, dan geldt*

$$(\chi_V, \chi_W) = \begin{cases} 1 & \textit{als } V \simeq W \\ 0 & \textit{als } V \not\simeq W \end{cases}$$

Bewijs. We weten al dat de vectorruimte van alle G-lineaire afbeeldingen gelijk is aan

$$Hom_G(V, W) = Hom_{\mathbb{C}}(V, W)^G = (V^* \otimes W)^G$$

Verder weten we dat het karakter van $V^* \otimes W$ de klasfunctie $\overline{\chi_V} \chi_W$ is. Het bovenstaande lemma en het lemma van Schur vervolledigen het bewijs. □

OPGAVE 20. Verifiëer deze relaties voor de karakter tabel van S_3.

OPGAVE 21. Toon aan dat er minstens zoveel conjugatie klassen in G zijn dan dat er niet-isomorfe simpele G-representaties zijn.

Hint : Gebruik dat een stel orthonormale vectoren lineair onafhankelijk zijn en dat de dimensie van $\mathbb{C}_{klas}G$ gelijk is aan het aantal conjugatieklassen.

OPGAVE 22. Toon aan dat iedere G-representatie volledig bepaald wordt door zijn karakter. D.i. als $\chi_V = \chi_W$ dan volgt dat $V \simeq W$.

Hint : Bekijk de inproducten (χ_V, χ_S) voor alle simpele G-representaties S.

OPGAVE 23. Toon aan dat een G-representatie V simpel is als en slechts dan als

$$(\chi_V, \chi_V) = 1$$

Toon verder aan dat de multipliciteit e_i van een simpele G-representatie S in een G-representatie V gegeven wordt door het inproduct

$$e_i = (\chi_V, \chi_S)$$

Lemma 4 *Iedere simpele G-representatie V komt in de reguliere representatie voor met multipliciteit $dim_{\mathbb{C}} V$.*

Bewijs. Omdat $g.h = h$ impliceert dat $g = 1$ komen er in de matrix die de actie van g op de reguliere representatie R voorstelt enkel nullen voor op de diagonaal en bijgevolg hebben we dat

$$\chi_R(g) = \begin{cases} 0 & \text{als } g \neq 1 \\ \#G & \text{als } g = 1 \end{cases}$$

Veronderstel nu dat $R \simeq \oplus S_i^{\oplus e_i}$ een decompositie is van R in simpele G-representaties dan hebben we

$$e_i = (\chi_R, \chi_{S_i}) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \overline{\chi}_R(g) \chi_{S_i}(g) = \frac{1}{\#G} \#G \chi_{S_i}(1) = dim_{\mathbb{C}} S_i$$

en in het bijzonder komt dus iedere isomorfie klasse van simpele G-representaties voor in de decompositie van R (en zijn er dus eindig veel isomorfie klassen). □

OPGAVE 24. Toon devolgende belangrijke numerieke restrictie aan

$$\#G = \sum_i (dim_{\mathbb{C}} S_i)^2$$

waar de som loopt over alle isomorfie klassen van simpele G-representaties.

Hint : Gebruik dat $dim_{\mathbb{C}}\ R = \#G$.

OPGAVE 25. Toon aan dat iedere groep G van orde 20 tenminste 2 simpele representaties heeft van dimensie 1.

OPGAVE 26. Toon aan dat voor iedere $g \neq 1$ geldt

$$\sum_{S_i} dim_{\mathbb{C}} S_i \chi_{S_i}(g) = 0$$

waar de som genomen wordt over alle simpele G-representaties.

Hint : De linkerkant is het karacter van g op de reguliere representatie.

Lemma 5 *Voor een complex waardige functie $G \xrightarrow{\alpha} \mathbb{C}$ en een G-representatie V definiëer de lineaire afbeelding*

$$\phi_{\alpha,V} = \sum_{g \in G} \alpha(g) g. \ : \ V \longrightarrow V$$

dan zijn volgende uitspraken equivalent

1. *$\phi_{\alpha,V}$ is een G-lineaire afbeelding voor alle G-representaties V.*
2. *α is een klas functie*

Bewijs. $(2) \Rightarrow (1)$: We hebben voor alle $v \in V$

$$\begin{aligned}
\phi_{\alpha,V}(h.v) &= \sum_{g \in G} \alpha(g) g(h.v) \\
&= \sum_{hgh^{-1} \in G} \alpha(h^{-1}gh) hgh^{-1}(h.v) \\
&= h.(\sum_{hgh^{-1} \in G} \alpha(hgh^{-1}) g(v) \\
&= h.(\sum_{hgh^{-1} \in G} \alpha(g) g(v) \\
&= h.(\phi_{\alpha,V}(v))
\end{aligned}$$

$(1) \Rightarrow (2)$: Als α geen klasfunctie is en als $V = R$ de reguliere representatie, dan is $\phi_{\alpha,R}$ geen G-lineaire afbeelding (ga na!). $\square$

Ferdinand Georg Frobenius werd geboren op 26 oktober 1849 in Berlijn (Duitsland) en stierf op 3 augustus 1917 op 67 jarige leeftijd eveneen in Berlijn. In april 1896 ontwikkelde hij in een reeks brieven aan Dedekind de theorie van karakters en hun toepassingen op representaties van eindige groepen.

Stelling 3 (Hoofdstelling karakters) *Het aantal niet-isomorfe simpele G-representaties is gelijk aan het aantal conjugatie klassen in G. Dwz. in de karakter-tabel zijn er evenveel rijen als kolommen en de karacters $\{\chi_S\}$ van alle simpele G-representaties S vormen een orthonormale basis van $\mathbb{C}_{klas}G$.*

Bewijs. We dienen aan te tonen dat als $G \xrightarrow{\alpha} \mathbb{C}$ een klas functie is waarvoor geldt dat

$$(\alpha, \chi_S) = 0$$

voor alle simpele G-representaties S dat dan $\alpha = 0$. Bekijk nu het G-lineair endomorfisme

$$\phi_{\alpha,S} = \sum_{g \in G} \alpha(g)g. \; : \; S \longrightarrow S$$

Dan volgt uit het lemma van Schur dat $\phi_{\alpha,S} = \lambda id_S$ voor zekere $\lambda \in \mathbb{C}$ en bijgevolg geldt voor $n = dim_{\mathbb{C}} \, S$ dat

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha,S} &= \frac{1}{n} tr(\phi_{\alpha,S}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \alpha(g) \chi_S(g) \\ &= \frac{\#G}{n} \overline{(\alpha, \chi_{S^*})} \\ &= 0 \end{aligned}$$

vermits S^* ook een simpele G-representatie is. Dus is $\phi_{\alpha,S} = 0$. Bijgevolg is

$$\sum_{g \in G} \alpha(g)g. \equiv 0$$

op elke G-representatie V. In het bijzonder geldt dit voor de reguliere representatie $V = R$. Dus pas het bovenstaande toe op $v = 1$ dwz.

$$\sum_{g \in G} \alpha(g)g(1) = \sum_{g \in G} \alpha(g)g = 0 \quad \text{in } R$$

maar alle $g \in G$ zijn lineair onafhankelijk in R en dus is $\alpha(g) = 0$ voor alle $g \in G$, klaar! □

OPGAVE 27. Toon aan dat voor alle $g \in G$ geldt dat

$$\sum_{\chi} \overline{\chi(g)}\chi(g) = \frac{\#G}{c(g)}$$

waar de som genomen is over alle karacters van simpele G-representaties en $c(g)$ het aantal elementen is in de conjugatieklas van g. Toon eveneens aan dat als $g \neq h$ dat dan

$$\sum_{\chi} \overline{\chi(g)}\chi(h) = 0$$

de som opnieuw over alle simpele karakters.

Hint : Als er evenveel rijen als kolommen zijn en als de rijen orthonormaal zijn, dan zijn ook de kolommen orthonormaal.

OPGAVE 28. Werk de karakter tabel uit voor de symmetrische groep S_4 en verifiëer met de volgende tabel

	1	6	8	6	3
S_4	1	$(1,2)$	$(1,2,3)$	$(1,2,3,4)$	$(1,2)(3,4)$
T	1	1	1	1	1
S	1	-1	1	-1	1
V	3	1	0	-1	-1
V'	3	-1	0	1	-1
W	2	0	-1	0	2

OPGAVE 29. Werk de karakter tabel uit voor de alternerende greoep A_4 en verifiëer je berekening aan de hand van devolgende tabel.

	1	4	4	3
A_4	1	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$	$(1,2)(3,4)$
T	1	1	1	1
T'	1	ω	ω^2	1
T"	1	ω^2	ω	1
V	3	0	0	-1

waar ω een 3-de eenheidswortel is.

4. KARAKTERS EN SIMPELE GROEPEN

OPGAVE 30. Toon aan dat de karakter-tabel van S_5 devolgende vorm heeft

	1	10	20	30	24	15	20
S_5	$()$	(12)	(123)	(1234)	(12345)	$(12)(34)$	$(12)(345)$
U	1	1	1	1	1	1	1
U'	1	-1	1	-1	1	1	-1
V	4	2	1	0	-1	0	-1
V'	4	-2	1	0	-1	0	1
$\wedge^2 V$	6	0	0	0	1	-2	0
W	5	1	-1	-1	0	1	1
W'	5	-1	-1	1	0	1	-1

We willen deze kennis gebruiken om de karakter-tabel van de alternerende groep A_5 op te stellen. Vooraleer hieraan te beginnen bewijzen we enkele resulaten omtrent de verbanden tussen representaties van een groep G en deze van een deelgroep $H \subset G$.

Definitie 5 Als V een G-representatie is, dan is V ook een representatie van elke deelgroep H van G. Als we de rol van H willen benadrukken nmoemen we deze H-representatie de **restriktie** van V tot H en noteren ze met $Res(V)$ of $Res^G_H(V)$.

Merk echter op dat als V een simpele G-representatie is het kan gebeuren dat $Res(V)$ opsplits in meerdere simpele H-representaties.

OPGAVE 31. Geef een voorbeeld van een simpele G-representatie waarvan de restrictie $Res(V)$ niet simpel is als H-representatie.

Als we het karakter χ_V van de G-representatie V kennen dat kunnen we ook het karakter bepalen van de H-representatie $Res(V)$. Immers voor alle $h \in H$ geldt

$$\chi_{Res(V)}(h) = \chi_V(h)$$

dus we moeten enkel nagaan voor representanten h van H-conjugatieklassen in welke G-conjugatieklassen ze terecht komen.

In het algemeen is het verband tussen conjugatieklassen van G en deze van een deelgroep H niet evident (in GAP bestaat er de functie **FusionConjugacyClasses** om dit in expliciete gevallen uit te rekenen). In het speciale geval van $A_n \subset S_n$ bestaat er evenwel een elegante beschrijving.

OPGAVE 32. Laat $cong_{S_n}(g)$ een conjugatie-klasse in S_n zijn bestaande uit even permutaties. Noteer met $C_{S_n}(g)$ de **centralizator** van g in S_n, dwz.

$$C_{S_n}(g) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma g = g\sigma\}$$

Dan is $cong_{S_n}(g)$ een volledige conjugatie klasse in A_n als en slechts als

$$C_{S_n}(g) \not\subset A_n$$

In het andere geval splits de conjugatieklasse $cong_{S_n}(g)$ op in twee A_n-conjugatieklassen elk bestaande uit de helft van de elementen.

We kunnen zelfs bepalen welke S_n-conjugatieklassen splitsen.

Stelling 4 *Een S_n-conjugatie klasse van een even permutatie g splits in twee A_n-conjugatie klassen als en alleen als de cycle-decompositie van g bestaat uit enkel oneven cycles, allen van verschillende lengten.*

Bewijs. We noteren het cycle type van g met

$$1^{e_1}2^{e_2}3^{e_3}\dots$$

Als g tenminste een even cycle bevat, dwz. een $e_{2i} > 0$ dan kunnen we g schrijven als

$$g = xy \qquad \text{met} \qquad x = (a_1, \dots, a_{2i})$$

Omdat de cycles van y disjunct zijn met deze van x volgt dat $xy = yx$ en dus ook $gx = xg$. Bijgevolg is $x \in C_{S_n}(g)$ en omdat x een even cycle is geldt $x \notin A_n$. De vorige opgave toont dan aan dat de S_n-conjugatie klasse van g niet opsplits over A_n.

Als een $e_{2i+1} > 1$ dan kunnen we g schrijven als

$$g = (a_1, \dots, a_{2i+1})(b_1, \dots, b_{2i+1}y$$

met de cycles van y disjunct met de twee gegeven $2i+1$-cycles. Beschouw nu de *oneven* permutatie

$$\sigma = (a_1, b_1)(a_2, b_2)\dots(a_{2i+1}, b_{2i+1}) \in S_n - A_n$$

dan volgt dat

$$\begin{aligned} \sigma(a_1, \dots, a_{2i+1})(b_1, \dots, b_{2i+1}) = \\ (a_1, b_2, a_3, b_4, \dots, a_{2i+1}, b_1, a_2, b_3, \dots, b_{2i+1}) = \\ (a_1, \dots, a_{2i+1})(b_1, \dots, b_{2i+1})\sigma \end{aligned}$$

en dus $\sigma g = g\sigma$ en bijgevolg is

$$\sigma \in C_{S_n}(g) - A_n$$

en wegens de vorige opgave splits de conjugatie klasse wederom niet.

Blijft enkel het geval dat *alle* $e_{2i} = 0$ en *alle* $e_{2i+1} = 0$ of $= 1$. We weten dat het aantal elemeneten in de S_n-conjugatie klasse van g met cycle-type $1^{e_1}2^{e_2}\dots$ gelijk is aan

$$\#cong_{S_n}(g) = \frac{n!}{e_1!1^{e_1}e_2!2^{e_2}\dots}$$

en dat wordt dus is dit geval als $i_1, \dots, i_l$ de getallen zijn weaarvoor $e_{2i+1} = 1$

$$\#cong_{S_n}(g) = \frac{n!}{(2i_1+1)(2i_2+1)\dots(2i_l+1)} = \frac{n!}{j}$$

met j oneven. Omdat

$$\#cong_{S_n}(g) = \frac{\#S_n}{\#C_{S_n}(g)}$$

volgt dat $\#C_{S_n}(g) = j$ is oneven. DFaarom is elk element is $C_{S_n}(g)$ van oneven orde en zit dus in A_n. In dit geval hebben we dus dat $C_{S_n}(g) \subset A_n$ en de voorgaande opgave toont aan dat dus de conjugatieklasse van g over A_n splits in twee gelijke delen. □

OPGAVE 33. Bepaal de conjugatieklassen van A_5 en hun aantal elementen.

OPGAVE 34. Gebruik restriktie van representaties van S_5 om aan te tonen dat de karakter tabel van A_5 devolgende vorm heeft

	1	20	15	12	12
A_5	()	(123)	(12)(34)	(12345)	(21345)
U	1	1	1	1	1
V	4	1	0	-1	-1
W	5	-1	1	0	0
Y	3	0	-1	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$	$\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$
Z	3	0	-1	$\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$

We willen nu alle simpele representaties van A_5 bepalen. We gebruiken hiervoor verschillende identificaties van A_5. Vooreerst als rotatie-symmetrie groep van de icosaheder. Dit levert ons twee simpele 3-dimensionale representaties.

OPGAVE 35. Toon aan dat devolgende 3-dimensionale representaties van A_5 simpel zijn en niet-isomorf

- U_1 : We sturen een even permutatie van $\{0,1,2,3,4\}$ naar de rotatie die de coördinaat frames $\{A,B,C,D,E\}$ op dezelfde wijze permuteert. Concreet bvb

  $$\begin{cases} (0,1,2,3,4) \mapsto \text{type 5A-rotatie rond as } \infty\infty \text{ in tegenwijzerzin} \\ (0)(1,3)(2,4) \mapsto \text{type 2A-rotatie rond de } X\text{-as} \end{cases}$$

  Omdat deze twee permutaties heel A_5 voortbrengen definieert dit een 3-dimensionale representatie U_1.

- U_2 : We sturen een even permutatie van $\{0,1,2,3,4\}$ naar de rotatie die de coördinaat frames $\{A,C,E,B,D\}$ op dezelfde wijze permuteert. Concreet bvb

  $$\begin{cases} (0,1,2,3,4) \mapsto \text{type 5B-rotatie rond as } \infty\infty \text{ in tegenwijzerzin} \\ (0)(1,3)(2,4) \mapsto \text{type 2A-rotatie rond de } Y\text{-as} \end{cases}$$

  en dit geeft wederom een 3-dimensionale representatie U_2.

OPGAVE 36. Gebruik het feit dat een 3-dimensionale representatie over een hoek ϕ als eigenwaarden heeft $\{1, e^{i\phi}, e^{-i\phi}\}$ en daarom als spoor $1 + 2cos(\phi)$ heeft om de karakters van U_1 en U_2 te bepalen. Verifiëer je resultaat met

	1	15	20	12	12
	$1A$	$2A$	$3A$	$5A$	$5B$
U_1	3	-1	0	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$	$\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$
U_2	3	-1	0	$\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$

We kunnen $I \simeq A_5$ ook opvatten als deelgroep van S_5 en die heeft een natuurlijke 5-dimensionale permutatie representatie door zijn actie op de 5-basisvectoren. Dus, heeft ook A_5 een 5-dimensionale permutatie representatie X. Evenwel, X kan nooit simpel zijn want de deelruimte voortgebracht door de som van alle basisvectoren $T = \mathbb{C}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$ is invariant onder de actie.

OPGAVE 37. Toon aan dat $X \simeq T \oplus V$ waar V een 4-dimensionale representatie is en dat de karakters van deze representaties gegeven worden door

	1 $1A$	15 $2A$	20 $3A$	12 $5A$	12 $5B$
T	1	1	1	1	1
X	5	1	2	0	0
V	4	0	1	-1	-1

Toon hieruit aan dat V een simpele 4-dimensionale representatie is van A_5 en dat T de triviale 1-dimensionale simpele representatie is.

We hebben nu al vier simpele A_5-representaties gevonden : T, U_1, U_2 en V. Omdat er juist 5 conjugatieklassen zijn in A_5 missen we nog juist 1 simpele representatie : W.

OPGAVE 38. Gebruik de al gekende karakters en de orthonormaliteits relaties en andere relaties die we hebben afgeleid om de karakters en dimensie te bepalen van de onbrekende simpele A_5-representatie

	1 $1A$	15 $2A$	20 $3A$	12 $5A$	12 $5B$
T	1	1	1	1	1
U_1	3	-1	0	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$	$\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$
U_2	3	-1	0	$\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$
V	4	0	1	-1	-1
W					

Verifiëer dat je oplossing devolgende data bevat

$$W \mid 5 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0$$

We zijn dus nog op zoek naar een 5-dimensionale representatie van A_5. Een manier om deze expliciet te construeren is via het isomorfisme $A_5 \simeq PSL_2(\mathbb{F}_5)$.

Voor ieder *eindig lichaam* $\mathbb{F}_q$ op $q = p^k$ elementen hebben we de *Möbius transformaties* op het lichaam van rationale functies $\mathbb{F}_q(t)$ door

$$t \mapsto \frac{at+b}{ct+d}$$

voor iedere 2×2 matrix

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \text{met } ad - bc \text{ omkeerbaar en geen kwadraat in } \mathbb{F}_q^*$$

Deze Möbius transformaties vormen onder samenstelling (wat overeenkomt met matrixvermenigvuldiging) een groep die we noteren met $PSL_2(\mathbb{F}_q)$ en die we de **speciale projectieve groep** noemen.

OPGAVE 39. Herhaal dat $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ de projectieve rechte is die bestaat uit alle equivalentieklassen van koppels $(x, y) \neq (0, 0)$ in $\mathbb{F}_q^2$ onder scalaire vermenigvuldiging met elementen uit $\mathbb{F}_q^*$ en dat $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ geidentificeerd kan worden met $\mathbb{F}_q$ (via $x \mapsto [x, 1]$) samen met ∞ (dat overeenkomt met de klasse $[1,0]$). Toon aan dat $PSL_2(\mathbb{F}_q)$ *transitief* werkt op $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q) = \mathbb{F}_q \cup \{\infty\}$.

Men kan aantonen dat $PSL_2(\mathbb{F}_5)$ een groep is van orde 60 en voortgebracht wordt door de Möbius transformaties

$$\begin{cases} \alpha \ : \ x \mapsto x+1 \\ \beta \ : \ x \mapsto 2x \\ \gamma \ : \ x \mapsto -x^{-1} \end{cases}$$

OPGAVE 40. Toon aan dat α, β en γ Möbius transformaties zijn (d.i. vind de bijhorende matrixen). Bewijs dat de groep voortgebracht door α, β en γ transitief werkt op

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_5) = \{0,1,2,3,4,\infty\}$$

en dat deze groep orde 60 heeft.

OPGAVE 41. Definiëer met π de permutatie op de 6 elementen van $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_5)$

$$\pi = (\infty,0)(1,4)(2,3)$$

en bekijk de verzameling bestaande uit de 5 elementen

$$\Pi = \{\pi, \alpha^{-1}\pi\alpha, \alpha^{-2}\pi\alpha^2, \alpha^{-3}\pi\alpha^3, \alpha^{-4}\pi\alpha^4\}$$

Toon aan dat $PSL_2(\mathbb{F}_5) = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ werkt als permutaties op Π en dat deze actie het isomorfisme

$$PSL_2(\mathbb{F}_5) \simeq A_5$$

induceert.

OPGAVE 42. Via het isomorfisme $A_5 \simeq PSL_2(\mathbb{F}_q)$ en de transitieve actie van $PSL_2(\mathbb{F}_5)$ op $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_5)$ heeft A_5 dus een permutatie representatie van dimensie $6 : Y$. Bereken het karakter van Y en toon aan dat

$$Y \simeq T \oplus W$$

waarbij W een simpele A_5-representatie is van dimensie 5 en verifiëer dat het karakter van W inderdaad de gewenste vorm heeft.

Kunnen we aan de karakter-tabel van een eindige groep G zien of die groep simpel is? We gaan nu aantonen dat dit inderdaad het geval is en dat we zelfs alle normaaldelers van G uit de karakters kunnen halen. We hebben eerst meer informatie nodig over karakter-waarden.

OPGAVE 43. Als G een eindige groep is, toon aan dat alle karakter-waarden

$$\chi_V(g)$$

algebraische getallen zijn over $\mathbb{Z}$.

Stelling 5 *Als ρ_V een m-dimensionale representatie is van G en als voor een $g \in G$ geldt dat*

$$||\chi_V(g)|| = m$$

dan is $\rho_V(g) = \omega I_m$ een scalaire matrix met ω een eenheidswortel. Als bovendien

$$\chi_V(g) = m$$

dan is $\rho_V(g) = I_m$ de eenheidsmatrix en bijgevolg is $g \in \mathtt{ker}\rho_V$.

Bewijs. Zoals in voorgaande opave weten we dat de actie van g op V kan voorgesteld worden als

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{bmatrix}$$

met alle λ_i n-de eenheidswortels voor n de orde van g. Bijgevolg is

$$\chi_V(g) = \lambda_1 + \ldots \lambda_m$$

maar dan geldt wegens de driehoeksongelijkheid voor de norm

$$||\chi_V(g)|| \leq ||\lambda_1|| + \ldots + ||\lambda_m|| = m$$

en de ongelijkheid kan enkel een gelijkheid zijn als alle λ_i gelijk zijn. Dus als $||\chi_V(g)||m$ dan is $\rho_V(g) = \lambda I_m$ met λ een n-de eenheidswortel. Maar dan is

$$\chi_V(g) = m\lambda$$

dus als we bovendien stellen dat $\chi_V(g) = m$ dan is $\lambda = 1$ en is dus $\rho_V(g) = I_n$ de eenheidsmatrix. Met andere woorden, g werkt triviaal op V en dus is $g \in \mathtt{ker}\ \rho_V$. □

Dit levert volgende eenvoudige test op simpelheid van een eindige groep G.

Stelling 6 *Volgende uitspraken zijn equivalent voor een eindige groep G*

1. *G is simpel*
2. *Voor alle $g \neq e$ en alle irreduciebele karakters χ_V met V niet-triviaal geldt*

$$\chi_V(g) \neq \chi_V(e)$$

Bewijs. $(1) \Rightarrow (2)$: Volgt uit voorgaande stelling. Immers, als V een irreduciebele m-dimensionale representatie is en als voor een $g \neq e$ geldt dat

$$\chi_V(g) = \chi_V(e) = m$$

dan levert deze stelling dat $g \in \mathtt{ker}\rho_V$ en dus is

$$N = \mathtt{ker}\ \rho_V = \{g \in G \mid g|V = id_V\}$$

een niet-triviale normaaldeler van G ($N \neq \{e\}$ omdat $g \in N$ en $N \neq G$ want V is niet de triviale representatie.

$(2) \Rightarrow (1)$: Laat N een niet-triviale normaaldeler zijn van G en laat V een irreduciebele niet-triviale representatie zijn van de quotient groep $\overline{G} = G/N$. Dan is

$$G \twoheadrightarrow G/N \xrightarrow{\rho_V} GL(V)$$

een irreduciebele niet-triviale representatie van G en voor alle $g \in \mathtt{ker}\ \rho_V$ (en N is bevat in deze kern) geldt dat $\chi_V(g)(= \chi_V(e)$, een tegenspraak. □

OPGAVE 44. Ga dit criterium voor simpelheid van G na voor alle karakter-tabellen die we al opgesteld hebben.

We kunnen dit argument nog verfijnen. We kunnen de karakter-tabel van een eindige groep gebruiken om alle normaaldelers van G te vinden. In het bijzonder bevat de karakter-tabel van G dus voldoende informatie om te beslissen of G een oplosbare groep is.

Stelling 7 *Voor G een eindige groep van orde n, dan zijn alle normaaldelers van G van de vorm*

$$N = \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(e)\}$$

voor een karakter χ dat een positieve integrale lineaire combinatie is van de irreduciebele karacters $\chi_1, \ldots, \chi_k$ van G

$$\chi = a_1\chi_1 + \ldots + a_k\chi_k$$

met $a_i \in \mathbb{N}$ en zodanig dat

$$m = a_1\chi_1(e) + \ldots + a_k\chi_k(e) \mid n$$

Bewijs. Laat N een normaaldeler van G zijn en beschouw V de reguliere representatie van de quotient groep G/N, dan heeft V dimensie $[G : N]$ en is bijgevolg een deler van n.

Omdat V een trouwe G/N representatie is, is de kern van de representatie

$$G \twoheadrightarrow G/N \xrightarrow{\rho_V} GL(V)$$

juist gelijk aan N en dus ook gelijk aan

$$\{g \in G \mid \chi_V(g) = \chi_V(e)\}$$

Nu zijn alle irreduciebele G/N-componenten van V ook irreduciebele G-representaties en bijgevolg kunnen we χ_V schrijven als een positieve integrale combinatie van de irreduciebele G-karakters χ_i. Tenslotte is de m uit de formulering van de stelling gelijk aan de dimensie van V. $\square$

OPGAVE 45. Gebruik de karakter-tabel van S_3

	1	3	2
S_3	1	$(1,2)$	$(1,2,3)$
T	1	1	1
S	1	-1	1
V	2	0	-1

om aan te tonen dat $\langle(1,2,3)\rangle$ de enige normaaldeler is van S_3.

5. STELLING VAN BURNSIDE

Definitie 6 De **groep-algebra** $\mathbb{C}G$ van een eindige groep G is de (niet noodzakelijk commutatieve) algebra

$$\mathbb{C}G = \mathbb{C}e_{g_1} + \ldots + \mathbb{C}e_{g_n}$$

met als basis de elementen e_g waar g over alle elementen van G loopt en met de vermenigvuldiging lineair geinduceerd door

$$e_h.e_g = e_{hg}$$

voor alle $g, h \in G$.

OPGAVE 46. Ga na dat $\mathbb{C}G$ inderdaad een eindig dimensionale associatieve $\mathbb{C}$-algebra is met eenheidselement $e_e = 1$.

Definitie 7 Een n-**dimensionale representatie** V van de groep-algebra $\mathbb{C}G$ is een $\mathbb{C}$-algebra morfisme

$$\mathbb{C}G \xrightarrow{\phi} M_n(\mathbb{C}) = End(V)$$

We noemen de representatie **simpel** indien dit algebra morfisme surjectief is.

OPGAVE 47. Toon aan dat er een naturrlijke bijectie is tussen

- n-dimensionale (irreduciebele) representaties van G
- n-dimensionale (simpele) representaties van $\mathbb{C}G$

OPGAVE 48. Laat K een conjugatieklasse zijn in G, toon aan dat

$$e_K = \sum_{g \in K} e_g$$

een **centraal** element is van de groep algebra $\mathbb{C}G$.

Stelling 8 *Als χ het character is van een irreduciebele representatie ρ_V van dimensie d en als K een vonjugatie klasse van elementen van G is dan is*

$$\frac{1}{d} \sum_{g \in K} \chi(g)$$

een algebraisch getal over $\mathbb{Z}$.

Bewijs. Uit voorgaande opgave weten we dat e_K een centraal element is vanm de groep algebra $\mathbb{C}G$ maar ook van de integral groep algebra $\mathbb{Z}G$. Omdat het centrum van $\mathbb{Z}G$ een $\mathbb{Z}$-moduul is van eindige rang volgt dat e_K integraal is over $\mathbb{Z}$.

Bekijk nu de algebra map bepaald door de irreduciebele representatie

$$\phi_V : \mathbb{C}G \longrightarrow End(V)$$

en wegens het lemma van Schur moet heb beeld van het centrale element e_K een scalaire matrix zijn, dus

$$\phi_V(e_K) = \lambda I_d$$

met λ een algebraisch getal over $\mathbb{Z}$. Als we nu het spoor nemen van beide leden krijgen we

$$\sum_{g \in K} \chi(g) = d\lambda$$

waaruit het gestelde volgt. □

Omdat de karakter waarden $\chi(g)$ dezelfde zijn over de conjugatie klasse K kunnen we de stelling herformuleren als

$$\frac{h}{d}\chi(K) \quad \text{is een algebraisch getal over } \mathbb{Z}$$

waar h het aantal elementen in de conjugatieklasse is en $\chi(K)$ de waarde is van het karakter op gelijk welk element van K.

Een belangrtijk gevolg is volgende deelbaarheidseigenschap voor de dimensies van irreduciebele representaties.

Stelling 9 *Als G een eindige groep is van orde n en W een iurreduciebele representatie van dimensie d, dan $d|n$.*

Bewijs. Omdat W een irreduciebel erepresentatie is geldt voor het bijhorend karakter dat

$$(\chi_W, \chi_W) = 1$$

als we dit uitschrijven krijgen we

$$n = \sum_{g \in G} \chi(g^{-1})\chi(g)$$

of nog

$$\frac{n}{d} = \sum_{g \in G} \chi(g^{-1})\chi(g)/d$$

We kunnen nu de som over alle elementen van G uitsplitsen in verschillende conjugatie klassen K en krijgen bijgevolg

$$\frac{n}{d} = \sum_K (\frac{1}{d} \sum_{g \in K} \chi(g))\chi(g^{-1})$$

Wegens vorige stelling weten we dat alle termen $\frac{1}{d}\sum_{g \in K} \chi(g)$ algebraische getallen zijn over $\mathbb{Z}$ en we wisten ook al dat alle karacterwaarden $\chi(g^{-1})$ algebraische getallen zijn. Bijgevolg is het rechterlid een algebraisch getal over $\mathbb{Z}$ en het linkerlid een element van $\mathbb{Q}$. De enige algebraische rationale getallen zijn de gehele getallen en dus is $\frac{n}{d} \in \mathbb{Z}$ waaruitt het gestelde volgt. □

Lemma 6 *Als $a, b \in \mathbb{Z}$ en γ een algebraisch getal over $\mathbb{Z}$ en als*

$$b|a\gamma$$

dan $b|\gamma$ als a en b onderling priem zijn.

Bewijs. Omdat $(a, b) = 1$ bestaan er $c, d \in \mathbb{Z}$ met

$$ac + bd = 1$$

waaruit volgt dat

$$a\gamma c + b\gamma d = \gamma$$

Verder weten we dat er een algebraisch getal β is zodat

$$a\gamma = b\beta$$

Maar dan hennen we dat

$$b(\beta c + \gamma d) = \gamma$$

en dus inderdaad $b|\gamma$. $\square$

Lemma 7 *Als het aantal elementen h in een conjugatieklasse K relatief priem is met de dimensie d van een irreducibele representatie met karakter χ dan is*

$$\frac{\chi(K)}{d}$$

een algebraisch getal over $\mathbb{Z}$.

Bewijs. We hebben gezien dat

$$\alpha = \frac{h}{d}\chi(K)$$

een algebraisch getal is en dus hebben we dat

$$h|d\alpha = h\chi(K)$$

maar dan volgt uit het lemma dat

$$h|\alpha$$

en dus dat $\frac{\alpha}{h} = \frac{\chi(K)}{d}$ een algebraisch getal is. $\square$

Stelling 10 *Neem χ het karacter van een irreducibele representatie van G van dimensie d. Als h het aantal elementen van een conjugatie klas K priem is met d dan is ofwel*

$$\chi(K) = 0 \qquad \text{ofwel} \qquad \chi(K) = d\omega$$

met ω een eenheidswortel en $\rho(g)$ ligt in het centrum van $\rho(G)$ voor alle $g \in K$.

Bewijs. We hebben al gezien dat $\chi(K)$ een som is van eenheidswortels

$$\chi(K) = \omega_1 + \ldots + \omega_d$$

en bijgevolg dat

$$||\chi(K)|| \leq d$$

met gelijkheid enkel als alle $\omega_i = \omega$ met ω een m-de eenheidswortel. Bijgevolg hebben we dat ofwel

$$||\frac{\chi(K)}{d}|| < 1 \qquad \text{ofwel} \qquad \chi(K) = d\omega$$

In het eerste geval, schrijf

$$\alpha = \frac{\chi(K)}{d} = \frac{1}{d}\sum_j \omega^{m_j}$$

en noteer met $\alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$ de elementen verkregen door in het rechterlid ω te vervangen door $\omega^2, \ldots, \omega^{m-1}$. Bekijk nu de veelterm

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_{m-1})$$

alle coefficienten hiervan zijn symmetrische functies met rationale coefficienten in

$$\omega, \omega^2, \ldots, \omega^m = 1$$

en bijgevolg zijn alle coefficieneten van $f(x)$ rationale getallen.

Neem nu $g(x)$ een minimaal polynoom met gehele coefficienten voor het algebraisch getal α dan noemen we de andere wortels van $g(x)$ de geconjugeerden van α. Omdat α een wortel is van zowel $g(x)$ als $f(x)$ deelt $g(x)$ de veelterm $f(x)$ en bijgevolg zijn alle geconjugeerden van α elementen van de verzameling $\{\alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}\}$. Noem deze geconjugeerden $\{\beta_2, \ldots, \beta_s\}$ dan volgt dat ook

$$||\beta_i|| \leq 1$$

Maar omdat $\alpha\beta_2 \ldots \beta_s = \pm c \in \mathbb{Z}$ en $||\alpha|| < 1$ volgt dat

$$||c|| = ||\alpha||||\beta_2|| \ldots ||\beta_s|| < 1$$

en dus moet $c = 0$ waaruit het gestelde volgt. □

De minimale orde van een simpele niet-cyclische group (de icosaheder groep A_5) is

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

en heeft dus drie verschillende priemdelers. We gaan nu aantonen dat alle simpele niet-cyclische groepen deze eigenschap hebben.

Stelling 11 *Veronderstel dat een eindige groep G een conjugatie klasse K heeft bestaande uit $h = p^m$ elementen met p een priemgetal, dan is G niet simpel.*

Bewijs. Laat $d_1 = 1, d_2, \ldots, d_s$ de dimensies zijn van de verschillende irreduciebele representaties van G dan weten we dat voor n de orde van G

$$n = 1^2 + d_2^2 + \ldots + d_s^2$$

en omdat p de orde van G deelt (het aantal elementen in een conjugatie klasse is steeds een deler van de orde van de groep) volgt dat p niet alle d_s met $s \geq 2$ kan delen. Neem zulke d_t met $(d_t, p) = 1$. Dan volgt uit stelling 10 dat ofwel

$$\chi(K) = 0 \qquad \text{ofwel} \qquad \rho_t(g) \in Z(\rho(G))$$

voor alle $g \in K$. Als G simpel zou zijn kan het tweede geval niet optreden want neem

$$N = \{g \in G \mid \rho(g) \in Z(\rho(G))\}$$

Dan bevat N de conjugatie klasse K (en is dus niet triviaal) en verder in N duidelijk een normaaldeler van G. We mogen dus veronderstellen dat voor alle dimensies d_t zodat $(d_)t, p) = 1$ we hebben dat $\chi_t(K) = 0$. Neem $g \in K$ dan volgt uit de orthogonaliteitsrelatie

$$\sum_{i=1}^{s} \chi_i(e)\chi_i(g) = 0$$

een contradictie. Immers, voor alle i geldt $\chi_i(e) = d_i$ en ofwel $p|d_i$ ofwel is $\chi_i(g) = 0$. Anderzijds is $\chi_1(g) = 1$ en wordt het linkerlid

$$1 + p.q \neq 0 \, mod \, p$$

wat natuurlijk niet kan. □

William Burnside werd geboren op 2 July 1852 in Londen (Engeland) en stierf op 21 Aug 1927 in Kent (Engeland). In 1904 bewees hij op 52-jarige leeftijd wat we nu de stelling van Burnside noemen. Tevens opperde hij het vermoeden dat elke groep van oneven orde oplosbaar is, een vermoeden dat pas in 1962 door Feit en Thompson bewezen werd en een belangrijke stap is in de klassificatie van alle eindige simpele groepen.

Stelling 12 (Burnside) *Een groep van orde $p^a q^b$ met p en q priemgetallen is oplosbaar.*

Bewijs. Neem H een p-Sylow deelgroep van G dan is de orde van H gelijk aan p^a. Het centrum van een p-groep is niet-triviaal dus neem een $g \neq e$ in $Z(H)$. Het aantal elementen in de conjugatieklasse K van g is het getal h met

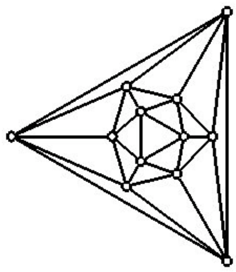
$$h = \frac{\#G}{\#N_G(g)} = \frac{p^a q^b}{p^a q^i} = q^j$$

omdat $H \subset N_G(g)$. Uit voorgaande stelling volgt dan dat G niet simpel kan zijn, dus heeft een niet triviale normaaldeler N en zowel N als de quotientgroep G/N hebben weer orde $p^k q^l$ voor kleinere waarden k en l en dus kunnen we dit argument per inductie voortzetten en zijn we klaar. $\square$

Oplossingen van de Opgaven

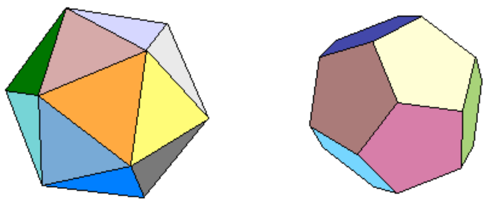
Opgave 1. Projekteer het veelvlak op een vlak zodanig dat de zijden een vlakke *graph* vormen. Toon de numerieke eigenschap per induktie aan voor alle graphen waar we het gebied buiten de graph ook als een gebied beschouwen. Dit doen we door eerst een opspannende **boom** in de graf te nemen (dat is een deel-graf zonder cycles) en vervolgens zijden toevoegen.

Bvb. de vlakke graf geassocieerd met de icosaheder is



Opgave 1

Opgave 2. Icosaheder en dodecaheder zijn *duale* convexe veelvlakken dwz. als je de middelpunten van zijvlakken verbind asa de zijvlakken aan elkaar grenzen verkrijg je de andere figuur als blijkt uit de vergelijking van beide figuren



Gebruik deze eigenschap.

Opgave 2

Opgave 3. Een rotatie met hoek 72^o om de middelloodlijn op een zijvlak is een rotatie symmetrie van het dodecahedron. Toon aan dat je door zulke rotatie te gebruiken elk zijvlak kan sturen naar een gegeven zijvlak. M.a.w. de actie is *transitief* op de 12 zijvlakken. Toon nu aan dat de *stabilizator deelgroep* van een zijvlak cyclisch is van orde 5 en gebruik de *orbit-stelling* (zie vorig jaar). Opgave 3

Opgave 4. Laat a de rotatie zijn die top- en beneden-zijvlak bewaart en 72^o in tegenwijzerzin draait en laat b de rotatie zijn met hoek 72^o die hoekpunt $1 \mapsto 6$ en hoekpunt $6 \mapsto 7$. Ga na dat deze rotaties de volgende cycle-ontbinding hebben

$$\begin{cases} a = (1,2,3,4,5)(6,8,10,12,14)(7,9,11,13,15)(16,17,18,19,20) \\ b = (1,6,7,8,2)(3,5,15,16,9)(4,14,20,17,10)(12,13,19,18,11) \end{cases}$$

We gebruiken nu GAP om de orde van de groep voortgebracht door deze twee elementen te bepalen, cast te stellen dat die 60 is (en dus de hele icosaheder groep is) en GAP te laten vaststellen dat dit een simpele groep is. Omdat er maar één simpele groep is van orde 60 zijn we klaar! Hier volgt het transcript

```
gap> a:=(1,2,3,4,5)(6,8,10,12,14)(7,9,11,13,15)(16,17,18,19,20);
(1,2,3,4,5)(6,8,10,12,14)(7,9,11,13,15)(16,17,18,19,20)
gap> b:=(1,6,7,8,2)(3,5,15,16,9)(4,14,20,17,10)(12,13,19,18,11);
(1,6,7,8,2)(3,5,15,16,9)(4,14,20,17,10)(11,12,13,19,18)
gap> icosaheder:=Group(a,b);
Group([ (1,2,3,4,5)(6,8,10,12,14)(7,9,11,13,15)(16,17,18,19,20),
  (1,6,7,8,2)(3,5,15,16,9)(4,14,20,17,10)(11,12,13,19,18) ])
gap> Size(icosaheder);
60
gap> IsSimpleGroup(icosaheder);
true
```

Opgave 4

Opgave 5. Ga na :

- Deze map is een inclusie.
- Door rotaties rond assen die 2 tegenoverliggende hoekpunten verbinden te beschouwen kan je onder deze map iedere 3-cycle (u, v, w) in S_5 bekomen.

en omdat de alternerende groep vioortgebracht is door 3-cycles (zie vorig jaar) is inderdaad de rotatie-symmetrie groep van het dodecahedron A_5. Opgave 5

Opgave 12. Om te beginnen weten we dat de matrix die de actie van een vast element g van een eindige groep G op een vectorruimte V geeft altijd diagonalizeerbaar is (gebruik dat $g^k = e$ en dus moet dit ook gelden voor de matrix en gebruik dan de Jordan normaalvorm).

Als nu g en h in G met elkaar commuteren dan beweren we dat de bijhorende actie-matrixen gelijktijdig gediagonalizeerd kunnen worden, dwz. er bestaat een basis van V waarin de actie-matrixen van g en h beiden diagonaal zijn. We weten

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}$$

een decompositie van V in eigenwaarden voor g. Dwz. voor alle $v \in V_{\lambda_i}$ geldt $g.v = \lambda_i v$. We beweren nu dat

$$h.V_{\lambda_i} = V_{\lambda_i}$$

Immers voor alle $x \in V_{\lambda_i}$ hebben we dat

$$g.(h.x) = (gh).x = (hg).x = h.(g.x) = h.(\lambda_i x) = \lambda_i h.x$$

en dus is $h.x$ inderdaad een eigenwaarde voor g met eigenwaarde λ_i. Maar dan kunne we ook elk van deze deelruimten verder opsplitsen in eigenruimten voor h

$$V_{\lambda_i} = W^{(i)}_{\mu_1} \oplus \ldots \oplus W^{(i)}_{\mu_{l_i}}$$

en als we dan een basis voor V nemen compatiebel met de decomposities van alle V_{λ_i} in h-eigenruimten dan zal de actie van g en h beiden gegeven zijn door een diagonaalmatrix tov. deze basis.

Neem nyu G abels dan kunnen we dit procede verder zetten voor alle elementen van G en dus kunnen we uiteindelijk V opsplitsen in deelvectorruimten

$$V = Z_1 \oplus \ldots \oplus Z_u$$

zodat alle $x \in Z_i$ eigenvectoren zijn voor *alle* elementen $g \in G$. Dus in elke basis van V die compatiebel is met deze opsplitsing zullen alle actie matrixen gegeven worden door diagonale matrixen. Noem deze basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ dan is elk van de deelruimten $\mathbb{C}v_i$ een G-deelrepresentatie en wegens de vorm van de actie matrixen hebben we dat

$$V \simeq \mathbb{C}v_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}v_n$$

als G-representaties. Dus zijn inderdaag alle simpele G-representaties van dimensie 1.

Neem nu $G = C_m$ de cyclische groep van orde m met voortbrenger g, wat zijn dan de mogelijke 1-dimensionale representaties? Neem een basis vector v voor deze representatie, dwz. $V = \mathbb{C}v$ dan moet $g.v$ ook in V zittten en dus is er een $\lambda \in \mathbb{C}$ met

$$g.v = \lambda v$$

Maar dan is voor alle k

$$g^k.v = \lambda^k v$$

In het bijzonder moet dan voor $k = m$, $\lambda^m = 1$. Bijgevolg moet λ een m-de eenheidswoortel zijn. We hebben dus juist m mogelijke simpele representaties van C_m namelijk

$$V_i = \mathbb{C}v_i \qquad \text{met} \qquad g.v_i = \zeta^i v_i$$

met ζ een primitieve m-de eenheidswortel. Je gaat direct na uit de definitie dan $V_i \not\simeq V_j$ als $i \neq j$. Opgave 12

Opgave 13. Een n-dimensionale representatie van $\mathbb{Z}$ is volledig bepaald door de actiematrix van de voortbrenger (1) en dus door een $n \times n$ omkeerbare matrix. Isomorfisme van representaties komt overeen met conjugatie. Directe sommen van simpele representaties zijn juist de diagonalizeerbare matricen. Meer specifiek, bekijk de twee dimensionale representatie V van $\mathbb{Z} = C_\infty$ gegeven door

$$1 \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De deelruimte $W = \mathbb{C}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \subset \begin{bmatrix} \mathbb{C} \\ \mathbb{C} \end{bmatrix}$ is een $\mathbb{Z}$-deelruimte want

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nochthans kunnen we V niet schrijven als de directe som van twee 1-dimensionale $\mathbb{Z}$-representaties, want stel $V = W \oplus X$ met

$$X = \mathbb{C}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

met $b \neq 0$ dan is dir enkel een $\mathbb{Z}$-deelrepresentatie indien

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Maar dit levert het systeem van lineaire vergelijkingen

$$\begin{cases} a + b & = \lambda a \\ b & = \lambda b \end{cases}$$

Dus $\lambda = 1$ (als $b \neq 0$ maar dan moet $b = 0$ een contradictie. Opgave 13

Opgave 14. (1) : S_3 is voortgebracht door $g = (1,2)$ en $h = (1,2,3)$ en die voldoen aan de vergelijkingen

$$g^2 = e, h^3 = e \quad \text{en} \quad gh = h^2 g$$

Neem nu een 1-dimensionale S_3-representatie $V = \mathbb{C}v$ dan moeten we hebben

$$g.v = av \qquad \text{en} \qquad h.v = bv$$

en a en b moeten voldoen aan

$$a^2 = 1 = b^3 \quad \text{en} \quad ab = ab^2$$

Bijgevolg is $b = 1$ en $a^2 = 1$. Dit geeft dus de twee mogelijkheden $a = \pm 1$ die corresponderen met de triviale en de sign-representatie.

(2) : $T = \{(a,a,a) \in \mathbb{C}^3$ is invariant onder de actie van S_3 dus is een S_3-deelrepresentatie en dan moet volgens reduceerbaarheid de drie dimensionale permutatie representatie geschreven kunnen worden als

$$V \oplus T$$

met V de kern van de map $\mathbb{C}^3 \twoheadrightarrow T$ gegeven door $(a,b,c) \mapsto a+b+c$. Merk op dat V als basis heeft de vectoren

$$E = (1,-1,0) \quad \text{en} \quad F = (0,1,-1)$$

en de actie wordt gegevn door

$$g.E = -E, g.F = E + F \quad \text{en} \quad h.E = F, h.F = -E - F$$

Stel dat V nog een 1-dimensionale deelrepresentatie zou hebben dan moet die bestaan uit alle scalaire veelvouden van $w = aE + bF$. Maar dan moet

$$\begin{cases} g.w = (b-a)E + bF & = \lambda(aE + bF) \\ h.w = -bE + (a-b)F & = \mu(aE + bF) \end{cases}$$

maar dit is een strijdig stelsel.

(3) : Laat W een simpele S_3-representatie zijn en beschouw de actie van de deelgroep $\langle h \rangle = C_3$. De actie van h kan gediagonalizeerd worden en dus kunnen we W als vectorruimte opsplitsenm in de h-eigenruimten (die uit onze kennis van de representaties van cyclische groepen) enkel als eigenwaarden kunnen hebben $\{1, \rho, \rho^2\}$ met ρ een primitieve derde eenheidswortel.

$$W = W_1 \oplus W_\rho \oplus W_{\rho^2}$$

We gaan nu de actie van g bepalen op elementen uit deze deelruimten. Omdat $hg = gh^2$ hebben we voor elke h-eigenvector $w \in W$ met eigenwaarde λ dat

$$h.(g.w) = (hg).w = (gh^2).w = g.(h^2.w) = g.(\lambda^2 w) = \lambda^2(g.w)$$

Bijgevolg stuurt g een h-eigenvector met eigenwaarde λ naar een eigenvector met eigenwaarde λ^2. Bijgevolg hebben we

$$g.W_1 = W_1 \quad \text{en} \quad g.W_\rho = W_{\rho^2} \quad g.W_{\rho^2} = W_\rho$$

In het bijzonder is W_0 een S_3-deelrepresentatie van W en dus is ofwel

$$W = W_1 \qquad \text{ofwel} \qquad W_1 = 0$$

Veronderstel eerst dat $W = W_1$ en neem $0 \neq w \in W_1$, dan zijn er twee mogelijkheden. (a) Ofwel is $g.w \in \mathbb{C}w$ maar dan moet $g.w = \pm w$ (want $g^2 = e$) en dan is $\mathbb{C}w$ een 1-dimensionale simpele deelrepresentatie isomorf met T of S. En omdat W simpel is moet dus $W = \mathbb{C}w$ en zijn we klaar. Ofwel is $g.w \notin \mathbb{C}w$ maar dan is

$$U = \mathbb{C}w + \mathbb{C}g.w$$

een twee-dimensionale S_3-representatie en omdat w en $g.w$ in W_1 liggen werkt h erop met eigenwaarde 1. U kan ontbomden worden in eigenruimten voor g en wordt

$$U = U_1 \oplus U_{-1}$$

of nog directer kijk naar de vectoren $u_+ = \frac{1}{2}(w + g.w)$ en $u_- = \frac{1}{2}(w - g.w)$ dan spannen die U op en de g-eigenwaarden zijn resp. 1 en -1. Mar dan is U ook als S_3-representatie de directe som van de S_3-representaties U_1 en U_{-1}, maar dit kan niet want we hadden verondersteld dat W simpel was (en dius kan er geen directe som van echte deelrepresentaties erin zitten).

Blijft het geval te onderzoeken dat $W_1 = 0$ en dus dat

$$W = W_\rho \oplus W_{\rho^2}$$

Neem een vector $0 \neq w \in W_\rho$ dan weten we al dat $0 \neq g.w \in W_{\rho^2}$ en dus is geen van beide deelruimten nul. Beschouw nu de deelruimte

$$U = \mathbb{C}w \oplus \mathbb{C}g.w$$

Omdat g en $g.w$ h-eigenvectoren zijn en door g in elkaar worden omgewisseld volgt dat U een S_3-deelrepresentatie is van W. Wegens W simpel moet dus $W = U$. Het oplossen van een vervelend lineair stelsel geeft dan dat $U \simeq V$ met V de twee dimensionale simpele S_3-representatie van hierboven. Opgave 14

Opgave 30. De conjugatie klassen worden gegeven door de verschillende cycle-decomposities en als een permutatie cycle-decompositie heeft

$$1^{e_1}2^{e_2}3^{e_3}\dots$$

(dwz. als de onverkorte Cayley-notatie, die ook alle 1-cycles bevat, juist e_1 cycles van lengte 1, e_2 cycles van lengte 2 enz. heeft), dan is het aantal elementen in de conjugatieklasse gegeven door

$$\frac{n!}{e_1!1^{e_1}e_2!2^{e_2}e_3!3^{e_3}\dots}$$

en dit geeft ons de aantallen van elementen in de 7 verschillende conjugatieklassen. We zijn dus op zoek naar 7 simpele representaties. Enkele ervan kennen we voor alle symmetrische groepen : de **triviale representatie** U en dfe **teken representatie** U'. Verder is er ook steeds de natuurlijke permutatie-representatie W_n voor S_n bestaande uit een n-dimensionale ruimte met basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ waarop een permutatie σ werkty door

$$\sigma.e_i = e_{\sigma(i)}$$

Het karakter $\chi_{W_n}(\sigma)$ is het aantal basis-elementen dat onder de actie van σ op zijn polaats gelaten wordt. Voor S_5 hebben we bijgevolg

	1	10	20	30	24	15	20
S_5	()	(12)	(123)	(1234)	(12345)	(12)(34)	(12)(345)
U	1	1	1	1	1	1	1
W_5	5	3	2	1	0	1	0
V	4	2	1	0	-1	0	-1

Maar W_5 is niet simpel. Eén manier om dit te zien is het inproduct uit te rekenen :

$$(\chi_{W_5}, \chi_{W_5}) = \frac{1}{120}(25 + 90 + 80 + 30 + 15) = 2$$

Een andere is om op te merken dat de deelruimte opgespannen door $v = e_1 + e_2 + \dots + e_5$ invariant gelaten wordt onder de actie en isomorf is met de triviale representatie U (je kan ook nagaan dat het inproduct $(\chi_{W_5}, \chi_U) = 1$). Bijgevolg volgt uit reduceerbaarheid dat

$$W = U \oplus V$$

en het character van V wordt gegeven door het character van U van dat van W_5 af te trekken. We gaan na dat V wel simpel is doormiddel van het inproduct

$$(\chi_V, \chi_V) = \frac{1}{120}(16 + 40 + 20 + 24 + 20) = 1$$

Maar dan is ook $V' = V \otimes U'$ een simpele representatie. Om te beginnen is het een nieuwe representatie want het karakter verschilt van dat van V

	1	10	20	30	24	15	20
S_5	()	(12)	(123)	(1234)	(12345)	(12)(34)	(12)(345)
V	4	2	1	0	-1	0	-1
V'	4	-2	1	0	-1	0	1

en heeft eveneens inproduct gelijk aan 1 dus is simpel. Hoe vinder we nu de resterende simpele? We kunnen gaan kijken naar tensorproducten. Bvb. $V \otimes V$ heeft als karakter

	1	10	20	30	24	15	20
S_5	$()$	(12)	(123)	(1234)	(12345)	$(12)(34)$	$(12)(345)$
$V \otimes V$	16	4	1	0	1	0	1

maar kan onmogelijk simpel zijn want het inproduct levert

$$\frac{1}{120}(256 + 40 + 20 + 24 + 20) = 3$$

Maar dat wisten we al want voor elke G-representatie V geldt dat de decompositie

$$V \otimes V = S^2V \oplus \wedge^2 V$$

in symmetrische en anti-symmetrische tensoren ook een decompositie is als G-representaties. We weten ook dat het karakter van de anti-symmetrische 2-tensoren gegeven wordt door de formule

$$\chi_{\wedge^2 V}(g) = \frac{1}{2}(\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2))$$

en we kunnen voor S_5 gemakkelijk de conjugatieklasse van g^2 bepalen uit g

g	$()$	(12)	(123)	(1234)	(12345)	$(12)(34)$	$(12)(345)$
g^2	$()$	$()$	(132)	$(13)(24)$	(13524)	$()$	(354)
klasse	$()$	$()$	(123)	$(12)(34)$	(12345)	$()$	(123)

wat ons toelaat het karakter van $\wedge^2 V$ te bepalen

	1	10	20	30	24	15	20
S_5	$()$	(12)	(123)	(1234)	(12345)	$(12)(34)$	$(12)(345)$
V	4	2	1	0	-1	0	-1
$\wedge^2 V$	6	0	0	0	1	-2	0

Bvb. het karakter $\chi_{\wedge^2 V}((12)(34))$ wordt bepaalt door

$$\frac{1}{2}(\chi_V((12)(34))^2 - \chi_V(()) = \frac{1}{2}(0^2 - 4) = -2$$

De representatie $\wedge^2 V$ is simpel want het inproduct levert

$$\frac{1}{120}(36 + 24 + 60) = 1$$

Blijven dus twee simpele representaties te vinden met dimensies n_1 en n_2 sie moeten voldoen aan

$$120 = 1^2 + 1^2 + 4^2 + 4^2 + 6^2 + n_1^2 + n_2^2$$

en dus moet

$$n_1^2 + n_2^2 = 50$$

Er zijn twee mogelijkheden, nl. $(1, 7)$ of $(5, 5)$. De eerste mogelijkheid is uitgesloten omdat S_5 juist 2 simpele ééndimensionale representaties moet hebben. De reden hiervoor is dat de simpele groep A_5 de enige normaaldeler is van S_5 en als quotient

$$S_5/A_5 \simeq C_2$$

Abels is van orde twee. Bijgevolg is de commutator-deelgroep $(S_5, S_5) = A_5$ (moet een normaaldeler zijn en kan niet gelijk zijn aan S_5 zelf want iedere map naar een Abelse factorizeert over de Abelianizatie $S_5/(S_5, S_5)$).

Dus de resterende representaties zijn beiden 5-dimensionaal en worden bijgevolg gegeven door een simpele 5-dimensionale representatie W en $W' = W \otimes U'$ (want dit zal een nieuwe representatie blijken te zijn met inproduct gelijk aan 1). We weten nog niet wat de karakters van W zijn maar weten dus dat de volledige karakter-tabel volgende vorm moet hebben

	1	10	20	30	24	15	20
S_5	()	(12)	(123)	(1234)	(12345)	(12)(34)	(12)(345)
U	1	1	1	1	1	1	1
U'	1	-1	1	-1	1	1	-1
V	4	2	1	0	-1	0	-1
V'	4	-2	1	0	-1	0	1
$\wedge^2 V$	6	0	0	0	1	-2	0
W	5	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
W'	5	$-\alpha_1$	α_2	$-\alpha_3$	α_4	α_5	$-\alpha_6$

We gebruiken nu de orthogonaliteits-relaties voor kolommen om de α_i te bepalen. Bvb. het inproduct van de derde kolom met zichzelf levert

$$\frac{120}{20} = 6 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_2^2$$

en bijgevolg is $\alpha_2 = \pm 1$. Het inproduct met de eerste kolom moet nul geven en dat geeft de relatie

$$1 + 1 + 4 + 4 + 5\alpha_2 + 5\alpha_2 = 0$$

en dus moet $\alpha_2 = -1$. Het inproduct van de vijfde kolom met zichzelf moet $\frac{120}{24} = 5$ geven en bijgevolg moet $\alpha_4 = 0$ zijn. Een argumentatie als voor de derde kolom toegepast op de zesde kolom levert dat $\alpha_5 = 1$.

Het inproduct van de tweede kolom met zichzelf geeft dat $\alpha_1 = \pm 1$ dus eventueel met de rol van W en W' om te draaien mogen we onderstellen dat $\alpha_1 = 1$. We hebben bijgevolg al

	1	10	20	30	24	15	20
S_5	()	(12)	(123)	(1234)	(12345)	(12)(34)	(12)(345)
U	1	1	1	1	1	1	1
U'	1	-1	1	-1	1	1	-1
V	4	2	1	0	-1	0	-1
V'	4	-2	1	0	-1	0	1
$\wedge^2 V$	6	0	0	0	1	-2	0
W	5	1	-1	α_3	0	1	α_6
W'	5	-1	-1	$-\alpha_3$	0	1	$-\alpha_6$

De inproducten van de kolommem met zichzelf geeft als voorheen dat $\alpha_3 = \pm 1$ en dat $\alpha_6 = \pm 1$. Om het teken te bepalen berekenen we het inproduct van deze kolommen met de tweede kolom. Voor α_3 levert dit

$$0 = 1 + 1 + \alpha_3 + \alpha_3$$

en dus is $\alpha_3 = -1$. Voor α_6 levert dit

$$0 = 1 + 1 - 2 - 2 + \alpha_6 + \alpha_6$$

en dus $\alpha_6 = 1$. Klaar! Opgave 30

Opgave 31. Als G niet Abels is bnestaan er altijd simpele G-representaties V van dimensie $d \geq 2$. Neem nu een element $g \in G$ van priemorde p en bekijk de deelgroep $H = C_p$ voortgebracht door g. We weten dat alle simpele H-representaties 1-dimensionaal zijn en omdat $Res(V)$ dimensie $d \geq 2$ heeft moet ze dus opsplitsen als H-representatie.

Opgave 31

Opgave 32. Voor elke groep G en elk element $g \in G$ is het aantal elementen in de conjugatieklasse $cong_G(g)$ gelijk aan de index van de centralizator $C_G(g)$ dwz.

$$\#\, cong_G(g) = [G : C_G(g)] = \frac{\#G}{\#C_G(g)}$$

Omdat $[S_n : A_n] = 2$ volgt uit $C_G(g) \not\subset A_n$ dat

$$A_n C_G(g) = S_n$$

Maar dan volgt uit de isomorfie stellingen voor groepen dat

$$\frac{A_n}{C_{A_n}(g)} = \frac{A_n}{A_n \cap C_{S_n}(g)} \simeq \frac{A_n C_{S_n}(g)}{C_{S_n}(g)} = \frac{S_n}{C_{S_n}(g)}$$

en dus bestaat in dat geval de conjugatie klasse van g in A_n uit evenveel elementen als de conjugatieklasse van g in S_n.

Anderzijds, als $C_{S_n}(g) \subset A_n$ dan is

$$\#cong_{A_n}(g) = \#\frac{A_n}{C_{S_n} \cap A_n} = \#\frac{A_n}{C_{S_n}(g)} = \frac{\#A_n}{\#C_{S_n}(g)} = \frac{1}{2}\#\frac{S_n}{C_{S_n}(g)} = \frac{1}{2}\#cong_{S_n}(g)$$

en dus heeft de A_n-conjugatieklasse van g de helft zoveel elementen als de S_n-conjugatie klasse van g. Omdat dit geldt voor alle elementen uit de S_n-conjugatie klasse splits de S_n-conjugatie klasse op in twee delen met hetzelfde aantal elementen. Opgave 32

Opgave 33. De conjugatieklassen van S_5 en hun types zijn gegeven door

$$\begin{cases} () & \\ (12) & 1^3 2^1 \\ (123) & 1^2 3^1 \\ (1234) & 1^1 4^1 \\ (12345) & 5^1 \\ (12)(34) & 1^1 2^2 \\ (12)(345) & 2^1 3^1 \end{cases}$$

Hiervan bestaan enkel de klassen van $()$, (123), $(12)(34)$ en (12345) uit even permutaties. Enkel de klasse (12345) voldoet aan de voorwaarde van voorgaande stelling om te splitsen over A_5 in twee klassen. Bijgevolg heeft A_5 volgende conjugatie klassen en hun aantal elementen

$$\begin{cases} () & 1 \\ (123) & 20 \\ (12)(34) & 15 \\ (12345) & 12 \\ (21345) & 12 \end{cases}$$

Opgave 33

Opgave 34. Onze kennis van de karakter tabel van S_5 laat ons toe de restricties van alle S_5-simpelen te bepalen tot A_5

	1	20	15	12	12
A_5	$()$	(123)	$(12)(34)$	(12345)	(21345)
U	1	1	1	1	1
U'	1	1	1	1	1
V	4	1	0	-1	-1
V'	4	1	0	-1	-1
$\wedge^2 V$	6	0	-2	1	1
W	5	-1	1	0	0
W'	5	-1	1	0	0

Eerst merken we op dat $U \simeq U'$, $V \simeq V'$ en $W \simeq W'$ als A_5-representaties. Verder volgt uit het inproduct met zichzelf dat U, V en W simpele A_5 representaties zijn. Omdat we uit de kennis van het aantal conjugatieklassen weten dat A_5 precies 5 simpele moet hebben, kunnen we de karakter tabel partiëel invullen

	1	20	15	12	12
A_5	$()$	(123)	$(12)(34)$	(12345)	(21345)
U	1	1	1	1	1
V	4	1	0	-1	-1
W	5	-1	1	0	0
Y	n_1	a_1	a_2	a_3	a_4
Z	n_2	b_1	b_2	b_3	b_4

en omdat $60 = 1^2 + 4^2 + 5^2 + n_1^2 + n_2^2$ volgt dat $n_1^2 + n_2^2 = 18$ en dus zijn n_1 en n_2 beiden gelijk aan 3.De inprodukten van de verschillende kolommen met zichzelf levert

$$\begin{cases} ||a_1||^2 + ||b_1||^2 & = 0 \\ ||a_2||^2 + ||b_2||^2 & = 2 \\ ||a_3||^2 + ||b_3||^2 & = 3 \\ ||a_4||^2 + ||b_4||^2 & = 3 \end{cases}$$

en de inproducten met de eerste kolom levert

$$\begin{cases} a_1 + b_1 & = 0 \\ a_2 + b_2 & = -2 \\ a_3 + b_3 & = 1 \\ a_4 + b_4 & = 1 \end{cases}$$

Oplossen levert de gewenste tabel. Opgave 34

Opgave 43. Bekijk de cyclische deelgroep $H = \langle g \rangle \subset G$. De G-representatie V wordt volledig reduceerbaar in 1-dimensionale simpele representaties over H, dus kunnen we de actie van g op V diagonalizeren en voorstellen door een matrix

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{bmatrix}$$

waar $m = dim_{\mathbb{C}}\ V$. Als de orde van g gelijk is aan n dan moeten alle λ_i n-de eenheidswortels zijn. Alle eenheidswortels zijn algebraische getallen over $\mathbb{Z}$ en som en product van algebraische getallen zijn opnieuw algebraisch. Maar dan is

$$\chi_V(g) = \lambda_1 \ldots + \lambda_m$$

inderdaag een algebraisch getal. Opgave 43

Opgave 45. Omdat S niet de triviale representatie is maar toch

$$\chi_S((1,2,3)) = \chi_S(e) = 1$$

weten we al dat de kern van ρ_S gelijk is aan $\langle (1,2,3) \rangle$ en dus een normaaldeler is. Elke andere normaaldeler is de kern van een representatie met karakter

$$\chi = a\chi_T + b\chi_S + c\chi_V$$

met $a + b + 2c \in \{1, 2, 3, 6\}$. Voor elk van deze mogelijkheden kunnen we echter nooit hebben dat

$$\chi(g) = \chi(e) = a + b + 2c$$

voor een $g \neq e$, dus zijn al deze andere kernen de triviale normaaldelers. Opgave 45

Opgave 48. Het volstaat aan te tonen dat $e_h.e_K = e_K.e_h$ voor alle $h \in G$. Nu geldt

$$e_K.e_h = (\sum_{g \in K} e_g).e_h = \sum_{g \in K} e_{gh} = \sum_{g \in K} e_{hh^{-1}gh} = \sum_{g' \in K} e_h.e_{g'} = e_h.e_K$$

Opgave 48