Elementaire Algebraische Meetkunde

lieven le bruyn

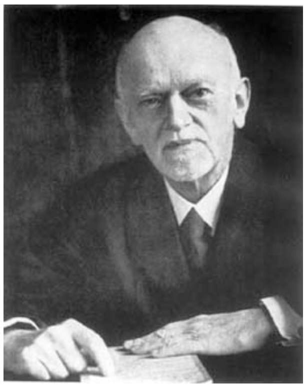
UA : 2006-2007

INHOUDSOPGAVE

periode 1

HILBERT & NOETHER (1890-1930)

David Hilbert werd geboren op 23 januari 1862 in Königsberg (Pruisen) (momenteel Kaliningrad in Rusland) en stierf op 14 februari 1943 op 81 jarige leeftijd in Göttingen (Duitsland).



De **Hilbert Nullstellensatz** die hij in 1893 op 31-jarige leeftijd bewees stelt dat de nulpunten van een stel polynomen het radikaal van het ideaal van deze polynomen vastlegt.

We werken over een *algebraisch gesloten lichaam* $\mathbb{k}$ en zijn geinteresseerd in de oplossingen van een *stelsel polynoom vergelijkingen*

$$I = \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Dat is, we willen de deelverzameling $\mathbb{V}(I)$ van de standaard *affiene ruimte* $\mathbb{A}^n_{\mathbb{k}} = \mathbb{k}^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{k}\}$ bestuderen bestaande uit gemeenschappelijke nulpunten van dit stel polynomen

$$\mathbb{V}(I) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{k}} \ : \ \begin{cases} f_1(a_1, \ldots, a_n) = 0 \\ f_2(a_1, \ldots, a_n) = 0 \\ \vdots \\ f_m(a_1, \ldots, a_n) = 0 \end{cases} \}$$

Merk op dat $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$, de *polynoomring over* $\mathbb{k}$ *in* n *variabelen* en bijgevolg brengen deze elementen een *ideaal* van deze ring voort

$$I = (f_1, \ldots, f_m) = \{g = g_1 f_1 + \ldots + g_m f_m \mid g_i \in \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]\}$$

Het is duidelijk dat wanneer $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{V}(I)$ dat dan ook

$$g(a_1, \ldots, a_n) = 0 \qquad \text{voor elk polynoom } g \in I = (f_1, \ldots, f_m)$$

Dit is de reden waarom we de gemeenschappelijke nulpunten van een stel polynomen noteren met $\mathbb{V}(I)$ waarbij I het ideaal van de polynoomring is voortgebracht door deze polynomen.

Meer algemeen, kunnen we natuurlijk voor elk ideaal $I \lhd \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$ de deelverzameling $\mathbb{V}(I) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{k}} \mid g(a_1, \ldots, a_n) = 0 \; \forall g \in I\}$ definiëren. We noemen zulke deelverzameling een **algebraische deelverzameling van** $\mathbb{A}^n_{\mathbb{k}}$. Een voor de hand liggende vraag is of elke algebraische deelverzameling de gemeenschappelijke nulpunten zijn van een *eindig* stel polynomen. Dit is een gevolg van de **Hilbert basis stelling**.

Omgekeerd, stel dat V en algebraische deelverzameling is van $\mathbb{A}^n_{\mathbb{k}}$, bvb. $V = \mathbb{V}(I)$, dan kunnen we het ideaal bekijken van alle veeltermen in $\mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$ die verdwijnen op V

$$\mathbb{I}(V) = \{f \in \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n] \mid f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \; \forall (a_1, \ldots, a_n) \in V\}$$

Ga na dat $\mathbb{I}(V)$ inderdaad een ideaal is en dat indien $V = \mathbb{V}(I)$ dat we dan hebben dat $I \subset \mathbb{I}(V)$. Natuurlijk vragen we ons direct af : voor welke idealen I geldt dat

$$\mathbb{I}(\mathbb{V}(I)) = I$$

Dit zullen de zgn. *radicale idealen* blijken te zijn. Dit is een gevolg van de **Hilbert Nullstellensatz**.

Teneinde beide stellingen te bewijzen en inzicht te verwerven in het verband tussen algebraische deelverzamelingen van de affiene ruimte $\mathbb{A}^n_{\mathbb{k}}$ enerzijds en idealen van de polynoomring $\mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$ anderzijds dienen we onze kennis van commutatieve ringen wat bij te spijkeren.

Definitie 1 Een commutatieve $\mathbb{k}$-algebra A noemen we **Noethers** indien ieder ideaal $I \lhd A$ eindig voortgebracht is. D.w.z. er bestaan eindig veel elementen $f_1, \ldots, f_m \in I$ zodat

$$I = Af_1 + \ldots + Af_m$$

het ideaal voortgebracht door deze f_i.

Oefening 1 Bewijs dat volgende uitspraken equivalent zijn voor A

1. A is Noethers
2. A voldoet aan de *stijgende keten voorwaarde voor idealen*, d.w.z. dat als

   $$I_1 \subset I_2 \subset \ldots \subset I_k \subset \ldots$$

   een keten van idealen $I_m \lhd A$ is, dan bestaat er een N zodat $I_N = I_{N+1} = \ldots$, dat is, de keten stopt uiteindelijk.
3. Iedere niet-lege verzameling van idealen heeft een maximaal element.

Oefening 2 1. Als A Noethers is en $I \lhd A$ een ideaal, dan is ook de quotient ring $B = A/I$ Noethers.

2. Als A een Noethers *domein* is (dwz. A heeft geen nuldelers en dus heeft A een breuken-lichaam K) en als $S \subset A$ zodanig dat $0 \notin S$, dan is de breuken-ring

   $$B = AS^{-1} = \{\frac{a}{b} \in K \mid a \in A \text{ en } b = 1 \text{ of } b \text{ is een product van elementen in } S\}$$

   opnieuw een Noetherse ring.

Hint : Voor de tweede uitspraak bewijs dat ieder ideaal van AS^{-1} volledig bepaald wordt door zijn doorsnede met A.

Oefening 3 Een domein A noemen we een **hoofdideaal domein** indien ieder ideaal $I \triangleleft A$ voortgebracht is door één element $I = (a)$. Toon direct aan dat een hoofdideaal domein voldoet aan de stijgende keten voorwaarde op idealen.

Stelling 1 (Hilbert basis stelling) *Als A Noethers is, dan is ook de polynoomring*

$$A[x] = \{p = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k \mid k \in \mathbb{N}, a_i \in A\}$$

een Noetherse ring. In het bijzonder is ider ideaal $I \triangleleft \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ van de vorm

$$I = (f_1, \ldots, f_m)$$

voor zekere $f_i \in I$.

Bewijs. Voor een ideaal $J \triangleleft A[x]$ definieer voor iedere $n \in \mathbb{N}$ het ideaal $J_n \triangleleft A$ bestaande uit kopcoefficienten van elementen van graad n van J

$$J_n = \{a \in A \mid a_0 + a_1 x + \ldots + a x^n \in J\}$$

Ga na dat $J_n \triangleleft A$ en dat $J_0 \subset J_1 \subset J_2 \subset \ldots$. Omdat A Noethers is bestaat er een N zodat $J_N = J_{N+1} = \ldots$.

Voor elke $i \leq N$ weten we dat $J_i = (a_{i1}, \ldots, a_{im(i)})$ en uit definitie van J_i is elk van deze voortbrengers de kopcoefficient van een polynoom van graad i, $\{f_{i1}, \ldots, f_{im(i)}\} \subset J$. We beweren dat J eindig voortgebracht is, meer bepaald

$$J = (f_{ij} \mid 0 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq m(i))$$

Neem $g \in J$, veronderstel dat g niet in het ideaal zit voortgebracht door de f_{ij} en laat g van minimale x-graad zijn met deze eigenschap. Laat de hoogste graadsterm van g gelijk zijn aan bx^m dan geldt dat

$$b = \sum_j c_j a_{m'j} \qquad \text{met } m' = m \text{ als } m \leq N \text{ an } m' = N \text{ als } m > N$$

Bekijk nu het element in J

$$g_1 = g - x^{m-m'} \sum_j c_j f_{m'j} \in J$$

dan is de coefficient van g_1 van graad m gelijk aan nul dus heeft g_1 strikt lagere graad dan g. Dus, g_1 is voortgebracht door de f_{ij} maar dan is dit ook het geval voor g. $\square$

Definitie 2 Een commutatieve $\Bbbk$-algebra A noemen we **eindig voortgebracht** indien er eindig veel elementen zijn $\{a_1, \ldots, a_n\}$ die A voortbrenger als $\Bbbk$-algebra.

Oefening 4 Bewijs dat iedere eindig voortgebrachte $\Bbbk$-algebra Noethers is.

Hint : Als A voortgebracht is door $\{a_1, \ldots, a_n\}$ toon aan dat $A \simeq \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]/I$ voor zeker ideaal $I \triangleleft \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$.

Oefening 5 1. Toon aan dat als $I \subset J$ voor twee idealen van $\mathbb{A}^n_{\Bbbk}$ dat dan geldt dat $\mathbb{V}(J) \subset \mathbb{V}(I)$.

2. Toon aan dat voor algebraische deelverzamelingen $V \subset W \subset \mathbb{A}^n_{\Bbbk}$ geldt dat $\mathbb{I}(W) \subset \mathbb{I}(V)$.

Oefening 6 Als V een algebraische verzameling is, dan geldt $V = \mathbb{V}(\mathbb{I}(V))$.

Hint : $V = \mathbb{V}(I_0)$ met $I_0 \subset \mathbb{I}(V)$ en dus $\mathbb{V}(\mathbb{I}(V)) \subset \mathbb{V}(I_0) = V$.

Oefening 7 Geef een voorbeeld van een ideaal $I \triangleleft \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ zodat

$$I \neq \mathbb{I}(\mathbb{V}(I))$$

(Dit probleem zal behandelt worden in de Nullstellensatz.)

Definitie 3 Een ideaal $P \triangleleft A$ van een commutatieve $\Bbbk$-algebra A noemen we een **priemideaal** als voor alle elementen $a, b \in A$ geldt

$$ab \in P \qquad \text{dan} \qquad a \in P \text{ of } b \in P$$

Oefening 8 Toon aan dat P een priemideaal is van A als en slechts dan als de quotient-ring A/P een domein is.

Oefening 9 Als A een eindig voortgebracht domein is, dan is

$$A \simeq \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]/P$$

voor zekere n en met P een priemideaal van $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$.

Definitie 4 Een algebraische deelverzameling $V \subset \mathbb{A}^n_{\Bbbk}$ noemen we **irreduciebel** als V *niet* geschreven kan worden als de unie $V = V_1 \cup V_2$ van twee strict kleinere algebraische verzamelingen $V_1, V_2 \subsetneq V$.

Oefening 10 Wat is de algebraische deelverzameling $V = \mathbb{V}(xy, xz) \subset \mathbb{A}^3_{\Bbbk}$. Toon aan dat deze verzameling niet irreduciebel is en geef voor een schrijfwijze $V = V_1 \cup V_2$ de idealen $\mathbb{I}(V_1)$ en $\mathbb{I}(V_2)$.

Oefening 11 Toon aan dat een algebraische deelverzameling $V \subset \mathbb{A}^n_{\Bbbk}$ irreduciebel is als en slechts als het ideaal van verdwijnende polynomen $\mathbb{I}(V)$ een priemideaal is van $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$.

Hint : Als $V_i \subsetneq V$ dan is er een $f_i \in \mathbb{I}(V_i) - \mathbb{I}(V)$, bekijk $f_1.f_2$. Omgekeerd als $\mathbb{I}(V)$ niet priem is kies elementen $f_1, f_2 \notin \mathbb{I}(V)$ met $f_1.f_2 \in \mathbb{I}(V)$ en bekijk de algebraische deelverzamelingen $V_i = \mathbb{V}(\mathbb{I}(V), f_i)$.

Oefening 12 Toon aan dat $\mathbb{A}^n_{\Bbbk}$ de dalende ketenvoorwaarde heeft op algebraische deelverzamelingen.

Hint : Ga naar de idealen van verdwijnende polynomen en gebruik dat de polynoomring Noethers is.

Oefening 13 Toon aan dat iedere algebraische deelverzameling $V \subset \mathbb{A}^n_{\Bbbk}$ een unieke ontbinding heeft

$$V = V_1 \cup \ldots \cup V_r$$

in **irreduciebele componenten** V_i met V_i niet bevat in V_j als $i \neq j$.

Hint : Uit voorgaande oefening volgt dat iedere niet lege verzameling van algebraische deelverzamelingen van $\mathbb{A}^n_{\Bbbk}$ een minimaal element heeft. Bekijk nu de verzameling van alle algebraische deelverzamelingen van $\mathbb{A}^n_{\Bbbk}$ die geen decompositie in irreduciebelen toelaat, bekijk een minimaal element en krijg een contradictie. Tenslotte, toon de uniciteit aan van de ontbinding.

Definitie 5 Een inclusie van $\Bbbk$-algebras $A \subset B$ noemen we **integraal** als voor iedere $b \in B$ er elementen $a_0, a_1, \ldots, a_n \in A$ zijn (voor een $n \in \mathbb{N}$) zodat

$$a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \ldots + a_n b^n = 0$$

We noemen een integrale uitbreiding **monisch** als voor elke $b \in B$ er $a_i \in A$ bestaan zodat

$$a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \ldots + b^n = 0$$

Een inclusie van $\Bbbk$-algebras $A \subset B$ noemen we **eindig** als er eindig veel elementen $b_1, \ldots, b_m \in B$ bestaan zodanig dat

$$B = Ab_1 + Ab_2 + \ldots + Ab_m$$

Lemma 1 *Als $A \subset B$ eindig is, toon aan dat $A \subset B$ monisch is, en dus ook integraal.*

Bewijs. Stel $B = Ab_1 + \ldots + Ab_m$ en $x \in B$. Dan is ook $xb_i \in B$ en dus bestaan er $a_{ij} \in A$ zodat

$$xb_i = \sum_j a_{ij} b_j$$

Met δ_{ij} de *Kronecker delta* kan dit herschreven worden als

$$\sum_j (x\delta_{ij} - a_{ij}) b_j = 0$$

Neem nu M de $m \times m$ matrix

$$M = (M_{ij})_{i,j} = (x\delta_{ij} - a_{ij})_{i,j}$$

dan hebben we de matrix-vergelijking

$$M. \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Laat nu M^{adj} de *adjunct matrix* van M zijn en Δ de *determinant* van M dan hebben we ook

$$\Delta \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = M^{adj}.M. \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Maar 1_B is een lineaire combinatie van de b_i dus $\Delta = \Delta 1_B = 0$ en dus is

$$det(M) = det \begin{bmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1m} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \ldots & -a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \ldots & x - a_{mm} \end{bmatrix} = 0$$

en dit geeft (door te ontwikkelen) een monische vergelijking van graad m in x met alle coefficienten in A. $\square$

Oefening 14 Als $A \subset B$ een eindige uitbreiding is met B een lichaam, toon aan dat ook A een lichaam is.

Hint : Voor $0 \neq a$ zit $\frac{1}{a} \in B$ en voldoet dus aan een monische vergelijking over A bvb. van graad m. Vermenigvuldig deze met a^{m-1} en besluit dat $a^{-1} \in A$.

Stelling 2 (Noether normalizatie stelling) *Laat $A = \mathbb{k}[a_1, \ldots . a_n]$ een eindig voortgebrachte $\mathbb{k}$-algebra zijn. Dan bestaat er een getal $m \leq n$ en elementen $y_1, \ldots, y_m \in A$ zodanig dat volgende voorwaarden voldaan zijn*

1. *$y_1, \ldots, y_m$ zijn algebraisch onafhankelijk over $\mathbb{k}$, dwz. de polynoomring $\mathbb{k}[y_1, \ldots, y_m]$ is een deelalgebra van A.*
2. *De uitbreiding $\mathbb{k}[y_1, \ldots, y_m] \subset A$ is eindig.*

Bewijs. Laat $0 \neq f$ een element zijn van de I kern van het canonieke epimorfisme

$$\mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n] \twoheadrightarrow \mathbb{k}[a_1, \ldots, a_n] = A$$

Het basisidee van het bewijs is te trachten $x_1, \ldots, x_{n-1}$ te vervangen door $x'_1, \ldots, x'_{n-1}$ zodanig dat f een monische vergelijking voor a_n wordt over $A' = \mathbb{k}[a'_1, \ldots, a'_{n-1}]$. We definiëren daarom

$$\begin{cases} a'_1 & = a_1 - \alpha_1 a_n \\ \vdots & \\ a'_{n-1} & = a_{n-1} - \alpha_{n-1} a_n \end{cases}$$

voor nog te bepalen $\alpha_i \in \mathbb{k}$. Bijgevolg is

$$f(a'_1 + \alpha_1 a_n, \ldots, a'_{n-1} + \alpha_{n-1} a_n, a_n) = 0$$

We beweren nu dat voor goede keuze van $\alpha_i \in \mathbb{k}$ de polynoom

$$f(x'_1 + \alpha_1 x_n, \ldots, x'_{n-1} + \alpha_{n-1} x_n, x_n)$$

monisch is in x_n. Laat de x_n-graad van f gelijk zijn aan d en schrijf

$$f = F_d + G$$

waarbij F_d homogeen is van graad d (alle termen in f bijeen nemen die een factor x_n^d bevatten) en de x_d-graad van G is tenhoogste $d - 1$. Maar dan is

$$f(x'_1 + \alpha_1 x_n, \ldots, x'_{n-1} + \alpha_{n-1} x_n, x_n)$$

$$= F_d(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, 1) x_n^d + \text{termen van lagere } x_d\text{-graad}$$

Voor bijna alle $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ geldt dat $0 \neq F_d(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, 1) \in \mathbb{k}$ (waarom? zie oefening 15) en delen door dit getal bewijst de bewering.

We zijn nu klaar. Immers, als $I = 0$ dan waren de a_i algebraisch onafhankelijk en was er niks te bewijzen. Anders, neem $0 \neq f \in I$ en $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{k}$ zodanig dat f een monische vergelijking geeft voor a_n over $A' = \mathbb{k}[a'_1, \ldots, a'_{n-1}] \subset A$.

Wegens inductie mogen we veronderstellen dat er elementen $y_1, \ldots, y_m \in A'$ zijn met

- $y_1, \ldots, y_m$ algebraisch onafhankelijk over $\mathbb{k}$.
- $\mathbb{k}[y_1, \ldots, y_m] \subset A'$ is een eindige uitbreiding.

Omdat a_n monisch is over A' volgt dat $A' \subset A$ eindig is en bijgevolg is ook de uitbreiding $\mathbb{k}[y_1, \ldots, y_m] \subset A$ eindig (waarom zijn eindige uitbreidingen transitief?) $\square$

Oefening 15 Indien K een oneindig lichaam is en $0 \neq f(x_1, \ldots, x_n) \in K[x_1, \ldots, x_n]$. Toon aan dat er een punt $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n_K$ bestaat zodat $f(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$.

Hint : Gebruik inductie op n. Stel dat f de variabele x_n bevat, schrijf

$$f = \sum_{i=1}^{k} a_i(x_1, \ldots, x_{n-1}) x_n^i$$

en gebruik dat een polynoom in 1 variabele slechts eindig veel nulpunten heeft tenzij alle coefficienten nul zijn.

Oefening 16 Toon aan dat de Noether normalizatie stelling geldt over elk oneindig lichaam K in plaats van $\mathbb{k}$.

Stelling 3 (zwakke Nullstellensatz) *Voor $\mathbb{k}$ een algebraisch gesloten lichaam, zijn alle maximale idealen $\mathfrak{m}$ van de polynoomring $\mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$ van de vorm*

$$\mathfrak{m} = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$$

voor zekere $a_i \in \mathbb{k}$. Bijgevolg is er een bijectie tussen maximale idealen in $\mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$ en punten in $\mathbb{A}^n_{\mathbb{k}}$.

Bewijs. Voor een punt $p = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{k}}$ is het ideaal $\mathfrak{m}_p = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$ de kern van de evaluatie in p-afbeelding

$$\mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n] \twoheadrightarrow \mathbb{k} \qquad f \mapsto f(a_1, \ldots, a_n)$$

en omdat het quotient $\mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{m}_p \simeq \mathbb{k}$ een lichaam is, is $\mathfrak{m}_p$ een maximaal ideaal (waarom?).

Omgekeerd, stel $\mathfrak{m}$ een maximaal ideaal van $\mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$ dan is het quotient

$$B = \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{m}$$

een lichaam dat een eindig voortgebrachte $\mathbb{k}$-algebra is. Uit Noether's normalizatie stelling weten we dat B een deel polynoomalgebra heeft

$$\mathbb{k}[y_1, \ldots, y_m] \subset B$$

waarover B eindig is. Uit oefening 14 volgt dat $\mathbb{k}[y_1, \ldots, y_m]$ een lichaam moet zijn en bijgevolg dat $m = 0$. Bijgevolg is $\mathbb{k} \subset B = \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{m}$ een eindige lichaamsuitbreiding. Maar $\mathbb{k}$ is algebraisch gesloten en bijgevolg

$$\mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{m} \xrightarrow{\phi} \mathbb{k}$$

is een isomorfisme maar dan is

$$\mathfrak{m} = (x_1 - \phi(x_1), \ldots, x_n - \phi(x_n))$$

en zijn we klaar! $\square$

Oefening 17 Wat is de corresponderende zwakke Nullstellensatz voor $K[x_1, \ldots, x_n]$ met K een oneindig lichaam (niet noodzakelijk algebraisch gesloten)?

Definitie 6 Voor een ideaal $I \triangleleft A$ noemen we het **radikaal** van I

$$rad(I) = \{a \in A \mid a^n \in I \text{ voor zekere } n\ \}$$

Een ideaal $I \triangleleft A$ noemen we een **radikaal ideaal** indien $I = rad(I)$.

Oefening 18 Als $I \triangleleft A$ dan is ook $rad(I)$ een ideaal van A.

Hint : Als $a^n, b^m \in I$ schrijf dan de binomiale ontwikkeling van $(a+b)^r$ met $r \geq n+m$.

Oefening 19 Toon aan dat een priemideaal een radikaal ideaal is.

Oefening 20 Laat $f = \prod_{i=1}^{j} f_j^{n_j} \in \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$ een ontbinding zijn van f in irreducie-bele polynomen. Bepaal $rad(f)$.

Stelling 4 (Hilbert Nullstellensatz) *Voor $\mathbb{k}$ een algebraisch gesloten lichaam geldt :*

1. *Als $I \triangleleft \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$ een echt ideaal is, dan is $\mathbb{V}(I) \neq \emptyset$*
2. *Voor ieder ideaal $I \triangleleft \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$ geldt $\mathbb{I}(\mathbb{V}(I)) = rad(I)$*

Bewijs. (1) : Omdat I een echt ideaal is, is I bevat in een maximaal ideaal $\mathfrak{m}$ van $\mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$ maar dat is van de vorm

$$\mathfrak{m} = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$$

maar dan is $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{V}(I)$.

(2) : Laat $I \triangleleft \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$ en $f \in \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$. Neem een nieuwe variabele Y en bekijk het ideaal

$$I_1 = (I, fY - 1) \triangleleft \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n, Y]$$

Als nu $q = (a_1, \ldots, a_n, b) \in \mathbb{V}(I_1) \subset \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbb{k}}$ en $p = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{k}}$, dan geldt

$$\begin{cases} g(a_1, \ldots, a_n) = 0 & \text{voor alle } g \in I \text{, dus } p \in \mathbb{V}(I) \text{ en} \\ f(a_1, \ldots, a_n).b = 1 & \text{en dus } f(p) \neq 0 \end{cases}$$

Veronderstel nu dat $f \in \mathbb{I}(\mathbb{V}(I))$ dwz. $f(p) = 0$ voor alle $p \in \mathbb{V}(I)$ dan volgt uit het voorgaande dat

$$\mathbb{V}(I_1) = \emptyset$$

en dus wegens (1) dat $1 \in I_1$ met andere woorden

$$1 = \sum g_i f_i + g_0(fY - 1)$$

met $f_i \in I$ en $g_j \in \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n, Y]$. Veronderstel dat Y^N de hoogste macht is waarmee Y voorkomt in g_0 of een g_i dan krijgen we door beide leden met f^N te vermenigvuldigen

$$f^N = \sum G_i(x_1, \ldots, x_n, fY) f_i + G_0(x_1, \ldots, x_n, fY)(fY - 1)$$

waar we $f^N g_i$ geschreven hebben als een polynoom G_i in $x_1, \ldots, x_n$ en fY. Dit is een gelijkheid van polynmen in $\mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n, Y]$ en we kunnen dus uitdelen modulo het ideaal $(fY - 1)$ en krijgen een gelijkheid

$$f^N = \sum h_i(x_1, \ldots, x_n) f_i \in \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n, Y]/(fY - 1)$$

Nu hebben we dat $\Bbbk[x_1,\ldots,x_n] \subset \Bbbk[x_1,\ldots,x_n][f^{-1}] = \Bbbk[x_1,\ldots,x_n,Y]/(fY-1)$ en omdat beide leden polynomen zijn in $\Bbbk[x_1,\ldots,x_n]$ hebben we ook in $\Bbbk[x_1,\ldots,x_n]$ de gelijkheid

$$f^N = \sum h_i(x_1,\ldots,x_n)f_i \in I$$

en dus is $f \in rad(I)$. Bijgevolg is $\mathbb{I}(\mathbb{V}(I)) \subset rad(I)$, de omgekeerde inclusie is triviaal. $\square$

Oefening 21 De afbeeldingen $\mathbb{V}$ en $\mathbb{I}$ tussen enerzijds alle idealen $I \triangleleft \Bbbk[x_1,\ldots,x_n]$ en anderzijds alle deelverzamelingen van $\mathbb{A}^n_{\Bbbk}$ geven een bijectie tussen

- radikale idealen en algebraische deelverzamelingen
- priem idealen en irreduciebele algebraische deelverzamelingen

Oefening 22 Als f en g twee verschillende irreduciebele polynomen zijn in $\Bbbk[x_1,\ldots,x_n]$ toon aan dat de **hyper-oppervlakken**

$$\mathbb{V}(f) = \{p \in \mathbb{A}^n_{\Bbbk} \mid f(p) = 0\} \qquad \text{en} \qquad \mathbb{V}(g) = \{p \in \mathbb{A}^n_{\Bbbk} \mid g(p) = 0\}$$

verschillend zijn. Geef een voorbeeld dat dit niet langer het geval is als we $\Bbbk$ vervangen door de reeële getallen $\mathbb{R}$.

Oefening 23 Bekijk in $\mathbb{A}^3_{\Bbbk}$ met polynoomring $\Bbbk[u,v,w]$ de algebraische deelverzameling $\mathbb{V}(I)$ horende bij het ideaal

$$I = (uw - v^2, u^3 - vw)$$

Ga na dat J geen priem ideaal is (kijk naar $w(uw-v^2) - v(u^3-vw)$). Besluit hieruit dat

$$\mathbb{V}(J) = \mathbb{V}(J,u) \cup \mathbb{V}(J, w^2 - u^2v)$$

Toon aan dat $\mathbb{V}(J,u)$ een lijn is in $\mathbb{A}^3_{\Bbbk}$. Toon aan dat de andere component een irreduciebele curve C is in $\mathbb{A}^3_{\Bbbk}$ met

$$C = \mathbb{V}(J, w^2 - u^2v) = \mathbb{V}(uw - v^2, u^3 - vw, w^2 - u^2v)$$

Hint : C is het beeld van de afbeelding $\mathbb{A}^1_{\Bbbk} \longrightarrow \mathbb{A}^3_{\Bbbk}$ die t stuurt naar (t^3,t^4,t^5). Als C niet irreduciebel is $C = V_1 \cup V_2$ neem dat $f_i \in \mathbb{I}(V_i)$ en dan moet voor elke t één van de termen $f_i(t^3,t^4,t^5)$ nul zijn maar polynomen in 1 variabele hebben maar een eindig aantal nulpunten of zijn identiek gelijk aan nul.

Oefening 24 Bekijk $I = (xy, xz, yz) \triangleleft \Bbbk[x,y,z]$. Wat is $\mathbb{V}(I)$? Is $\mathbb{V}(I)$ irreduciebel? Is het waar dat $I = \mathbb{I}(\mathbb{V}(I))$? Toon aan dat I niet voortgebracht is als ideaal door 2 elementen.

Oefening 25 Voor $I' = (xy, (x-y)z)) \triangleleft \Bbbk[x,y,z]$, bepaal $\mathbb{V}(I')$ en $rad(I')$.

Oefening 26 Voor $I = (x^2+y^2-1, y-1) \triangleleft \Bbbk[x,y]$ vind een $f \in \mathbb{I}(\mathbb{V}(I))$ zodat $f \notin I$.

Oefening 27 Voor $I = (x^2+y^2+z^2, xy+xz+yz) \triangleleft \Bbbk[x,y,z]$ bepaal de algebraische deelverzameling $\mathbb{V}(I) \subset \mathbb{A}^3_{\Bbbk}$ en bepaal $\mathbb{I}(\mathbb{V}(I))$.

Oefening 28 Toon aan dat $\Bbbk[x]$ een hoofdideaal domein is. Toon aan dat de algebraische deelverzamelingen van $\mathbb{A}^1_{\Bbbk}$ ofwel eindig veel punten zijn ofwel de lege verzameling ofwel de hele rechte.

Hint : Voor $I \lhd \mathbb{k}[x]$ kijk naar een element $0 \neq f$ met minimale x-graad.

Lemma 2 *Als $f, g \in \mathbb{k}[x, y]$ zonder gemeenschappelijke factor. Dan is de algebraische deelverzameling van het vlak $\mathbb{A}^2_{\mathbb{k}}$*

$$\mathbb{V}(f, g) = \mathbb{V}(f) \cap \mathbb{V}(g)$$

een eindige verzameling punten.

Bewijs. Omdat f en g geen gemeenschappelijke factor hebben in $\mathbb{k}[x][y]$ geldt hetzelfde in $\mathbb{k}(x)[y]$ en omdat $\mathbb{k}(x)[y]$ een hoofideaal domein is (zie vorige oefening) volgt uit $(f, g) = 1$ dat er $R, S \in \mathbb{k}(x)[y]$ met

$$Rf + Sg = 1$$

maar dan bestaat er een $D \in \mathbb{k}[x]$ dat de noemers van R en S verdrijft $RD = A \in \mathbb{k}[x][y]$ en $SD = B \in \mathbb{k}[x][y]$. Bijgevolg hebben we de gelijkheid in $\mathbb{k}[x, y]$

$$Af + Bg = D \in \mathbb{k}[x]$$

Als $p = (a, b) \in \mathbb{V}(f, g)$ dan moet dus $D(a) = 0$ maar D heeft maar eindig veel nulpunten, dus de punten in $\mathbb{V}(f, g)$ hebben maar eindig veel mogelijkheden als x-coordinaat. Omdat hetzelfde argument ook geldt voor de y-coordinaat zijn we klaar. $\square$

Definitie 7 Als $f(x, y) \in \mathbb{k}[x, y]$ een irreduciebel polynoom is dan noemen we de irreduciebele algebraische deelverzameling $\mathbb{V}(f) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{k}}$ een **vlakke curve**.

Oefening 29 Bewijs dat iedere echte algebraische deelverzameling van $\mathbb{A}^2_{\mathbb{k}}$ bestaat uit eindig veel vlakke curven en/of eindig veel punten. Deduceer dat een irreduciebele algebraische deelverzameling één van devolgende is

- De lege verzameling
- Een punt
- Een vlakke curve
- Het volledige vlak

Emmy Amalie Noether werd op 23 maart 1882 geboren in Erlangen (Duitsland) en stierf op 14 april 1935 op 53-jarige leeftijd in Bryn Mawr (USA).

In 1921, op 39-jarige leeftijd publiceert zij haar boek **Idealtheorie in Ringbereichen** dat van fundamentaal belang is in de ontwikkeling van moderne algebra en algebraische meetkunde en dat o.a. de **Noether normalizatie stelling** bevat.

periode 2

KRULL & ZARISKI (1930-1950)

Wolfgang Krull werd geboren op 26 Augustus 1899 in Baden-Baden (Duitsland) en stierf op 12 April 1971 in Bonn (Duitsland) op 71 jarige leeftijd.

Vlak voor de tweede wereldoorlog gaf hij een voordracht in Parijs over algebraische meetkunde waarin hij voorstelde om als punten de priemidealen van een commutatieve ring te nemen met daarop een topologie die we nu als de Zariski topologie kennen. Hij werd weggelachen wegens te algemeen en gaf het idee op. Het zou nog twintig jaar duren vooraleer de Zariski topologie aanvaard werd en nog tien jaar langer vooraleer Grothendieck het priemspectrum zou herontdekken.

Voor Hilbert & Noether was het standaard basislichaam $\mathbb{k}$ het lichaam der complexe getallen $\mathbb{C}$ en dus bezat de affiene ruimte $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ een natuurlijke topologie. Bijgevolg konden ook alle algebraische deelverzamelingen in $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ opgevat worden als topologische ruimten.

Beginnend met het werk van André Weil, vooral geinspireerd op toepassingen in getaltheorie, liet men echter andere algebraisch gesloten basislichamen toe, zoals $\overline{\mathbb{Q}}$, de algebraische sluitingvan de rationale getallen $\mathbb{Q}$ of $\overline{\mathbb{F}}_p$, de algebraische afsluiting van het eindige lichaam $\mathbb{F}_p$, lichamen die geen natuurlijke topologie dragen. Nochtans wilde men algebraische deelverzamelingen van een affiene ruimte $\mathbb{A}^n_{\mathbb{k}}$ over zulk lichaam beschouwen als een meetkundig object en aldus uitrusten met een (vrij zwakke) topologie.

Het basisidee is eenvoudig. Een algebraische deelverzameling van $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ is de nulpunt verzameling van een stel polynomen en is bijgevolg een gesloten deel van $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ in de gewone (analytische) topologie. Zariski's idee was om over andere basislichamen de topologie te definiëren door als gesloten verzamelingen juist de algebraische deelverzamelingen te nemen.

Definitie 8 De algebraische deelverzamelingen $\mathbb{V}(I) \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{k}}$ voor all idealen $I \triangleleft \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$

vormen de gesloten deelverzamelingen van een *topologie* op $\mathbb{A}^n_{\mathbb{k}}$, de **Zariski topologie**. Immers geldt

- $\mathbb{V}(0) = \mathbb{A}^n_{\mathbb{k}}$ en $\mathbb{V}(\mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]) = \emptyset$
- $\mathbb{V}(I_1 \cap I_2) = \mathbb{V}(I_1) \cup \mathbb{V}(I_2)$
- $\mathbb{V}(\sum_i I_i) = \cap_i \mathbb{V}(I_i)$

voor alle idealen $I_i \triangleleft \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$. De open deeelverzamelingen van $\mathbb{A}^n_{\mathbb{k}}$ zijn de complementen van de algebraische deelverzamelingen en uit bovenstaande eigenschappen volgt dat de doorsnede van een eindig aantal opens opnieuw open is en dat de unie van gelijk welke familie opens opnieuw open is.

Oefening 30 Toon aan dat de Zariski topologie op $\mathbb{A}^1_{\mathbb{k}}$ de *cofiniete topologie* is, dwz. de open delen zijn juist de complementen van eindig veel punten. Hieruit volgt dat de Zariski topologie niet noodzakelijk Hausdorff is.

Oefening 31 Wat zijn alle open delen van de Zariski topologie op $\mathbb{A}^2_{\mathbb{k}}$? Toon aan dat uit deze beschrijving onmiddellijk volgt dat deze voldoen aan de eigenschappen van een topologie.

Op iedere algebraische deelverzameling $V \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{k}}$ kunnen we dan een topologie zetten door de *geïnduceerde topologie* te nemen, dwz. gesloten delen van V zijn van de vorm $V \cap \mathbb{V}(J)$ met $J \triangleleft \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$. We willen nu een intrinsieke definitie geven voor deze **Zariski topologie op** V. Hiertoe definiëren we eerst *polynoom functies* op V.

Definitie 9 Laat $V \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{k}}$ een algebraische deelverzameling zijn met corresponderend ideaal $\mathbb{I}(V) \triangleleft \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$. Dan kunnen we de quotient-ring

$$\mathbb{k}[V] = \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]/\mathbb{I}(V)$$

op natuurlijke wijze opvatten als een ring van *functies* op V. Immers, ieder polynoom $f \in \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$ definiëert een **polynoom functie op** V

$$f \;:\; V \longrightarrow \mathbb{k} \qquad \text{door} \qquad P \mapsto f(P)$$

(dit is gewoon de restrictie van de evaluatie-afbeelding van f op $\mathbb{A}^n_{\mathbb{k}}$ tot de deelverzameling V). Twee polynomen $f, g \in \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$ hebben dezelfde restrictie tot V indien

$$f(P) - g(P) = 0 \qquad \text{voor alle } P \in V$$

d.i. $f - g \in \mathbb{I}(V)$. Daarom is de **coordinaat ring** $\mathbb{k}[V]$

$$\mathbb{k}[V] = \{f \;:\; V \longrightarrow \mathbb{k} \mid f \text{ een polynoom functie op } V\} \simeq \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]/\mathbb{I}(V)$$

Dit is de kleinste ring van functies op V die de constante functies (de elementen van $\mathbb{k}$) en de coordinaat functies x_i bevat.

Een algebraische deelverzameling $W \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{k}}$ is bevat in V als en slechts dan als $\mathbb{I}(W) \supset \mathbb{I}(V)$. Anderzijds weten we dat idealen van $\mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$ die $\mathbb{I}(V)$ bevatten in natuurlijke bijectie staan met idealen van de quotient-ring $\mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]/\mathbb{I}(V) = \mathbb{k}[V]$. Bijgevolg hebben de afbeeldingen $\mathbb{I}$ en $\mathbb{V}$ restricties

$$\{\text{idealen } J \triangleleft \mathbb{k}[V]\} \xrightarrow{\mathbb{V}} \{\text{deelverzamelingen } W \subset V\}$$

$$J \mapsto \mathbb{V}(J) = \{P \in V \mid f(P) = 0\,\forall f \in J\}$$

en

$$\{\text{deelverzamelingen } W \subset V\} \xrightarrow{\mathbb{I}} \{\text{idealen } J \triangleleft \Bbbk[V]\}$$
$$W \mapsto \mathbb{I}(W) = \{f \in \Bbbk[V] \mid f(P) = 0\,\forall P \in W\}$$

Deze afbeeldingen hebben analoge eigenschappen als voorheen. Ihb. bepalen de algebraische deelverzamelingen van V een topologie die we de **Zariski topologie op** V noemen en die wegens bovenstaande gelijk is aan de geinduceerde topologie van $\mathbb{A}^n_{\Bbbk}$ tot V. De Zariski topologie is een zeer zwakke topologie, bvb. alle opens van een irreduciebele algebraische deelverzameling zijn dicht!

Lemma 3 *Voor een algebraische deelverzameling $V \subset \mathbb{A}^n_{\Bbbk}$ zijn volgende uitspraken equivalent*

1. *V is irreduciebel*
2. *open deelverzamelingen $\emptyset \neq U_1, U_2 \subset V$ hebben niet-lege doorsnede $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$*
3. *iedere niet-lege open $U \subset V$ is dicht in V, di. $\overline{U} = V$*

Bewijs. V irreduciebel wil zeggen dat V niet de unie is van twee gesloten echte deelverzamelingen. Door het complement te nemen vertaalt dit zich in voorwaarde (2) omdat

$$U_1 \cap U_2 = \emptyset \qquad \text{is equivalent met} \quad (V - U_1) \cup (V - U_2) = V$$

Herinner dat we een deelverzameling van een topologische ruimte *dicht* noemen als de doorsnede met iedere open deelverzameling niet triviaal is, dus (3) is gewoon een herformulering van (2). □

Tot nu toe werd een algebraische deelverzameling V steeds opgevat als een deelverzameling van een zekere affiene ruimte $\mathbb{A}^n_{\Bbbk}$. Een deel V kan echter ingebed zitten in verschillende affiene ruimten en we willen dit uitdrukken als isomorfie van algebraische delen. Hiervoor definiëren we eerst de notie van een *afbeelding* tussen algebraische deelverzamelingen.

Definitie 10 Voor algebraische deelverzamelingen $V \subset \mathbb{A}^n_{\Bbbk}$ en $W \subset \mathbb{A}^m_{\Bbbk}$ is een afbeelding $V \xrightarrow{f} W$ een **polynomiale afbeelding** indien er m polynomen $F_1, \ldots, F_m \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ bestaan (de x_i zijn de coordinaatfuncties op $\mathbb{A}^n_{\Bbbk}$ die voldoen aan

$$f(P) = (F_1(P), \ldots, F_m(P)) \in W \;\text{ voor elk punt } P \in V$$

Dit is de voor de hand liggende veralgemening van de notie van een polynomiale functie.

Oefening 32 Toon aan dat als $V \xrightarrow{f} W$ een polynomiale afbeelding is dat dan de samenstellingen $f_j = y_j \circ f \in \Bbbk[V]$ (waar y_i de coordinaatfuncties zijn op $\mathbb{A}^m_{\Bbbk}$).

Oefening 33 Definieer de notie van *samenstelling* van polynomiale afbeeldingen en toon aan dat dit opnieuw een polynomiale afbeelding is.

Definitie 11 Een polynomiale afbeelding $V \xrightarrow{f} W$ tussen algebraische verzamelingen noemen we een **isomorfisme** indien er een polynomiale afbeelding terug bestaat $W \xrightarrow{g} V$ zodanig dat

$$f \circ g = id_W \qquad \text{en} \qquad g \circ f = id_V$$

Stelling 5 (dualiteits stelling) *Zij $V \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{k}}$ en $W \subset \mathbb{A}^m_{\mathbb{k}}$ algebraische verzamelingen.*

1. *Een polynomiale afbeelding $V \xrightarrow{f} W$ induceert een $\mathbb{k}$-algebra morfisme*

   $$f^* \ : \ \mathbb{k}[W] \longrightarrow \mathbb{k}[V] \quad \text{door samenstelling} \quad g \mapsto f^*(g) = g \circ f$$

   merk op dat de richting van de pijl verandert.

2. *Ieder $\mathbb{k}$-algebra morfisme $\mathbb{k}[W] \xrightarrow{\phi} \mathbb{k}[V]$ is van de vorm $\phi = f^*$ voor een uniek bepaalde polynomiale afbeelding $V \xrightarrow{f} W$.*

3. *als $V \xrightarrow{f} W$ en $W \xrightarrow{g} U$ polynomiale afbeelding zijn dan zijn de $\mathbb{k}$-algebra morfismen*

   $$(g \circ f)^* = f^* \circ g^* \ : \ \mathbb{k}[U] \longrightarrow \mathbb{k}[V]$$

   gelijk.

We kunnen dit samenvatten door te zeggen dat er een bijectie $f \mapsto f^*$ is tussen

$$\{\text{polynomiale afbeeldingen } V \xrightarrow{f} W\} \longrightarrow \{\mathbb{k}\text{-algebra morfismen } \mathbb{k}[W] \xrightarrow{\phi} \mathbb{k}[V]\}$$

en dat een polynomiale afbeelding $V \xrightarrow{f} W$ een isomorfisme is als en slechts dan als het $\mathbb{k}$-algebra morfisme $f^* \ : \ \mathbb{k}[W] \longrightarrow \mathbb{k}[V]$ een isomorfisme is.

Oefening 34 Bewijs deze stelling!

Oefening 35 Bewijs dat de projectie afbeelding

$$\mathbb{V}(y - x^2) \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbb{k}} \qquad (x, y) \mapsto x$$

een isomorfisme is maar dat de projectie

$$\mathbb{V}(y - x^2) \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbb{k}} \qquad (x, y) \mapsto y$$

geen isomorfisme is. Maak ook een tekening en interpreteer.

Oefening 36 Toon aan dat de polynomiale afbeelding

$$\mathbb{A}^1_{\mathbb{k}} \xrightarrow{f} \mathbb{V}(y^2 - x^3) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{k}} \qquad t \mapsto (t^2, t^3)$$

geen isomorfisme is.

Hint : De corresponderende $\mathbb{k}$-algebra map is $\mathbb{k}[x, y]/(y^2 - x^3) \longrightarrow \mathbb{k}[t]$ met $f^*(x) = t^2$ en $f^*(y) = t^3$ en toon aan dat het beeld van f^* niet de hele ring $\mathbb{k}[t]$ is.

Bovenstaande stelling laat ons eindelijk toe een intrinsieke definitie te geven voor het basis-object uit de algebraische meetkunde, de *affiene varieteit*, dat de notie van een irreduciebel algebraische deelverzameling van een $\mathbb{A}^n_{\mathbb{k}}$ moet vatten.

Definitie 12 Een **affiene varieteit** (over een lichaam $\mathbb{k}$) is een verzameling V en een $\mathbb{k}$-algebra $\mathbb{k}[V]$ bestaande uit $\mathbb{k}$-waardige functies $f \ : \ V \longrightarrow \mathbb{k}$ zodanig dat

1. $\mathbb{k}[V]$ is een eindig voortgebrachte $\mathbb{k}$-algebra.

2. Voor een keuze $x_1, \ldots, x_n$ van $\mathbb{k}$-algebra voortbrengers van $\mathbb{k}[V]$ is de afbeelding
$$V \longrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbb{k}} \qquad \text{gedefinieerd door} \qquad P \mapsto (x_1(P), \ldots, x_n(P))$$
injectief met als beeld een irreduciebele algebraische deelverzameling van $\mathbb{A}^n_{\mathbb{k}}$.

Merk op dat verschillende keuzen van voortbrengers, verschillende inbeddingen definiëren, mogelijk zelfs in verschillende affiene ruimten, maar omdat de coordinaat ring van elk van deze beelden isomorf is met $\mathbb{k}[V]$ zijn deze beelden isomorf. Maw. een affiene varieteit definieert een isomorfie klasse van algebraische delverzamelingen.

Oefening 37 Wat zijn de beelden van $\mathbb{A}^1_{\mathbb{k}}$ in $\mathbb{A}^n_{\mathbb{k}}$ als we als voortbrengend stel voor $\mathbb{k}[x] = \mathbb{k}[\mathbb{A}^1_{\mathbb{k}}]$ de verzameling
$$\{x, x^2, x^3, \ldots, x^n\}$$
nemen. Wat zijn de isomorfismen tussen deze verschillende algebraische deelverzamelingen?

Definitie 13 Neem V een affiene varieteit en $0 \neq f \in \mathbb{k}[V]$. Definiëer de open verzameling
$$\mathbb{X}(f) = \mathbb{V} - \mathbb{V}(f) = \{P \in V \mid f(P) \neq 0\}$$
We noemen zulke opens $\mathbb{X}(f)$ de **standaard open verzamelingen** van V.

Oefening 38 Bewijs dat alle standaard open verzamelingen opnieuw affiene varieteiten zijn.

Hint : Toon aan dat $\mathbb{k}[\mathbb{X}(f)] \simeq \mathbb{k}[V][x]/(xf-1)$.

Oefening 39 Toon aan dat de standaard open verzamelingen van V een *basis* voor de Zariski topologie van V vormen. Dwz. ieder open deel in de Zariski topologie van V kan geschreven worden als de unie van opens $\mathbb{X}(f_i)$.

Hint : Ieder gesloten deel is van de vorm $\mathbb{V}(I) = \cap_{f \in I} \mathbb{V}(f)$.

Voor een affiene varieteit V is de coordinaatring $\mathbb{k}[V]$ een domein en heeft bijgevolg een breukenlichaam $\mathbb{k}(V)$ dat we het **functielichaam** van V noemen. Een element $f \in \mathbb{k}(V)$ noemen we een **rationale functie** op V en is van de vorm
$$f = \frac{g}{h} \qquad \text{met } g, h \in \mathbb{k}[V] \text{ en } h \neq 0$$
Merk op dat f geen functie is op heel de varieteit V want is niet goed gedefinieerd op het gesloten deel $\mathbb{V}(h)$. Anderzijds is f wel gedefinieerd in alle punten $P \in V$ zodat $h(P) \neq 0$ dus f is een gedeeltelijk gedefinieerde functie op V.

Definitie 14 Voor een *rationale functie* $f \in \mathbb{k}(V)$ en een punt $P \in V$ zeggen we dat f **regulier** is in P, of dat P behoort tot $dom(f)$,het **domein van definitie** van f, als er een uitdrukking is
$$f = \frac{g}{h}$$
met $g, h \in \mathbb{k}[V]$ en $h(P) \neq 0$. Merk op dat de coordinaatring $\mathbb{k}[V]$ niet noodzakelijk een *uniek factorizatie domein* hoeft te zijn en we dus verschillende voorstellingen van f kunnen hebben.

We noteren het *domein van definitie* van een rationale functie $f \in \mathbb{k}(V)$ met
$$dom(f) = \{P \in V \mid f \text{ is regulier in } P\}$$

en we noteren de **locale ring** van V in P

$$\mathcal{O}_{V,P} = \{f \in \mathbb{k}(V) \mid f \text{ regulier in } P\}$$

Merk op dat $\mathbb{k}[V] \subset \mathcal{O}_{V,P} \subset \mathbb{k}(V)$.

Oefening 40 Geef een voorbeeld van een affiene varieteit zodat $\mathbb{k}[V]$ geen unieke factorizatie toelaat en geef een voorbeeld van een rationale functie $f = \frac{g}{h} \in \mathbb{k}(V)$ waarvan het domein van definitie strikt groter is dan de punten waar h niet nul wordt.

Hint : Bekijk de varieteit $\mathbb{V}(xt - yz) \subset \mathbb{A}^4_{\mathbb{k}}$ en bekijk $f = \frac{x}{y}$.

Oefening 41 Toon aan dat $\mathcal{O}_{V,P}$ inderdaad een locale ring is, dwz. heeft een uniek maximaal ideaal.

Hint : Bekijk de kern van de evaluatie in P afbeelding $\mathcal{O}_{V,P} \longrightarrow \mathbb{k}$ gegeven door $f \mapsto f(P)$.

Stelling 6 *Voor een rationale functie $f \in \mathbb{k}(V)$ geldt :*

1. *$dom(f)$ is open en dicht in de Zariski topologie.*
2. *Polynoom functies zijn reguliere rationale functies, dwz. als $dom(f) = V$ dan is $f \in \mathbb{k}[V]$.*
3. *Voor $h \in \mathbb{k}[V]$ geldt als $\mathbb{X}(h) \subset dom(f)$ dan is $f \in \mathbb{k}[\mathbb{X}(h)] = \mathbb{k}[V][h^{-1}]$.*

Bewijs. Definiëer het *ideaal van noemers* van $f \in \mathbb{k}(V)$ als

$$D_f = \{h \in \mathbb{k}[V] \mid hf \in \mathbb{k}[V]\} \subset \mathbb{k}[V]$$

Dus $h \in D_f$ als ofwel $h = 0$ ofwel f een schrijfwijze $f = \frac{g}{h}$ toelaat. Ga na dat $D_f \triangleleft C[V]$ en dat

$$V - dom(f) = \{P \in V \mid h(P) = 0 \, \forall h \in D_f\} = \mathbb{V}(D_f)$$

Bijgevolg is $V - dom(f)$ een alebraische deelverzameling van V en is bijgevolg $dom(f) = V - \mathbb{V}(D_f)$ open in de Zariski topologie en bijgevolg dicht (want niet-leeg).

Uit de Nullstellensatz volgt dat $dom(f) = V$ equivalent is met $\mathbb{V}(D_f) = \emptyset$ en dit is equivalent met $1 \in D_f$ en dus $f \in \mathbb{k}[V]$.

Tenslotte, $\mathbb{X}(h) \subset dom(f)$ is equivalent met h verdwijnt op $\mathbb{V}(D_f)$ maar dan volgt opnieuw uit de Nullstellensatz dat er een geheel getal n bestaat met

$$h^n \in D_f \qquad \text{en dus} \qquad f = \frac{g}{h^n} \in \mathbb{k}[V][h^{-1}]$$

□

Oefening 42 Toon aan dat iedere rationale functie $f \in \mathbb{k}(\mathbb{A}^2)$ die niet regulier is in $P = (0,0)$ ook niet regulier is in punten van een curve in $\mathbb{A}^2$ door de oorsprong. Deduceer dat het Zariski open deel

$$U = \mathbb{A}^2 - \{(0,0)\}$$

niet affien is.

Hint : Voor het eerste gebruik dat $\mathbb{k}[x,y]$ unieke factorizatie heeft. Stel dat U affien is, dan is de coordinaatring $\mathbb{k}[U]$ de ring van globale reguliere functies en hier dus $\mathbb{k}[x,y]$. Maar dit kan niet wegens de dualiteitsstelling.

Definitie 15 Een **rationale afbeelding** $V \overset{f}{\dashrightarrow} \mathbb{A}^n$ is een partieel gedefinieerde afbeelding gegeven door rationale functies $f_1, \ldots, f_n \in \Bbbk(V)$ dwz.

$$f(P) = (f_1(P), \ldots, f_n(P)) \qquad \text{voor alle } P \in dom(f) = \cap dom(f_i)$$

We zeggen dat f **regulier** is in P als $P \in dom(f)$. Een rationale afbeelding

$$V \dashrightarrow W$$

tussen affiene varieteiten $V \subset \mathbb{A}^n$ en $W \subset \mathbb{A}^m$ is een rationale afbeelding $V \overset{f}{\dashrightarrow} \mathbb{A}^m$ zodanig dat $f(dom(f)) \subset W$.

Merk op dat de samenstelling $g \circ f$ van twee rationale afbeeldingen $V \overset{f}{\dashrightarrow} W$ en $W \overset{g}{\dashrightarrow} U$ niet gedefinieerd hoeft te zijn. Het domein van definitie is

$$dom(f) \cap f^{-1}(dom(g))$$

en dit kan de lege verzameling zijn. Immers, stel dat de rationale afbeelding f gegeven wordt door de rationale functies $f_1, \ldots, f_m \in \Bbbk(V)$

$$V \overset{f}{\dashrightarrow} W \subset \mathbb{A}^m \qquad P \mapsto (f_1(P), \ldots, f_m(P))$$

voor $P \in dom(f) = \cap_i dom(f_i)$. Iedere polynoom functie $g \in \Bbbk[W]$ is van de vorm $g = G \; mod \; \mathbb{I}(W)$ voor een polynoom $G \in \Bbbk[y_1, \ldots, y_m]$ en de samenstelling

$$g \circ f = G(f_1, \ldots, f_m)$$

is goed gedefinieerd op $\Bbbk(V)$. Bijgevolg hebben we een algebra map

$$f^* \; : \; \Bbbk[W] \longrightarrow \Bbbk(V)$$

corresponderend met f. Maar (!), als $h \in \Bbbk[W]$ in de kern van f^* ligt, dan is $f^*(\frac{g}{h})$ niet gedefinieerd en bijgevolg kan f^* niet uitgebreid worden tot een lichaam morfisme $\Bbbk(W) \longrightarrow \Bbbk(V)$.

Oefening 43 Bekijk de polynomiale afbeelding

$$\mathbb{A}^1 \xrightarrow{f} \mathbb{A}^2 \qquad x \mapsto (x, 0)$$

en de rationale afbeelding

$$\mathbb{A}^2 \overset{g}{\dashrightarrow} \mathbb{A}^1 \qquad (x, y) \mapsto \frac{x}{y}$$

Toon aan dat de samenstelling $g \circ f$ nergens gedefinieerd is. Bepaal de maximale deelalgebra van $\Bbbk(\mathbb{A}^1)$ waarop g^* gedefinieerd is.

Om dit probleem te ondervangen voeren we *dominante* rationale afbeeldingen in.

Definitie 16 Een rationale afbeelding $V \overset{f}{\dashrightarrow} W$ noemen we **dominant** indien $f(dom(f))$ dicht is in W in de Zariski topologie.

Oefening 44 Toon aan dat als een rationale afbeelding $V \overset{f}{\dashrightarrow} W$ dominant is we hebben dat

$$f^{-1}(dom(g)) \subset dom(f)$$

een dicht open deel is voor elke rationale afbeelding $W \overset{g}{\dashrightarrow} U$ en dat bijgevolg $g \circ f$ gedefinieerd is op een dicht open deel van V en dus een rationale afbeelding $V \dashrightarrow U$ bepaalt.

Oefening 45 Toon aan dat volgende uitspraken equivalent zijn voor een rationale afbeelding $V \overset{f}{\dashrightarrow} W$

1. f is dominant
2. $f^* : \mathbb{k}[W] \longrightarrow \mathbb{k}(V)$ is injectief

Hint : Merk op dat $g \in Ker(f^*)$ asa $f(dom(f)) \subset \mathbb{V}(g)$ en dus dat f^* niet injectief is asa $f(dom(f))$ bevat is in een strict algebraische deelverzameling van W.

Als f dominant is, is de samenstelling $g \circ f$ steeds een rationale afbeelding waarvan de componenten $f^*(g_i)$ zijn. Het domein van $g \circ f$ bevat $f^{-1}(dom(g)) \cap dom(f)$ maar kan groter zijn.

Oefening 46 Geef een voorbeeld van een rationale afbeelding $g \circ f$ waarvan het domein strict groter is dan $dom(f) \cap f^{-1}(dom(g))$.

Hint : Neem de vlakke curve $C = \mathbb{V}(y^2 - x^3) \subset \mathbb{A}^2$. De parametrizatie afbeelding

$$\mathbb{A}^1 \xrightarrow{f} C \qquad t \mapsto (t^2, t^3)$$

is een polynomiale afbeelding met als rationaal inverse de rationale afbeelding

$$C \overset{g}{\dashrightarrow} \mathbb{A}^1 \qquad (x, y) \mapsto \frac{y}{x}$$

waarvan het domein $dom(g) = C - \{(0, 0)\}$ is.

Stelling 7 *1. Een dominante afbeelding $V \overset{f}{\dashrightarrow} W$ definieert een lichaam morfisme $f^* : \mathbb{k}(W) \longrightarrow \mathbb{k}(V)$.*

2. Omgekeerd, ieder algebra morfisme $\mathbb{k}(W) \longrightarrow \mathbb{k}(V)$ komt van een uniek bepaalde rationale afbeelding $V \dashrightarrow W$.

3. Als f en g beiden dominante rationale afbeeldingen zijn dan geldt $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Bewijs. Oefening! Analoog met het bewijs van de dualiteits stelling. □

Oefening 47 Bekijk de vlakke curve $C = \mathbb{V}(y^3 - x^4 - x^3) \subset \mathbb{A}^1$. Toon aan dat de afbeelding $(x, y) \mapsto \frac{x}{y}$ een rationale afbeelding definieert $C \overset{f}{\dashrightarrow} \mathbb{A}^1$ en dat zijn inverse $\mathbb{A}^1 \xrightarrow{g} C$ een polynomiale afbelding is. Toon aan dat de beperking van g

$$\mathbb{A}^1 - \{P_1, P_2, P_3\} \longrightarrow C - \{(0, 0)\}$$

een isomorfisme van varieteiten is.

In de polynoomring $\mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$ kunnen we *formele partiëel afgeleiden* definieren door de actie op monomen lineair uit te breiden en te eisen dat

$$\frac{\partial}{\partial x_i} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n} = a_i x_1^{a_1} x_1^{a_2} \ldots x_i^{a_i - 1} \ldots x_n^{a_n}$$

Oefening 48 Zij $f \in \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$ een irreduciebel polynoom en $P = (a_1, \ldots, a_n)$ een punt op het *hyper oppervlak* $V = \mathbb{V}(f) \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{k}}$. Definiëer de **raakruimte** aan V in P als de affiene lineaire deelruimte

$$T_P V = \mathbb{V}(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(P)(x_i - a_i)) \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{k}}$$

Toon aan dat deze affiene varieteit isomorf is met $\mathbb{A}^{n-1}_{\mathbb{k}}$ als tenminste één van de $\frac{\partial f}{\partial x_i}(P) \neq 0$ en isomorf is met $\mathbb{A}^n_{\mathbb{k}}$ anders. In het eerste geval noemen we P een **glad punt** van het hyperoppervlak V.

Oefening 49 In de situatie van vorige oefening, laat L een rechte zijn door P in $\mathbb{A}^n_{\mathbb{k}}$ en beperk f tot L. Toon aan dat P een meervoudige wortel is van $f|L$ als en slechts als $L \subset T_P V$.

Hint : Parametrizeer L als de n-tuppels

$$\{(a_1 + b_1 t, \ldots, a_n + b_n t) \ : \ t \in \mathbb{k}\}$$

dan is $f(a_1 + b_1 t, \ldots, a_n + b_n t) = f|L = g(t)$ en dan is 0 een meervoudige wortel van $g(t)$ asa de partieel afgeleide naar t in 0 nul is.

Oefening 50 Toon aan dat voor het hyper-oppervlak $V = \mathbb{V}(f) \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{k}}$ de verzameling van gladde punten een dicht Zariski open deel van V vormt. Dwz. bijna alle punten van V zijn glad.

Hint : Merk op dat de **singuliere punten** van V (dwz. de niet-gladde punten) de affiene varieteit

$$V_{sing} = \mathbb{V}(f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}) \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{k}}$$

vormt.

Definitie 17 Laat $V \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{k}}$ een affiene varieteit zijn en $P = (a_1, \ldots, a_n) \in V$. Definieer voor elke $f \in \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$ de 'eerste orde term' van f in P als

$$f_P^{(1)} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(P)(x_i - a_i)$$

De **raakruimte** aan V in P noemen we de lineaire affiene deelruimte

$$T_P V = \cap_{f \in \mathbb{I}(V)} \mathbb{V}(f_P^{(1)}) \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{k}}$$

Lemma 4 *De functie*

$$V \longrightarrow \mathbb{N} \qquad P \mapsto dim_{\mathbb{k}} \, T_P V$$

is **opper semicontinu** *in de Zariski topologie op* V*. Dwz. voor ieder getal* r *is de deelverzameling*

$$S(r) = \{P \in V \mid dim_{\mathbb{k}} \, T_P V \geq r\} \subset V$$

gesloten in de Zariski topology.

Bewijs. Als $\mathbb{I}(V) = (f_1, \ldots, f_m)$ dan is voor iedere $g \in \mathbb{I}(V)$ de eerste orde term $g_P^{(1)}$ in de vectorruimte opgespannen door de eerste orde termen van de f_i (ga na!). Bijgevolg

$$T_P V = \cap_{i=1}^m \mathbb{V}(f_{i,P}^{(1)}) \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{k}}$$

Maar dan volgt uit lineaire algebra als we de $m \times n$ matrix over $\mathbb{k}$ bekijken

$$S_P = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(P) \end{bmatrix}$$

dat $P \in S(r)$ als en slechts dan als $rank\ S_P \leq n - r$. Maar dit betekent dat alle $(n - r + 1) \times (n - r + 1)$ minoren van S_P moeten verdwijnen. Ieder van deze minoren is een polynomiale functie op V omdat elke van de entries $\partial f_i / \partial x_j$ een polynomiale functie is op V. $\square$

Definitie 18 Bijgevolg bestaat er een getal d en een Zariski open dicht deel $V_{sm} \subset V$ zodanig dat voor alle $P \in V_{sm}$ geldt

$$dim_{\mathbb{k}}\ T_P V = d \qquad \text{en voor alle } P \in V \text{ geldt} \qquad dim_{\mathbb{k}} T_P V \geq d$$

Het getal d noemen we de **dimensie** van de affiene varieteit V en noteren we met $d = dim\ V$. Een punt $P \in V$ noemen we **glad** als $P \in V_{sm}$ en een **singulariteit** anders.

Oefening 51 Toon aan dat de dimensie van een hyper-oppervlak $\mathbb{V}(f) \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{k}}$ gelijk is aan $n - 1$.

Oefening 52 Wat is het verband tussen de dimensie van een affiene varieteit V en de polynoom deelring van $\mathbb{k}[V]$ waarover $\mathbb{k}[V]$ eindig is, gegeven door *Noethers normalizatie stelling*?

Wat is het verband tussen de dimensie van een affiene varieteit V en de *trancendentie graad* van het **breukenlichaam** $\mathbb{k}(V)$ (merk op dat $\mathbb{k}[V] = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]/\mathbb{I}(V)$ met $\mathbb{I}(V)$ een priemideaal en dus is $\mathbb{k}[V]$ een domein en heeft bijgevolg een breukenlichaam)?

We willen nu een interpretatie geven van $T_P V$ die *intrinsiek* is, dwz. enkel in functie van de coordinaatring $\mathbb{k}[V]$ en niet afhankelijk van de gekozen inbedding $V \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{k}}$.

Neem een affiene varieteit $V \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{k}}$ en een punt $P \in V$ dan kunnen we door een lineaire transformatie op $\mathbb{A}^n_{\mathbb{k}}$ toe te passen (of equivalent hiermee, over te gaan op een nieuw stel voortbrengers van $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$) ervoor zorgen dat $P = (0, \dots, 0) \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{k}}$. De kern van de evaluatie map van polynoomfuncties uit $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ in P

$$\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n] \xrightarrow{ev_P} \mathbb{k}$$

is dan het maximale ideaal $M_P = (x_1, \dots, x_n)$. Het corresponderende maximale ideaal van de coordianatring $\mathbb{k}[V]$ is dan gelijk aan

$$\mathfrak{m}_P = M_P / \mathbb{I}(V) \subset \mathbb{k}[V]$$

Stelling 8 (Zariski's raakruimte stelling) *Er bestaat een natuurlijk lineair isomorfisme van $\mathbb{k}$-vectorruimten*

$$(T_P V)^* \simeq \mathfrak{m}_P / \mathfrak{m}_P^2$$

waar $(-)^*$ de duale vectorruimte noteert.

Bewijs. Merk op dat de coordinaatfuncties $\{x_1, \dots, x_n\}$ een basis vormen voor de duale vectorruimte $(\mathbb{k}^n)^*$. Omdat $P = (0, \dots, 0)$ is de eerste orde term $f_P^{(1)} \in (\mathbb{k}^n)^*$ voor elke $f \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$. Definieer nu de afbeelding

$$M_P \xrightarrow{d} (\mathbb{k}^n)^* \qquad f \mapsto df = f_P^{(1)}$$

d is surjectief want de x_i worden gestuurd naar de natuurlijke basis van $(\mathbb{k}^n)^*$. We beweren dat de kern $Ker(d) = M_P^2$. Immers, $f_P^{(1)} = 0$ als en slechts dan als f start met quadratische termen in de x_i, wat op zijn beurt equivalent is met $f \in M_P^2$. Bijgevolg hebben we dat

$$(\mathbb{k}^n)^* \simeq M_P/M_P^2$$

wat de stelling bewijst in het speciale geval dat $V = \mathbb{A}^n_{\mathbb{k}}$.

In het algemeen, de duale afbeelding van de inclusiemap $T_P V \subset \mathbb{k}^n$ is de restrictie afbeelding

$$(\mathbb{k}^n)^* \twoheadrightarrow (T_P V)^*$$

die een lineaire vorm λ op $\mathbb{k}^n$ stuurt naar zijn restrictie tot de deelruimte $T_P V$. Samenstelling geeft een afbeelding

$$D \,:\, M_P \xrightarrow{d} (\mathbb{k}^n)^* \twoheadrightarrow (T_P V)^*$$

die surjectief is (elk van de twee mappen is surjectief). We beweren nu dat de kern van deze afbeelding $Ker(D) = M_P^2 + \mathbb{I}(V)$ waaruit het gestelde volgt vermits

$$\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}^2 = M_P/(M_P^2 + \mathbb{I}(V)) \simeq (T_P V)^*$$

Wat betreft de claim : $f \in Ker(D)$ asa $f_P^{(1)} \mid T_P V = 0$ asa

$$f_P^{(1)} = \sum_{i=1}^m a_i f_{i,P}^{(1)}$$

voor zekere $a_i \in \mathbb{k}$ waarbij $\mathbb{I}(V) = (f_1, \ldots, f_m)$ (want $T_P V$ is de deelvectorruimte waar alle $f_{i,P}^{(1)}$ verdwijnen). Maar dit is equivalent met

$$f - \sum_{i=1}^m a_i f_i \in M_P^2$$

of nog dat $f \in M_P^2 + \mathbb{I}(V)$. Klaar! □

Oefening 53 Toon aan dat als $f \in \mathbb{k}[V]$ met $f(P) \neq 0$ en $\mathbb{X}(f)$ de standaard affiene open deelverzameling van V dat dan de natuurlijke restrictiemap

$$T_P \mathbb{X}(f) \longrightarrow T_P V$$

een isomorfisme is. Bijgevolg bevat de raakruimte enkel lokale informatie over V in de omgeving van P.

Oefening 54 Vind alle singulariteiten van devolgende vlakke curven in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{k}}$.

1. $y^2 = x^3 - x$
2. $y^2 = x^3 - 6x^2 + 9x$
3. $x^2y^2 + x^2 + y^2 + 2xy(x + y + 1) = 0$
4. $x^2 = x^4 + y^4$
5. $xy = x^6 + y^6$
6. $x^3 = y^2 + x^4 + y^4$

7. $x^2y + xy^2 = x^4 + y^4$

Oefening 55 Vind de singulariteiten van devolgende oppervlakken in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{k}}$.

1. $xy^2 = z^2$
2. $x^2 + y^2 = z^2$
3. $xy + x^3 + y^3 = 0$

Oscar Zariski werd geboren op 24 april 1899 in Kobrin (Wit-Rusland) en stierf op 4 juli 1986 in Brookline (USA) op 87 jarige leeftijd.

in 1947, op 48-jarige leeftijd, voerde hij de **Zariski raakruimte** in die toeliet de notie van een glad punt in te voeren voor een algebraische varieteit.

---

periode 3

SERRE & GROTHENDIECK (1950-1970)

Jean-Pierre Serre werd geboren op 15 september 1926 in Bages (Frankrijk)


In 1954, op 28 jarige leeftijd, ontving hij de Fields Medialle voor zijn werk **Faisceaux algébriques cohérents**.

In 1945 had Jean Leray de notie van *(pre)schoven* ingevoerd die essentiëel zou zijn voor de Franse revolutie in algebraische meetkunde in de jaren '50.

Definitie 19 Als X een topologische ruimte is, dan is een **preschoof van algebras** $\mathcal{A}$ een object dat

- Aan ieder open deel $U \subset X$ een algebra $\mathcal{A}(U)$ associeert, de zgn. **secties** van $\mathcal{A}$ over U.
- Aan iedere inclusie van open delen $V \subset U \subset X$ een **restrictie morfisme**

$$\rho_{UV} \; : \; \mathcal{A}(U) \longrightarrow \mathcal{A}(V)$$

  dat een algebra morfisme is.
- Deze restrictiemorfismen voldoet aan de **compatibiliteits voorwaarde** dat wanneer $W \subset V \subset U$ drie open delen zijn van X dat dan het diagram van algebra morfismen

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}(U) \arrow[r, "\rho_{UV}"] \arrow[dr, "\rho_{UW}"'] & \mathcal{A}(V) \arrow[d, "\rho_{VW}"] \\ & \mathcal{A}(W) \end{tikzcd}$$

  commutatief is.

Definitie 20 Een preschoof $\mathcal{A}$ van algebras over een topologische ruime X noemen we een **schoof** indien ze voldoet aan : Voor ieder open deel $U \subset X$, iedere open overdekking $\{U_i; i \in I\}$ van U (d.w.z. alle U_i zijn open delen in U met $\cup_i U_i = U$) en alle verzamelingen secties $\{s_i \in \mathcal{A}(U_i); i \in I\}$ die voldoen aan de eigenschap dat

$$\rho_{U_i,U_i \cap U_j}(s_i) = \rho_{U_j,U_i \cap U_j}(s_j)$$

bestaat er een **unieke** sectie $s \in \mathcal{A}(U)$ zodanig dat voor alle $i \in I$ geldt

$$s_i = \rho_{U,U_i}(s)$$

Maw. compatiebele secties kunnen uniek uitgebreid worden.

Deze noties kwamen op natuurlijke wijze uit analyze en topologie.

Oefening 56 Voor een topologische ruimte X definieer voor ieder open deel

$$\mathcal{C}(U) = \{U \xrightarrow{f} \mathbb{C} \mid f \text{ een continue afbeelding}\}$$

Toon aan dat $\mathcal{C}$ een schoof van algebras is over X, de schoof van *continue functies* (met puntsgewijze optelling en vermenigvuldiging).

Definitie 21 Als V een affiene varieteit is, dan is de **structuurschoof** $\mathcal{O}_V$ van V de schoof van algebras over de Zariski topologie op V met secties voor ieder open deel $U \subset V$

$$\mathcal{O}_V(U) = \{f \in \mathbb{k}(V) \mid f \text{ is regulier in alle punten } P \in U\}$$

en met restrictie afbeeldingen de inclusies in $\mathbb{k}(V)$.

Oefening 57 Toon aan dat de structuurschoof $\mathcal{O}_V$ inderdaad een schoof van algebras is over V.

Oefening 58 Bereken de structuurschoof $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}$ van de affiene rechte $\mathbb{A}^1$.

Hint : Ieder open deel is cofiniet, dus van de vorm $U = \mathbb{A}^1 - \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. Bewijs nu dat $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}(U)$ de localizatie is $\mathbb{k}[x][f^{-1}]$ met $f = (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_k)$ en verifieer alle eigenschappen.

Definitie 22 Als $\mathcal{A}$ een schoof van algebras is over een topologische ruimte X dan noemen we de **globale secties** van $\mathcal{A}$ de algebra $\mathcal{A}(X)$.

Voor $P \in X$, definiëren we de **staak** van $\mathcal{A}$ in P als de directe limiet

$$\mathcal{A}_P = \underset{\rightarrow}{lim}\, \mathcal{A}(U)$$

waar de directe limiet genomen wordt over alle open delen $U \subset X$ die P bevatten. Maw. ieder element $s_P \in \mathcal{A}_P$ is bepaalt door een sectie $s \in \mathcal{A}(U)$ voor U een open omgeving van P en twee secties $s \in \mathcal{A}(U)$ en $s' \in \mathcal{A}(U')$ bepalen hetzelfde element in $\mathcal{A}_P$ als er een open omgeving U" van P is bevat in $U \cap U'$ zodanig dat de restricties van s en s' tot U" hetzelfde zijn.

De staak $\mathcal{C}_P$ van de schoof $\mathcal{C}$ van continue functies of X noemen we soms ook de algebra van **kiemen** van continue functies in P.

Oefening 59 Toon aan dat de globale secties van de structuurschoof van een affiene varieteit V gelijk is aan de coordinaatring $\mathbb{k}[V]$.

Oefening 60 Toon aan dat de staak van de structuurschoof $\mathcal{O}_V$ van een affiene varieteit V in een punt $P \in V$ gelijk is aan $\mathcal{O}_{V,P}$ (zie vorig hoofdstuk).

Schoven laten ons toe meer algemene algebraische varieteiten te definiëren door het *plakken* van affiene structuurschoven. Vooraleer we dit kunnen formalizeren dienen we de noties van *morfisme* en *restrictie* van schoven in te voeren.

Definitie 23 Als $\mathcal{A}$ een schoof van algebras is over X en $\mathcal{B}$ een schoof van algebras over Y, dan is een **schoofmorfisme** $(X, \mathcal{A}) \longrightarrow (Y, \mathcal{B})$ een koppel (ϕ, θ) met

- $\phi \; : \; X \longrightarrow Y$ is een continue afbeelding
- θ definieert voor ieder open deel $U \subset Y$ een algebra morfisme

$$\theta(U) \; : \; \mathcal{B}(U) \longrightarrow \mathcal{A}(\phi^{-1}(U))$$

- Deze morfismen zijn compatiebel met restricties, dwz. als $V \subset U \subset Y$ dan is het diagram van algebra morfismen

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(U) \arrow[r, "\theta(U)"] \arrow[d, "\rho^{\mathcal{B}}_{U,V}"'] & \mathcal{A}(\phi^{-1}(U)) \arrow[d, "\rho^{\mathcal{A}}_{\phi^{-1}(U),\phi^{-1}(V)}"] \\
\mathcal{B}(V) \arrow[r, "\theta(V)"'] & \mathcal{A}(\phi^{-1}(V))
\end{tikzcd}$$

Een **schoofisomorfisme** is een schoofmorfisme dat een inverse heeft, ihb. induceert een schoofisomorfisme een homeomorfisme tussen de onderliggende topologische ruimten en algebra isomorfismen tussen corresponderende secties.

Definitie 24 Als $\mathcal{A}$ een schoof van algebras is over een topologische ruimte X en U een open deel is van X dan noemen we de **schoof restrictie** van $\mathcal{A}$ tot U, en we noteren $\mathcal{A} \mid U$ de schoof van algebras over U die aan ieder open deel $V \subset U \subset X$ de secties

$$(\mathcal{A} \mid U)(V) = \mathcal{A}(V)$$

associeert en ook de restrictiemorfismen overerft van $\mathcal{A}$.

Al dit formalisme heeft volgende definitie tot doel.

Definitie 25 Een **abstracte algebraische varieteit** is een topologische ruimte X met daarop een **structuurschoof** $\mathcal{O}_X$ dat een schoof van algebras is en zodanig dat er een open overdekking $\{U_i\}$ van X is zodanig dat elk van de restricties

$$\mathcal{O}_X \mid U_i \simeq \mathcal{O}_{V_i}$$

isomorf is met de structuurschoof van een affiene varieteit V_i. Maw. de abstracte varieteit X onstaat door affiene varieteiten V_i aan elkaar te plakken over hun doorsneden.

Oefening 61 Toon aan dat de *projectieve rechte* $\mathbb{P}^1_{\Bbbk}$ een abstracte varieteit is die onstaat uit het plakken van twee affiene rechten $\mathbb{A}^1_{\Bbbk}$.

Hint : Herinner dat $\mathbb{P}^1_{\Bbbk}$ de equivalentie-klassen zijn van koppels $(0,0) \neq (x,y) \in \Bbbk^2$ onder de relatie $(x,y) \sim (x',y')$ asa er bestaat een $0 \neq \lambda \in \Bbbk$ met $\lambda(x,y) = (x',y')$. Beschouw nu de open delen $U_1 = \{[x,y] \mid x \neq 0\}$ en $U_2 = \{[x,y] \mid y \neq 0\}$.

Oefening 62 Toon op analoge manier aan dat het *projectieve vlak* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{k}}$ een abstracte varieteit is die ontstaat door drie affiene vlakken $\mathbb{A}^2_{\mathbb{k}}$ te plakken.

Oefening 63 Laat $f(x,y) \in \mathbb{k}[x,y]$ een irreduciebel polynoom zijn. Bewijs dat de *vlakke curve*

$$\mathbb{V}(f) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{k}}$$

een open deel is in een abstracte varieteit, een *projectieve curve* $X \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{k}}$.

Hint : Bekijk de *homogenizatie* van $f(x,y)$ in $\mathbb{k}[x,y,z]$, dwz. voeg aan elk monoom van $f(x,y)$ machten van z toe zodanig dat de graad van elk nieuw monoom constant is.

Een alternatieve manier om de *dualiteits stelling* te formuleren is te zeggen dat er een *anti-equivalentie* bestaat tussen de **categorie** van alle affiene varieteiten met polynoom afbeeldingen als morfismen en anderzijds de categorie van alle eindig voortgebrachte algebras die bovendien priem zijn met algebra maps als morfismen

$$\texttt{affiene varieteiten} \xrightarrow{\mathbb{k}[-]} \texttt{eindig voortgebrachte domeinen}$$

(anti-equivalentie wil zeggen dat de richting van de pijlen omdraait). Natuurlijk zijn er veel meer commutatieve ringen (ze hoeven niet priem te zijn, hoeven niet eindig voortgebracht te zijn en hoeven geen lichaam te bevatten). Grothendieck vroeg zich af wat de meetkundige objecten waren die hetvolgende diagram commutatief zouden maken met de horizontale mappen anti-equivalenties.

$$\begin{tikzcd}
\texttt{affiene varieteiten} \arrow[r, "\mathbb{k}[-]"] \arrow[d, hook] & \texttt{eindig voortgebrachte domeinen} \arrow[d, hook] \\
\texttt{???} \arrow[r] & \texttt{commutatieve ringen}
\end{tikzcd}$$

Definitie 26 Als A een commutatieve ring (met eenheid) is, dan noemen we het **priemspectrum** $\texttt{spec}\ A$ de verzameling van *alle* priem-idealen van A. Op deze verzameling zetten we de **Zariski topologie** die als gesloten delen heeft

$$\mathbb{V}(I) = \{P \in \texttt{spec}\ A \mid I \subset P\}$$

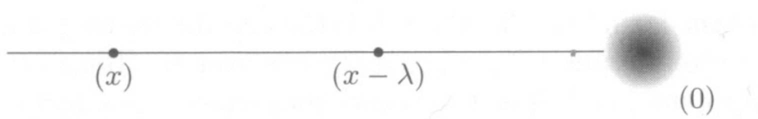
voor ieder ideaal $I \triangleleft A$.

Oefening 64 Toon aan dat $\texttt{spec}\ A$ met de Zariski topologie inderdaad een topologische ruimte is.

In contrast met affiene varieteiten (waar we enkel als punten de **maximale** idealen nemen) laten we in $\texttt{spec}\ \mathbb{k}[V]$ ook alle andere priemidealen toe, dwz. voor ieder irreduciebel algebraisch deel van V voegen we een extra punt toe (dat we dan het **generiek punt** noemen van dit irreduciebel deel).

Oefening 65 Bereken $\texttt{spec}\ \mathbb{k}[x]$ en vergelijk dit met $\mathbb{A}^1$.

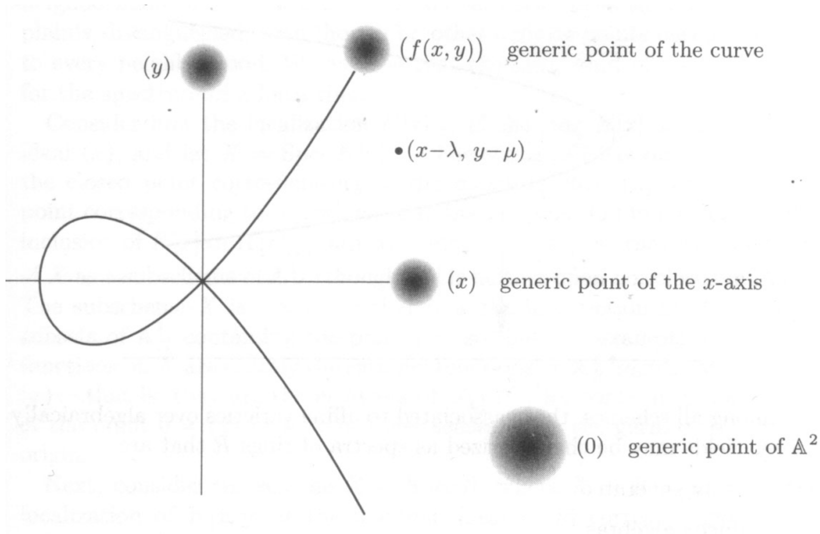
Hint : Er is slechts één extra irreduciebel algebraische deelverzameling (buiten de punten van $\mathbb{A}^1$), dus $\texttt{spec}\ \mathbb{k}[x]$ kunnen we voorstellen als



waar het extra generieke punt correspondeert met het irreduciebel deel $\mathbb{A}^1$ (en dus met het priemideaal $0 \triangleleft \mathbb{k}[x]$.

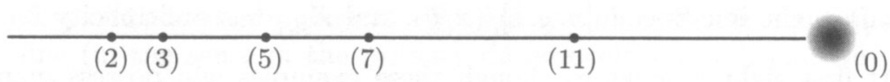
Oefening 66 Bereken $\mathtt{spec}\ \mathbb{k}[x,y]$ en vergelijk dit met $\mathbb{A}^2$.

Hint : We weten dat de irreduciebele algebraische delen van $\mathbb{A}^2$ bestaan uit punten, vlakke curven bepaald door een irreduciebel polynoom en de totale ruimte. Bijgevolg kunnen we $\mathtt{spec}\ \mathbb{k}[x,y]$ voorstellen als



Maar we hoeven ons niet te beperken tot coordinaat ringen van affiene varieteiten.

Oefening 67 Toon aan dat $\mathtt{spec}\ \mathbb{Z}$ als volgt kan voorgesteld worden



Oefening 68 Voor ieder ideaal I van een commutatieve ring A toon aan dat het radicaal van I, $rad(I)$, de doorsnede is van alle priemidealen die I omvatten. Ihb. volgt hieruit

$$\mathbb{V}(I) \subset \mathbb{V}(I) \qquad \text{als en slechts dan als} \qquad rad(I) \subset rad(J)$$

Voor ieder element $a \in A$ definieer de standaard open verzameling

$$\mathbb{X}(f) = \{P \in \mathtt{spec}\ A \mid f \notin P\}$$

Deze opens vormen een basis voor de Zariski topologie op $\mathtt{spec}\ A$ aangezien voor ieder ideaal $I \triangleleft A$ geldt

$$\mathbb{X}(I) = \cup_{a \in I} \mathbb{X}(a)$$

(merk op dat voor zulke a geldt dat $\mathbb{X}(a) \cap \mathbb{V}(I) = \emptyset$).

Stelling 9 *Voor een ringmorfisme $A \xrightarrow{f} B$ geldt :*

1. *Voor ieder priemideaal $Q \triangleleft B$ is $P = \phi^{-1}(Q)$ een priemideaal van A.*

2. *De geinduceerde afbeelding*

$$\texttt{spec}\ B \xrightarrow{F} \texttt{spec}\ A$$

is een continue afbeelding.

Bewijs. Als $a.a' \in \phi^{-1}(Q)$ dan is $\phi(a)\phi(a') \in Q$ en dus bvb. $\phi(a) \in Q$ en dus ook $a \in \phi^{-1}(Q)$. Voor de tweede uitspraak, voor alle $a \in A$ geldt

$$F^{-1}(\mathbb{X}(a)) = \mathbb{X}(f(a))$$

Immers als $f(a) \in Q$ dan geldt $a \in f^{-1}(Q)$ en omdat de open delen $\mathbb{X}(a)$ een basis voor de Zariski topologie vormen zijn we klaar. □

Bovenstaande is de reden waarom we moeten kijken naar alle priem-idealen en niet enkel naar de maximale idealen zoals in het geval van affiene varieteiten. Het is immers niet steeds het geval dat het invers beeld van een maximaal ideaal aximaal blijft.

Oefening 69 Geef een voorbeeld van een rinmorfisme $A \xrightarrow{f} B$ en een maximaal ideaal $\mathfrak{m}$ van B zodat $f^{-1}(\mathfrak{m})$ niet maximaal is in A.

Hint : Bekijk $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ of $\mathbb{k}[x] \subset \mathbb{k}(x)$.

Oefening 70 Voor een ideaal $I \triangleleft A$ toon aan dat $\texttt{spec}\ A/I$ homeomorf is met $\mathbb{V}(I) \subset \texttt{spec}\ A$.

Oefening 71 Als I een **nilpotent** ideaal is van A (dwz. $I^n = 0$ voor zekere n), toon aan dat $\texttt{spec}\ A$ homeomorf is met $\texttt{spec}\ A/I$.

Bijgevolg legt $\texttt{spec}\ A$ de ring A niet volledig vast (vgl. dit met de Nullstellensatz). Om toch een meetkundig object te associëren aan A gaan we een schoof van ringen op $\texttt{spec}\ A$ zetten, de **struktuur schoof** van A.

Als $P \in \texttt{spec}\ A$ dan vormt $A-P$ een **multiplicatief gesloten systeem** (dwz. $a, b \in A-P$ dan ook $ab \in A - P$). Bijgevolg kunnen we de **localizatie** van A aan P definieren als

$$A_P = \{\frac{a}{b} \mid b \in A - P\}$$

Oefening 72 Toon aan dat A_P een **lokale ring** is dwz. A_P heeft een uniek maximaal ideaal nl. PA_P.

Bereken voor elk priemgetal $p \in \texttt{spec}\ \mathbb{Z}$ de lokale ring $\mathbb{Z}_p$. Als $\mathfrak{m}$ een maximaal ideaal is van $\mathbb{k}[V]$ corresponderend met het punt P van de affiene varieteit V, toon aan dat $\mathbb{k}[V]_\mathfrak{m}$ de algebra is van alle rationale functies die regulier zijn in P.

Definitie 27 De **struktuur schoof** $\mathcal{O}_A$ van een commutatieve ring A is de schoof van ringen over het priemspectrum $\texttt{spec}\ A$ met als secties boven elk open deel $U \subset \texttt{spec}\ A$ de verzameling van alle functies

$$s : U \longrightarrow \bigsqcup_{P \in U} A_P$$

zodanig dat $s(P) \in A_P$ voor alle $P \in U$ zodanig dat s lokaal het quotient is van elementen van A. Dus, voor alle $P \in U$ bestaat er een omgeving $P \in V \subset U$ en elementen $a, b \in A$ zodanig dat voor alle $Q \in V$ geldt dat

$$b \notin Q \qquad \text{en} \qquad s(Q) = \frac{a}{b}$$

Som en product van zulke functies zijn opnieuw zulke functies, maw. $\mathcal{O}_A(U)$ is een commutatieve ring met eenheid voor alle opens U en uit de definitie volgt dat $\mathcal{O}_A$ niet enkel een preschoof maar zelfs een schoof is.

Het **affiene schema** van een commutatieve ring A is het koppel $(\mathtt{spec}\ A, \mathcal{O}_A)$ bestaande uit de topologische ruimte $\mathtt{spec}\ A$ met de Zariski topologie en de schoof van ringen $\mathcal{O}_A$.

Stelling 10 *Voor het affiene schema* $(\mathtt{spec}\ A, \mathcal{O}_A)$ *van een commutatieve ring A geldt*

1. *Voor elke* $P \in \mathtt{spec}\ A$ *is de staak* $\mathcal{O}_{A,P}$ *isomorf met de lokale ring* A_P.
2. *Voor elk element* $b \in A$ *zijn de secties* $\mathcal{O}_A(\mathbb{X}(b))$ *isomorf met de lokalizatie* A_b *aan het multiplicatief gesloten deel* $\{1, b, b^2, \ldots\}$.
3. *We verkrijgen de ring A terug uit* $(\mathtt{spec}\ A, \mathcal{O}_A)$ *dmv. globale secties, dwz.* $\mathcal{O}_A(\mathtt{spec} A)$ *is isomorf met A.*

Bewijs. (1) : We hebben een natuurlijk ringmorfisme $\mathcal{O}_{A,P} \xrightarrow{\phi} A_P$ dat iedere locale sectie s stuurt naar $s(P)$. Deze afbeelding is surjectief want ieder element van A_P is van de vorm $\frac{a}{b}$ met $b \notin P$, maar dan definieert $\frac{a}{b}$ een sectie op $\mathbb{X}(b)$. Om te bewijzen dat ϕ injectief is neem secties $s, t \in \mathcal{O}(U)$ zodanig dat $s(P) = t(P)$. Door eventueel U te verfijnen mogen we veronderstellen dat

$$s = \frac{a}{b} \qquad t = \frac{c}{d} \qquad \text{met } a, b, c, d \in A, b, d \notin P$$

Omdat $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ in A_P, is er een $h \notin P$ zodanig dat

$$h(ad - bc) = 0 \qquad \text{in } A$$

Maar dan is ook $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ in elke lokale ring A_Q wanneer $b, d, h \notin Q$. De verzameling waar dit geldt $\mathbb{X}(b) \cap \mathbb{X}(d) \cap \mathbb{X}(h)$ is een open omgeving van P, dus $s = t$ in een open omgeving van P en zijn dus hetzelfde in $\mathcal{O}_{A,P}$.

(2) : Definieer een ringmorfisme $A_b \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}_A(\mathbb{X}(b))$ door $\frac{a}{b^n}$ te sturen naar de sectie $s \in \mathcal{O}(\mathbb{X}(b))$ die aan iedre $P \in \mathbb{X}(b)$ het beeld van $\frac{a}{b^n} \in A_P$ associeert. Om te beginnen is ϕ injectief. Immers, als $\phi(\frac{a}{b^n}) = \phi(\frac{c}{b^m})$ dan geldt voor iedere $P \in \mathbb{X}(b)$ dat $\frac{a}{b^m} = \frac{c}{b^m} \in A_P$ en dus is er een $h \notin P$ met

$$h(b^m a - a^n c) = 0 \qquad \text{in } A$$

Bekijk nu het ideaal, de *annihilator* van $b^m a - b^n c$

$$I = \{x \in A \mid x(b^m a - b^n c) = 0\}$$

dan is $I \not\subset P$ voor alle $P \in \mathbb{X}(b)$. Maar dan is $\mathbb{V}(I) \cap \mathbb{X}(b) = \emptyset$ en bijgevolg is $b \in rad(I)$ en dus is een macht $b^l \in I$. Maar dit wil zeggen dat

$$b^l(b^m a - b^n c) = 0$$

in A en dus moet $\frac{a}{b^n} = \frac{c}{b^m}$ in A_b.

Surjectiviteit van ϕ is moeilijker. Neem $s \in \mathcal{O}_A(\mathbb{X}(b))$ dan kunnen we $\mathbb{X}(b)$ overdekken met opens V_i waarop s geprepresenteerd kan worden als een breuk

$$\frac{a_i}{g_i} \qquad \text{met } g_i \notin P \text{ voor alle } P \in V_i$$

en dus is $V_i \subset \mathbb{X}(g_i)$. Omdat de opens $\mathbb{X}(x)$ een basis vormen voor de topologie mogen we onderstellen dat $V_i = \mathbb{X}(h_i)$ voor zekere h_i. Omdat $\mathbb{X}(h_i) \subset \mathbb{X}(g_i)$ hebben we dat

$\mathbb{V}((h_i)) \supset \mathbb{V}((g_i))$ en dus dat $rad((h_i)) \subset rad((g_i))$ en bijgevolg is $h_i^n \in (g_i)$ voor zekere n. Maar dan is

$$h_i^n = cg_i \qquad \text{en dus ook} \qquad \frac{a_i}{g_i} = \frac{ca_i}{h_i^n}$$

We kunnen nu h_i door h_i^n vervangen (immers, $\mathbb{X}(h_i) = \mathbb{X}(h_i^n)$) en a_i door ca_i en mogen aldus onderstellen dat $\mathbb{X}(b)$ overdekt wordt door opens $\mathbb{X}(h_i)$ en dat s gerepresenteerd wordt door $\frac{a_i}{h_i}$ op $\mathbb{X}(h_i)$.

We beweren dat $\mathbb{X}(b)$ overdekt kan worden door eindig veel van deze $\mathbb{X}(h_i)$. Immers, $\mathbb{X}(b) \subset \cup_i \mathbb{X}(h_i)$ als en slechts als

$$\mathbb{V}((b)) \supset \cap_i \mathbb{V}((h_i)) = \mathbb{V}(\sum_i (h_i))$$

waaruit opnieuw volgt dat $b \in rad(\sum_i (h_i))$ en bijgevolg voor zekere n dat $b^n \in \sum_i (h_i)$. Maar dan zijn er eindig veel van deze h_i en elementen $b_i \in A$ zodat

$$b^n = b_1 h_1 + \ldots + b_r h_r$$

en dus $\mathbb{X}(b) \subset \mathbb{X}(h_1) \cup \ldots \cup \mathbb{X}(h_r)$.

Op $\mathbb{X}(h_i) \cap \mathbb{X}(h_j) = \mathbb{X}(h_i h_j)$ hebben we twee elementen $\frac{a_i}{h_i}$ en $\frac{a_j}{h_j}$ beiden in $A_{h_i h_j}$ die s representeren. Uit de bewezen injectiviteit toegepast op $\mathbb{X}(h_i h_j)$ volgt dat

$$\frac{a_i}{h_i} = \frac{a_j}{h_j} \qquad \text{in } A_{h_i h_j}$$

en dus bestaat er een n zodat

$$(h_i h_j)^n (h_j a_i - h_i a_j) = 0 \qquad \text{in } A$$

Omdat we toch maar eindig veel indices hebben kunnen we een n groot genoeg kiezen zodat die voor alle i, j geldt. We kunnen dan de gelijkheid herschrijven als

$$h_j^{n+1}(h_i^n a_i) - h_i^{n+1}(h_j^n a_j) = 0$$

Vervang nu elke h_i door h_i^{n+1} en elke a_i door $h_i^n a_i$ dan hebben we nog altijd s gerepresenteerd op $\mathbb{X}(h_i)$ door $\frac{a_i}{h_i}$ met bovendien voor alle i, j de gelijkheid

$$h_j a_i = h_i a_j$$

Omdat de $\mathbb{X}(h_i)$ een overdekking zijn van $\mathbb{X}(b)$ kunnen we $b^n = b_1 h_1 + \ldots + b_r h_r$ schrijven voor zekere n en stel $a = \sum_i b_i a_i$. Dan hebben we voor alle j dat

$$h_j a = \sum_i b_i a_i h_j = \sum_i b_i h_i a_j = b^n a_j$$

wat betzelfde is als dat $\frac{a}{b^n} = \frac{a_j}{h_j}$ op $\mathbb{X}(h_j)$. Maar dan is $s = \phi(\frac{a}{b^n})$ overal en is dus ϕ surjectief.

(3) volgt direct uit (2) door $b = 1$ te nemen. □

Oefening 73 Toon aan dat er een natuurlijke bijectie is tussen enerzijds ringmorfismen $A \longrightarrow B$ en anderzijds morfismen van schoven van ringen

$$(\texttt{spec}\ B, \mathcal{O}_B) \longrightarrow (\texttt{spec}\ A, \mathcal{O}_A)$$

Bijgevolg zijn de affiene schemas de door Grothendieck gewenste meetkundige objecten.

Oefening 74 Bepaal de affiene schemas (dwz. de punten en structuurschoven) van

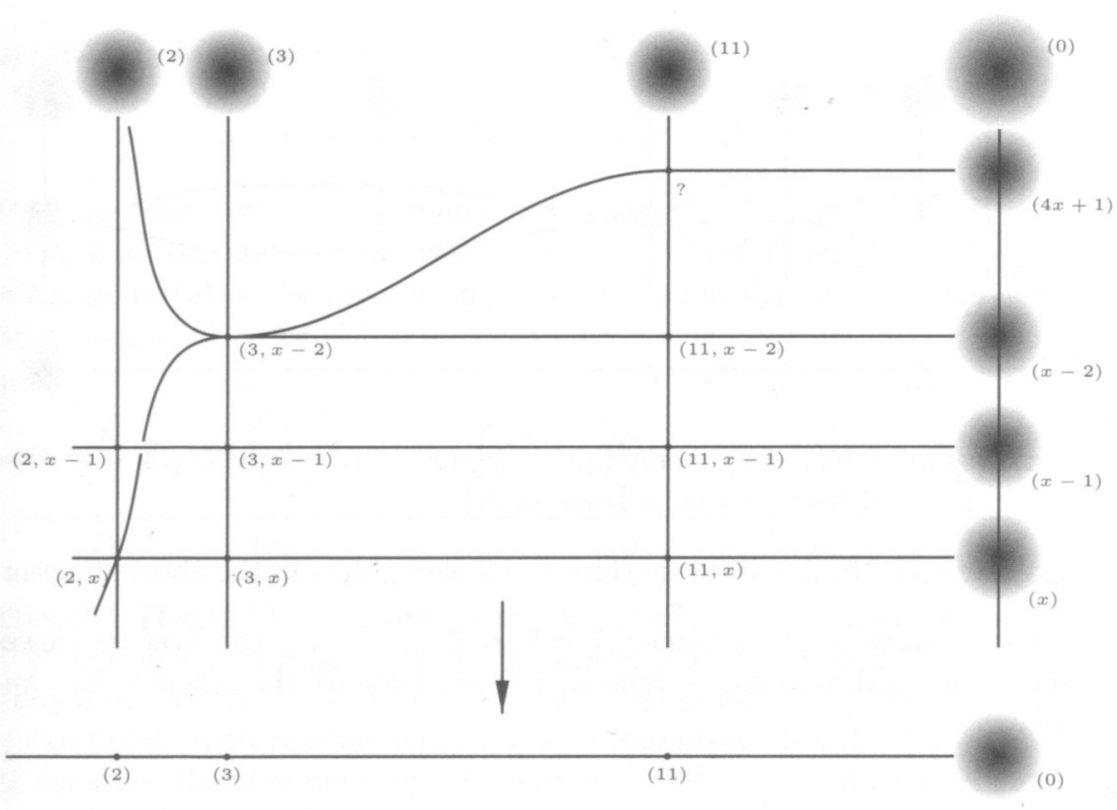
1. $\mathbb{k}[x]/(x^2)$
2. $\mathbb{k}[x]/(x^2 - x)$
3. $\mathbb{k}[x]/(x^3 - x^2)$

Wederom kunen we **algemene schemas** definieren als schoven van ringen over topologische ruimten die lokaal isomorf zijn met affiene schemas.

Oefening 75 Toon aan dat de priemidealen van $\mathbb{Z}[x]$ van devolgende vorm zijn

1. (0)
2. (p) voor een priemgetal p
3. Idealen (f) met $f \in \mathbb{Z}[x]$ een polynoom dat irreduciebel is over $\mathbb{Q}$ en zodat de grootste gemene deler van de coefficienten gelijk is aan 1
4. maximale idealen van de vorm (p, f) met p een priemgetal en $f \in \mathbb{Z}[x]$ een monisch polynoom waarvan de reductie modulo p irreduciebel is

Deduceer hieruit dat de projectie $\mathtt{spec}\ \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathtt{spec}\ \mathbb{Z}$ corresponderend met de inclusie $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[x]$ voorgesteld kan worden als



Wat is het punt corresonderend met het ? in deze tekening?

Alexander Grothendieck werd geboren op 28 Maart 1928 in Berlijn (Duitsland)

In 1966 ontving hij op 38-jarige leeftijd de Fields medaille voor zijn werk in meetkunde, getaltheorie, topologie en complexe analyze. Zijn theorie van schemas zou toelaten de Weil-vermoedens te bewijzen en is ook essentieel in het bewijs van de laatste stelling van Fermat.