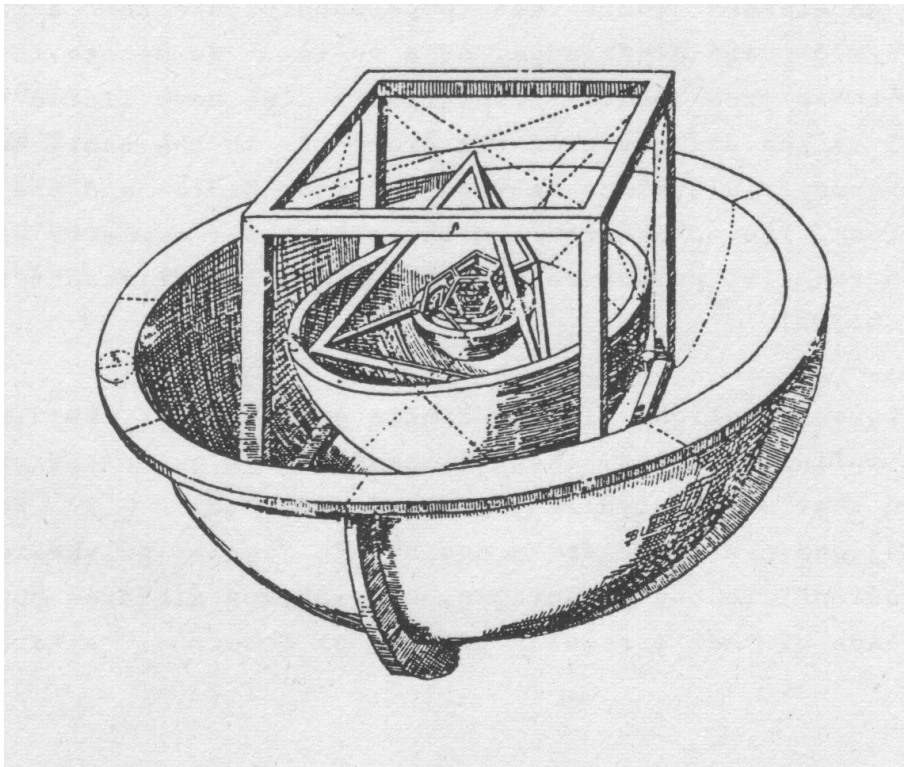


meetkunde 1

lieven le bruyn



2004

universiteit antwerpen

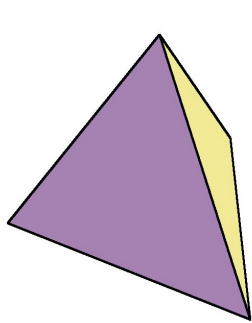
INHOUDSOPGAVE

1. De veelvlakken van Plato	3
2. De groepen van Plato	10
3. De rotatie groep $SO_3(\mathbb{R})$	23
4. Eindige rotatie groepen	32
5. Tellen van orbits	37
6. De klassificatie	46
A. Papier modellen	54
B. GAP	59

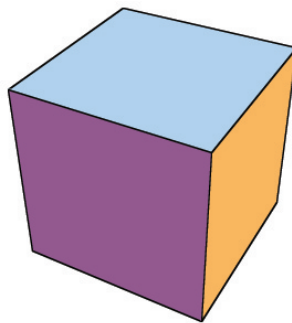
les 1

DE VEELVLAKKEN VAN PLATO

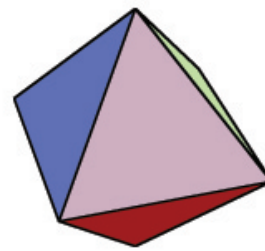
De klassificatie van de *regelmatige veelvlakken* in de 3-dimensionale (reeële) ruimte wordt toegeschreven aan de Griekse wiskundige **Theaetetus (417-369 v.c.)**. Hij bewees dat er precies 5 regelmatige veelvlakken bestaan :



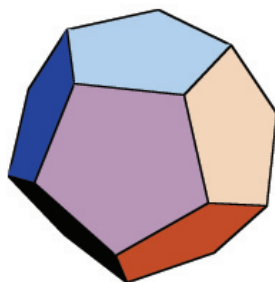
tetraëder



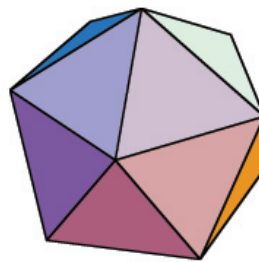
hexaëder



octaëder



dodecaëder



icosaëder

Dit resultaat wordt beschouwd als één van de belangrijkste uit de klassieke wiskunde en men beweert dat de boeken van **Euclides** tot doel hebben de klasificatie van Theaetetus te bewijzen in het finale deel (volume XIII). Wij zullen in deze les een kort bewijs geven.

Regelmatige veelvlakken werden doorheen de geschiedenis met nogal wat mysterie omgeven. Zo gebruikte **Plato (427-347 v.c.)** ze in zijn dialoog 'Timaios' in een po-

ging om de structuur van de materie wiskundig te verklaren. Hij associeerde aan de regelmatige veelvlakken tetraëder, hexaëder, octaëder en icoesaëder respectievelijk de 'elementen' vuur, aarde, lucht en water. Het resterende veelvlak, de dodecaëder, stond model voor het volledige universum.

Duizend jaar na Plato gebruikte **Johannes Kepler** de regelmatige veelvlakken in zijn boek 'Prodomus dissertationum cosmographicarum, continens mysterium cosmographicum de admirabili proportionem orbium caelestium' (Tübingen, 1596) om ons planeten-stelsel te verklaren (zie ook de tekening op het voorblad van deze cursus). Op dat moment waren slechts 6 planeten gekend : Mercurius, Venus, de aarde, Mars, Jupiter en Saturnus die volgens *Copernicus* in cirkelvormige banen rond de zon draaiden. Iedere planeet bepaalde dus een sfeer rond de zon die zijn baan bevat. Kepler observeerde dat tussen twee opeenvolgende zulke sferen met een welbepaald regelmatig veelvlak kon inschrijven zodanig dat de hoekpunten op de buitenste sfeer lagen en de zijvlakken de binnenste sfeer zouden raken (zie tekening). In een goede benadering vond hij

- de octaëder tussen Mercurius en Venus
- de icoesaëder tussen Venus en de aarde
- de dodecaëder tussen de aarde en Mars
- de tetraëder tussen Mars en Jupiter
- de hexaëder tussen Jupiter en Saturnus

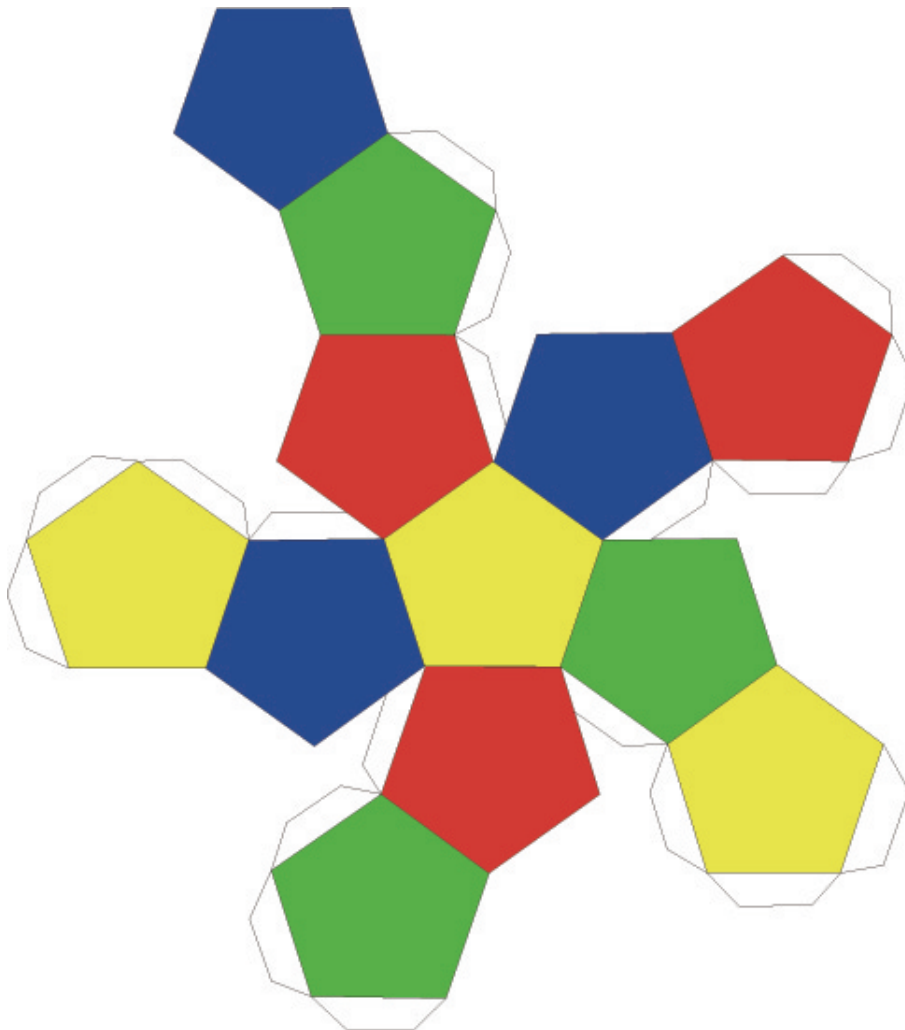
Merk op dat de zevende planeet Uranus pas in 1781 ontdekt werd!

Een *veelvlak* is een gesloten figuur in $\mathbb{R}^3$ waarvan alle *zijvlakken* (of *faces*) vlakke veelhoeken zijn die of disjunct zijn of elkaar raken in een gemeenschappelijke zijde of hoekpunt. We noemen een gesloten veelvlak *regelmatig* indien aan volgende voorwaarden voldaan is :

- Convex, d.w.z. alle hoekpunten niet op een zijvlak liggen allemaal aan dezelfde kant van het vlak in $\mathbb{R}^3$ bepaald door dit zijvlak.
- Elk zijvlak is een regelmatige n -hoek voor vaste n .
- Elk hoekpunt ligt op juist m zijvlakken, m vast.

Ga na dat de bovenstaande vijf veelvlakken inderdaad regelmatig zijn. Voor het vervolg is het nuttig te beschikken over modellen van deze veelvlakken die je kan maken

uit papier-modellen (zie appendix A). Hieronder een papier model voor de dodecaëder.



In de onderstaande tabel geven we voor elk van de veelvlakken het aantal *hoekpunten* V (vertices), *zijden* E (edges), *zijvlakken* F (faces) en de getallen n (vorm van zijvlakken) en m (aantal zijvlakken in een hoekpunt).

polyhedron	n	m	V	E	F
tetraëder	3	3	4	6	4
hexaëder	4	3	8	12	6
octaëder	3	4	6	12	8
dodecaëder	5	3	20	30	12
icosaëder	3	5	12	30	20

We observeren een numeriek verband tussen de getallen V , E en F . Dit geldt algemeen voor alle convexe veelvlakken en staat bekend onder de naam **Euler's formule**.

Merk op dat **Descartes** deze stelling al bewees 100 jaar voor Euler ze in 1752 formuleerde.

Stelling 1.1 Voor ieder convex gesloten veelvlak in $\mathbb{R}^3$ geldt

$$V - E + F = 2$$

waarbij V het aantal hoekpunten is, E het aantal zijden en F het aantal zijvlakken.

Bewijs. Stel het veelvlak voor als een planeet waarvan alle zijden dijken zijn en juist 1 zijvlak een oceaan is. We gaan nu dijken breken tot de hele planeet overstroomd is waarbij we de regel hanteren dat we enkel een dijk doorbreken als dit resulteert in het overstromen van 1 bijkomend zijvlak. Op het einde zullen we $F - 1$ dijken hebben doorbroken. Merk op dat we nog steeds vanuit een vast hoekpunt P naar elk ander hoekpunt kunnen lopen zonder onze voeten nat te maken en dit langs juist 1 pad over de dijken (waarom?). Bijgevolg hebben we een bijectie tussen de overblijvende dijken en de hoekpunten (uitgezonderd P) en dus zijn er nog $V - 1$ dijken intact. Bijgevolg hebben we

$$\underbrace{E}_{\text{totaal}} = \underbrace{F - 1}_{\text{doorbroken}} + \underbrace{V - 1}_{\text{intact}}$$

en zijn we klaar. $\square$

Stelling 1.2 (Theatetus) Er bestaan juist 5 regelmatige veelvlakken in $\mathbb{R}^3$: de tetraëder, hexaëder, octaëder, dodecaëder en icoesaëder.

Bewijs. Om te beginnen merken we op dat het aantal zijvlakken $m > 2$ en dat elk zijvlak een regelmatige n -hoek is met $n > 2$. Iedere zijde ligt op juist 2 zijvlakken en bevat juist 2 hoekpunten. Bijgevolg zijn de getallen nF en mV gelijk aan tweemaal het aantal zijden, dus

$$mV = 2E = nF$$

Substitueren in de Euler formule geeft :

$$\begin{aligned} 2 &= V - E + F \\ &= V - \frac{mV}{2} + \frac{mV}{n} \\ &= (2n + 2m - mn) \frac{V}{2n} \\ &= (4 - (n - 2)(m - 2)) \frac{V}{2n} \end{aligned}$$

Bijgevolg kunnen we V , E en F bepalen in termen van m en n

$$V = \frac{4n}{2n + 2m - mn} \quad E = \frac{mV}{2} \quad F = \frac{mV}{n}$$

en hebben we de belangrijke ongelijkheid

$$(m - 2)(n - 2) < 4$$

en aangezien m en n groter dan 2 zijn levert dit enkel de 5 mogelijkheden

$$(m, n) \in \{(3, 3), (3, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 3)\}$$

die juist corresponderen met de gewenste veelvlakken.

De eis dat in ieder hoekpunt er juist m regelmatige veelhoeken samenkomen bepaalt de *binnenhoek* van het convexe veelvlak in dat punt en bijgevolg bepaalt ieder (m, n) koppel tenhoogste 1 regelmatig veelvlak.

Eigenlijk moeten we nog nagaan dat de veelvlakken van Plato inderdaad regelmatig zijn en als we de procedure van aaneenplakken van zijvlakken doorvoeren we niet eindigen met een klein maar verwaarloosbaar verschil. De beste maniet om hiervan zeker ze zijn is de *coördinaten* van de hoekpunten te geven en het aan de twijfelaar over te laten om na te gaan dat alle zijvlakken inderdaag regelmatige veelhoeken zijn. Een mogelijke lijst hoekpunten in $\mathbb{R}^3$ wordt gegeven in onderstaande tabel. Hierin is ϕ de *gouden snede*

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Hoe zou je nagaan dat alle zijvlakken regelmatige n -hoeken zijn? Gebruik de *afstandsfunctie* in $\mathbb{R}^3$

$$d((x, y, z), (x', y', z')) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

□

polyhedron	hoekpunten
tetraëder	$(1, 1, 1), (1, -1, -1), (-1, -1, 1), (-1, 1, -1)$
hexaëder	$(1, 1, 1), (1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1),$ $(1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1), (-1, -1, -1)$
octaëder	$(1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0),$ $(-1, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 0, -1)$
dodecaëder	$(0, \pm\phi^{-1}, \pm\phi), (\pm\phi^{-1}, \pm\phi, 0)$ $(\pm\phi, 0, \pm\phi^{-1}), (\pm 1, \pm 1, \pm 1)$
icosaëder	$(1, 0, \phi), (1, 0, -\phi), (-1, 0, \phi), (-1, 0, -\phi),$ $(0, \phi, 1), (0, \phi, -1), (0, -\phi, 1), (0, -\phi, -1),$ $(\phi, 1, 0), (\phi, -1, 0), (-\phi, 1, 0), (-\phi, -1, 0)$

Het *duale veelvlak* van een regelmatig veelvlak is het veelvlak met als hoekpunten de *centra* van de regelmatige zijvlakken en twee centra zijn verbonden met een zijde juist dan als de corresponderende zijvlakken een gemeenschappelijke zijde hebben.

Bijgevolg zijn de numerieke invarianten : aantal hoekpunten V^* , zijden E^* en zijvlakken F^* van het duale veelvlak gegeven in functie van deze van het oorspronkelijke veelvlak

$$V^* = F \quad E^* = E \quad F^* = V$$

We merken op dat het duale veelvlak van een regelmatig veelvlak opnieuw regelmatig is en dat de volgende veelvlakken in dualiteit met elkaar staan :

$$\text{tetraëder} \iff \text{tetraëder}$$

$$\text{hexaëder} \iff \text{octaëder}$$

$$\text{dodecaëder} \iff \text{icosaëder}$$

Alternatief kan je dit ook aantonen aan de hand van de coördinaten. Merk op dat als $P_1, \dots, P_n$ de hoekpunten zijn van een regelmatige n -hoek in $\mathbb{R}^3$ dan wordt het centrum bepaald door het punt

$$P = \frac{1}{n}(P_1 + P_2 + \dots + P_n)$$

en pas dit toe op bovenstaande tabel van coördinaten.

Theaetetus van Athene (417-367 v.c.)



Het weinige dat men weet over het leven van Theaetetus komt uit de geschriften van Plato. Plato schreef twee dialogen waarin Theaetetus het hoofdpersonage is : *Theaetetus* en *Sophist*. Theaetetus bewees dat verscheidene wortels $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots, \sqrt{17}$ *irrationale getallen* zijn.

Verder bestudeerde hij het octaëder en icoesaëder. Van de vijf zgn. veelvlakken van Plato waren eigenlijk al 3 gekend dankzij de *Pythagoreeërs* (de kubus, tetraëder en dodecaëder) en de overige twee (octaëder en icoesaëder) werden ontdekt door Theaetetus).

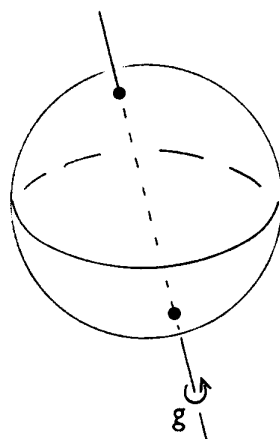
De afbeelding is een detail van het fresco *De school van Athene* van Raphael. Meer informatie over Theaetetus kan je vinden op :

[http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~ history/Mathematicians/Theaetetus.html](http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Theaetetus.html)

les 2

DE GROEPEN VAN PLATO

Een *rotatie* in $\mathbb{R}^3$ is gegeven door een *rotatie-as* A , d.i. een rechte in $\mathbb{R}^3$, en een *rotatie-hoek* ϕ .



In de volgende les zullen we rotaties beschrijven met behulp van *matrices* en aantonen dat de samenstelling van twee rotaties opnieuw een rotatie is.

Vandaag bekijken we rotaties meetkundig en trachten we voor ieder van de regelmatige veelvlakken van Plato te bepalen welke rotaties de figuur in zichzelf transformeren. Met andere woorden, we willen de *rotatie symmetrie groep* bepalen van een Plato veelvlak.

Een *groep* G is een verzameling met een bewerking

$$G \times G \longrightarrow G \quad (g, h) \mapsto g.h$$

die voldoet aan de volgende voorwaarden

- (neutraal element) : Er bestaat een $e \in G$ zodat $g.e = e.g = g$ voor alle $g \in G$.
- (invers element) : Voor elke $g \in G$ bestaat er een $h \in G$ met $g.h = e = h.g$. We noteren $h = g^{-1}$.

- (associativiteit) : Voor alle $g, g', g'' \in G$ geldt $(g \cdot g') \cdot g'' = g \cdot (g' \cdot g'')$.

Een groep G is *eindig* als G eindig veel elementen heeft. Het aantal elementen $|G|$ noemen we dan de *orde* van G .

Een groep G is *commutatief* (of **Abels**) als voor alle $g, h \in G$ geldt dat $g \cdot h = h \cdot g$.

Voorbeeld 2.1 (Zie ook de cursus 'Algebra' voor meer details) De *symmetrische groep* S_n waarvan de elementen alle bijecties zijn van

$$[n] = \{1, 2, \dots, n\}$$

en met de samenstelling als groepsbewerking is een eindige groep van orde $n!$.

Bewijs. Iedere bijectie $\sigma : [n] \rightarrow [n]$ kunnen we voorstellen als een *permutatie*

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{bmatrix}$$

en de samenstelling van twee bijecties (permutaties) is opnieuw een bijectie (permutatie)

$$\begin{aligned} \sigma \circ \tau &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(\tau(1)) & \sigma(\tau(2)) & \dots & \sigma(\tau(n)) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Het eenheidselement e is dus de *identiteits map*

$$e = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix}$$

en het invers element van een bijectie (permutatie) σ is de *inverse map* σ^{-1}

$$\sigma^{-1} = \text{orden} \begin{bmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix}$$

waarbij we met *orden* aangeven dat we de kolommen ordenen in stijgende volgorde van het eerste element. Dus b.v.b. als

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

dan is

$$\sigma^{-1} = \text{orden} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Omdat de samenstelling van bijecties associatief is, zijn alle groeps wetten voldaan en is S_n dus een groep. De *orde* van S_n is het aantal bijecties $\sigma : [n] \rightarrow [n]$ en $\sigma(1)$ kan je kiezen uit n elementen $[n]$, $\sigma(2)$ nog uit $n - 1$ elementen $[n] - \{\sigma(1)\}$, $\sigma(3)$ nog uit $n - 2$ elementen $[n] - \{\sigma(1), \sigma(2)\}$ enz. Bijgevolg is

$$|S_n| = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$$

Tenslotte merken we nog op dat je elke permutatie $\sigma \in S_n$ ook in *cykel-notatie* kan voorstellen

$$\sigma = (a_1, a_2, \dots, a_{i_1})(b_1, b_2, \dots, b_{i_2}) \dots (x_1, x_2, \dots, x_{i_x})$$

waarbij we bedoelen dat

$$\sigma(a_1) = a_2, \sigma(a_2) = a_3, \dots, \sigma(a_{i_1}) = a_1; \sigma(b_1) = b_2, \dots, \sigma(b_{i_2}) = b_1, \dots$$

Bus b.v.b. als

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 6 & 7 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

dan is de cykel-voorstelling van σ gelijk aan

$$\sigma = (1, 8, 2)(3, 6, 5)(4, 7)$$

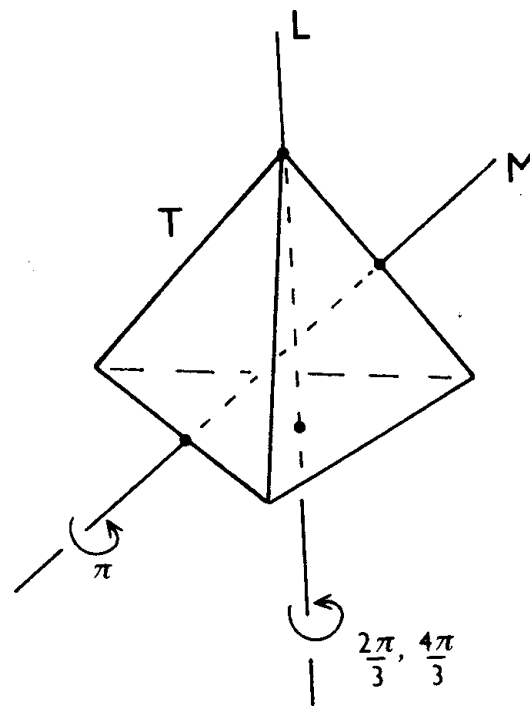
Het voordeel van deze notatie is dat ze niet alleen korter is maar dat je ook makkelijk het inverse element σ^{-1} kan bepalen door gewoon de orde van elke cykel om te keren. In het voorbeeld is $\sigma^{-1} = (2, 8, 1)(5, 6, 3)(7, 4)$. $\square$

Stelling 2.2 Zij $V \subset \mathbb{R}^3$ een veelvlak met n hoekpunten, dan is de rotatie-symmetrie groep van V

$$R(V) = \{r \text{ rotatie van } \mathbb{R}^3 : r(V) = V\}$$

een deelgroep van S_n en is dus i.h.b. eindig!

Bewijs. Iedere rotatie r die V naar zichzelf stuurt zal een hoekpunt van V naar een hoekpunt van V sturen en dus kunnen we r voorstellen als een permutatie op n letters. Deze afbeelding is injectief want de enige rotatie die alle hoekpunten van een veelvlak naar zichzelf stuurt is de identiteit. $\square$



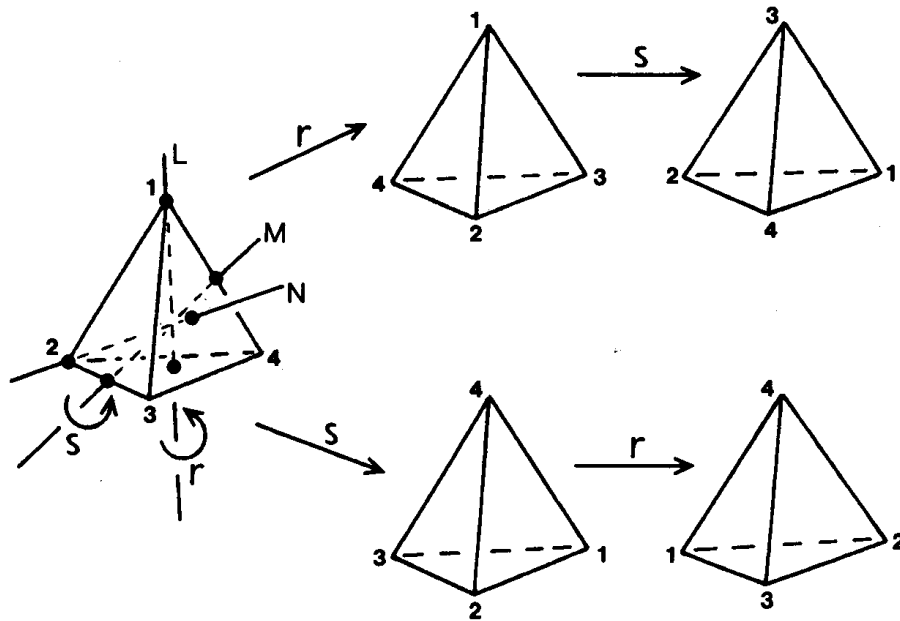
Iedere zijde van een tetraëder T heeft een unieke *tegenoverliggende* zijde (waarvan de richtingen loodrecht op elkaar staan) en ieder hoekpunt heeft een *tegenoverliggend* zijvlak. We hebben de volgende rotatie-symmetrieën :

- (type L) : rotatie-as door een hoekpunt en het middelpunt van het tegenoverliggend zijvlak en rotatie-hoek 120° of 240° . Omdat we 4 hoekpunten hebben hebben we dus 8 zulke symmetrieën.
- (type M) : rotatie-as door de middens van tegenoverliggende zijden en rotatie-hoek 180° . We hebben drie paar tegenoverliggende zijden dus 3 zulke symmetrieën.

Samen met de *identiteit* levert ons dat 12 rotatie-symmetrieën en omdat T vier hoekpunten heeft weten we dat $R(T)$ een deelgroep van S_4 is.

$R(T)$ is niet Abels want beschouw de rotatie r rond L met hoek 120° en de rotatie s

rond M met hoek 180° dan krijgen we $s \circ r \neq r \circ s$ want



Met behulp van deze notatie voor de hoekpunten kunnen we r en s in cykel-notatie voorstellen

$$r = (1)(2, 4, 3) \quad \text{en} \quad s = (1, 4)(2, 3)$$

We kunnen met behulp van **Maple** de deelgroep van S_4 berekenen voortgebracht door s en t en het blijkt dat dit alle 12 symmetrieën oplevert.

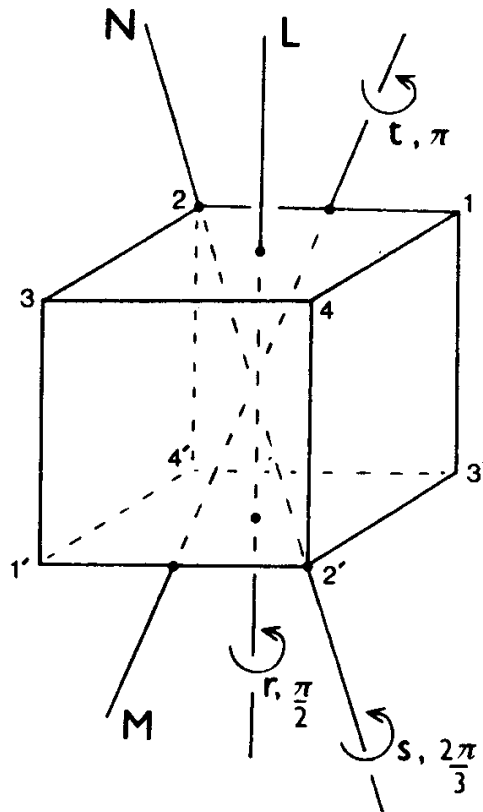
```
> with(group):
> r:=[[2,4,3]]:
> s:=[[1,4],[2,3]]:
> RT:=permgroep(4,{r,s}):
> groeporder(RT);
```

12

```
> elements(RT);
{[], [[2, 4, 3]], [[1, 4], [2, 3]], [[1, 4, 2]],
 [[1, 3], [2, 4]],
 [[2, 3, 4]], [[1, 2], [3, 4]], [[1, 2, 3]], [[1, 2, 4]],
 [[1, 3, 2]], [[1, 4, 3]], [[1, 3, 4]]}
```

Een permutatie $\sigma \in S_n$ noemen we *even* als in de cykel notatie van σ het aantal cyclen met een even aantal elementen een even getal is. De *alternierende groep* A_n is de deelgroep van S_n bestaande uit alle even permutaties. De orde $|A_n|$ is gelijk aan $\frac{n!}{2}$. Uit de lijst van alle elementen van $R(T)$ volgt :

Stelling 2.3 De rotatie-symmetrie groep $R(T)$ van het tetraëder heeft orde 12 en is de alternerende groep A_4 .



Het hexaëder H (de kubus) heeft volgende rotatie-symmetrieën :

- (type L) : Rotatie-as door de centra van tegenoverliggende zijden en rotatie-hoek $90^\circ, 180^\circ$ of 270° . Omdat we drie paar tegenoverliggende zijden hebben geeft dit 9 symmetrieën.
- (type M) : Rotatie-as door de middens van tegenoverliggende zijden en rotatie-hoek 180° . Dit geeft 6 symmetrieën.
- (type N) : Rotatie-as door tegenoverliggende hoekpunten en rotatie-hoek 120° of 240° . Omdat er 4 paren zijn van tegenoverliggende hoekpunten levert dit 8 symmetrieën.

Samen met de identiteit geeft dit ons $9 + 6 + 8 + 1 = 24$ rotatie symmetrieën in $R(H)$.

Merk op dat iedere rotatie-symmetrie van de kubus een *hoofd-diagonaal* (dat is de rechte die twee tegenoverliggende hoekpunten verbind) naar een hoofddiagonaal stuurt.

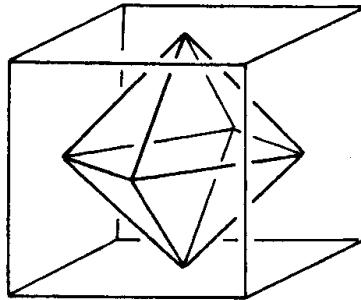
Omdat we 4 hoofd-diagonalen hebben kunnen we aan elke $r \in R(H)$ een element van S_4 associëren. Bijgevolg hebben we een *groep-morfisme*

$$R(H) \longrightarrow S_4$$

en dit is injectief want een rotatie-symmetrie die alle 4 de hoofd-diagonalen invariant laat, moet elk van de hoekpunten invariant laten (de enige andere mogelijkheid die hoekpunten $1 \mapsto 1'$, $2 \mapsto 2'$, $3 \mapsto 3'$ en $4 \mapsto 4'$ stuurt is een punt-spiegeling en geen rotatie).

Stelling 2.4 De rotatie-symmetrie groep $R(H)$ van het tetraëder heeft orde 24 en is isomorf met S_4 . De rotatie-symmetrie groep $R(O)$ van het octaëder heeft orde 24 en is isomorf met S_4 .

Bewijs. We moeten enkel nog de laatste bewering bewijzen. Maar dit volgt uit dualiteit.



Iedere rotatie-symmetrie van de kubus stuurt een middelpunt van een zijvlak naar een ander middelpunt van een zijvlak en stuurt aangrenzende zijvlakken naar aangrenzende zijvlakken. Dus geeft het een symmetrie op het duale veelvlak (de octaëder).

Omdat H ook het duale veelvlak is van O kunnen we de redenering omkeren en krijgen bijgevolg een isomorfisme $R(H) \simeq R(O)$. $\square$

Als we de hoekpunten $1', 2', 3', 4'$ benoemen als 5, 6, 7, 8 dan kunnen de rotaties r en s in cykel notatie voorgesteld worden als

$$r = (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8) \quad \text{en} \quad s = (1, 8, 3)(4, 7, 5)$$

en kunnen we wederom Maple gebruiken om aan te tonen dat deze twee elementen de groep $R(H)$ voortbrengen


```

> with(group):
> a:=[[1,2,3,4],[5,6,7,8]]:
> b:=[[1,8,3],[4,7,5]]:
> RH:=permgroep(8,{a,b}):
> groeporder(RH);

```

24

```

> elements(RH);
{[], [[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7, 8]], [[1, 8, 3], [4, 7, 5]],
 [[1, 3, 6], [2, 5, 7]], [[1, 4], [2, 6], [3, 7], [5, 8]],
 [[1, 8], [2, 7], [3, 6], [4, 5]], [[2, 7, 4], [3, 8, 6]],
 [[2, 4, 7], [3, 6, 8]], [[1, 6, 3], [2, 7, 5]],
 [[1, 6, 8], [2, 4, 5]],
 [[1, 2], [3, 7], [4, 8], [5, 6]], [[1, 8, 6], [2, 5, 4]],
 [[1, 5], [2, 6], [3, 4], [7, 8]],
 [[1, 3], [2, 4], [5, 7], [6, 8]],
 [[1, 3, 8], [4, 5, 7]], [[1, 4, 3, 2], [5, 8, 7, 6]],
 [[1, 7], [2, 6], [3, 5], [4, 8]],
 [[1, 5], [2, 3], [4, 8], [6, 7]],
 [[1, 2, 8, 7], [3, 5, 6, 4]],
 [[1, 6], [2, 5], [3, 8], [4, 7]],
 [[1, 5], [2, 8], [3, 7], [4, 6]],
 [[1, 7, 6, 4], [2, 8, 5, 3]],
 [[1, 4, 6, 7], [2, 3, 5, 8]],
 [[1, 7, 8, 2], [3, 4, 6, 5]]}

```

De *dodecaëder* D heeft 12 zijvlakken die elk een regelmatige 5-hoek vormen. Laat $R(D)$ de rotatie-symmetrie groep zijn dan beweren we dat $R(D)$ transitief werkt op de twaalf zijvlakken. Hiermee bedoelen we dat voor ieder paar zijvlakken f en f' er een $r \in R(D)$ bestaat zodat $r(f) = f'$.

Dit volgt uit de observatie dat ieder zijvlak door een rotatie kan omgezet worden in elk van zijn 5 buur-zijvlakken. Deze rotatie heeft als as de rechte orthogonaal op de verbindingzijde die door de centra van twee tegenoverliggende zijvlakken van D gaat en de rotatie-hoek bedraagt 72° .

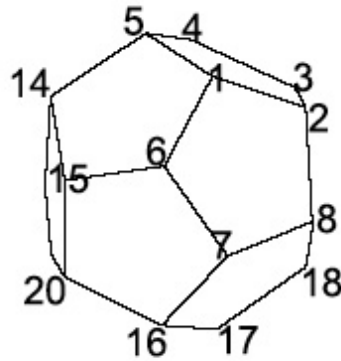
Zij nu $r \in R(D)$ een rotatie die een zijvlak f in zichzelf voert dan moet de rotatie-as van r loodrecht staan op dit zijvlak en door het middelpunt gaan en moet als rotatie-hoek een veelvoud van 72° hebben. Bijgevolg zijn er juist 5 zulke $r \in R(D)$. We noemen dit de *stabilisator deelgroep* van het zijvlak f .

Later, als we orbits van groepacties tellen zullen we bewijzen dat uit deze twee observaties volgt dat

$$|R(D)| = 12 \times 5 = 60$$

waar 5 de orde is van de stabilisator deelgroep en 12 het aantal elementen van de eindige verzameling der zijvlakken van D waarop $R(D)$ transitief werkt.

We kunnen met Maple weer voortbrengers en een effectieve lijst van alle symmetrieën bepalen. Nummer de 20 hoekpunten van D als volgt :



De hoekpunten van het top-zijvlak worden genummerd 1 t.e.m. 5 in tegenwijzerzin, deze van het beneden-zijvlak 16 t.e.m. 20. De middelste hoekpunten worden 6 t.e.m. 15 genummerd in tegenwijzerzin. We kunnen dus elke $r \in R(D)$ opvatten als een element van de symmetrische groep S_{20} .

Zij a de rotatie die top- en beneden-zijvlak bewaart en 72° in tegenwijzerzin draait en laat b de rotatie zijn met hoek 72° die hoekpunt $1 \mapsto 6$ en hoekpunt $6 \mapsto 7$. M.a.w. deze rotaties hebben de volgende cykel-notaties

$$\begin{cases} a = (1, 2, 3, 4, 5)(6, 8, 10, 12, 14)(7, 9, 11, 13, 15)(16, 17, 18, 19, 20) \\ b = (1, 6, 7, 8, 2)(3, 5, 15, 16, 9)(4, 14, 20, 17, 10)(12, 13, 19, 18, 11) \end{cases}$$

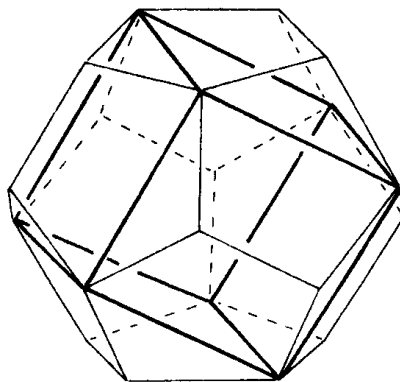
```
> with(group):
> a := [[1, 2, 3, 4, 5], [6, 8, 10, 12, 14], [7, 9, 11, 13, 15], [16, 17, 18, 19, 20]]:
> b := [[1, 6, 7, 8, 2], [3, 5, 15, 16, 9], [4, 14, 20, 17, 10], [12, 13, 19, 18, 11]]:
> RD:=permgroep(20, {a, b}):
> groeporder(RD);
60
> elements(RD);
```

```
[[],
[[1, 2, 3, 4, 5], [6, 8, 10, 12, 14], [7, 9, 11, 13, 15],
[16, 17, 18, 19, 20]],
[[1, 18], [2, 17], [3, 16], [4, 20], [5, 19], [6, 11], [7, 10], [8, 9],
[12, 15], [13, 14]],
[[1, 12, 9], [2, 4, 10], [5, 11, 8], [6, 13, 17], [7, 14, 18], [15, 19, 16]],
[[1, 18], [2, 19], [3, 13], [4, 12], [5, 11], [6, 17], [7, 16], [8, 20],
[9, 15], [10, 14]],
[[1, 19, 8, 14, 17], [2, 13, 9, 5, 18], [3, 12, 10, 4, 11],
[6, 20, 7, 15, 16]]],
```

[[1, 6], [2, 15], [3, 20], [4, 16], [5, 7], [8, 14], [9, 13], [10, 19],
 [11, 18], [12, 17]],
 [[1, 16], [2, 20], [3, 19], [4, 18], [5, 17], [6, 7], [8, 15], [9, 14],
 [10, 13], [11, 12]],
 [[1, 19, 3, 15, 11], [2, 20, 10, 6, 18], [4, 14, 12, 5, 13],
 [7, 17, 8, 16, 9]],
 [[1, 10, 13], [2, 11, 14], [3, 12, 5], [6, 9, 19], [7, 17, 20], [8, 18, 15]],
 [[1, 15, 19, 11, 3], [2, 6, 20, 18, 10], [4, 5, 14, 13, 12],
 [7, 16, 17, 9, 8]],
 [[1, 20, 12], [2, 16, 11], [3, 7, 18], [4, 6, 19], [5, 15, 13], [8, 17, 10]],
 [[1, 3, 5, 2, 4], [6, 10, 14, 8, 12], [7, 11, 15, 9, 13],
 [16, 18, 20, 17, 19]],
 [[1, 10], [2, 3], [4, 8], [5, 9], [6, 11], [7, 12], [13, 16], [14, 17],
 [15, 18], [19, 20]],
 [[1, 11], [2, 12], [3, 4], [5, 10], [6, 18], [7, 19], [8, 13], [9, 14],
 [15, 17], [16, 20]],
 [[1, 8, 17, 19, 14], [2, 9, 18, 13, 5], [3, 10, 11, 12, 4],
 [6, 7, 16, 20, 15]],
 [[1, 5], [2, 14], [3, 15], [4, 6], [7, 12], [8, 13], [9, 19], [10, 20],
 [11, 16], [17, 18]],
 [[2, 6, 5], [3, 7, 14], [4, 8, 15], [9, 20, 12], [10, 16, 13], [11, 17, 19]],
 [[1, 12], [2, 13], [3, 14], [4, 5], [6, 11], [7, 18], [8, 19], [9, 20],
 [10, 15], [16, 17]],
 [[1, 14, 19, 17, 8], [2, 5, 13, 18, 9], [3, 4, 12, 11, 10],
 [6, 15, 20, 16, 7]],
 [[1, 17, 14, 8, 19], [2, 18, 5, 9, 13], [3, 11, 4, 10, 12],
 [6, 16, 15, 7, 20]],
 [[1, 11, 15, 3, 19], [2, 18, 6, 10, 20], [4, 13, 5, 12, 14],
 [7, 9, 16, 8, 17]],
 [[1, 6, 7, 8, 2], [3, 5, 15, 16, 9], [4, 14, 20, 17, 10],
 [11, 12, 13, 19, 18]],
 [[1, 6, 15, 14, 5], [2, 7, 20, 13, 4], [3, 8, 16, 19, 12],
 [9, 17, 18, 11, 10]],
 [[1, 18], [2, 11], [3, 10], [4, 9], [5, 17], [6, 19], [7, 13], [8, 12],
 [14, 16], [15, 20]],
 [[1, 4, 2, 5, 3], [6, 12, 8, 14, 10], [7, 13, 9, 15, 11],
 [16, 19, 17, 20, 18]],
 [[1, 3, 11, 19, 15], [2, 10, 18, 20, 6], [4, 12, 13, 14, 5],
 [7, 8, 9, 17, 16]],
 [[1, 7, 17, 11, 4], [2, 8, 9, 10, 3], [5, 6, 16, 18, 12],
 [13, 14, 15, 20, 19]],
 [[1, 15, 5, 6, 14], [2, 20, 4, 7, 13], [3, 16, 12, 8, 19],
 [9, 18, 10, 17, 11]],
 [[1, 4, 11, 17, 7], [2, 3, 10, 9, 8], [5, 12, 18, 16, 6],
 [13, 19, 20, 15, 14]],
 [[1, 20], [2, 19], [3, 18], [4, 17], [5, 16], [6, 15], [7, 14], [8, 13],
 [9, 12], [10, 11]],
 [[1, 10, 16], [2, 9, 7], [3, 17, 6], [4, 18, 15], [5, 11, 20], [12, 19, 14]],
 [[1, 9, 20], [2, 17, 15], [3, 18, 14], [4, 11, 13], [5, 10, 19], [6, 8, 16]],
 [[1, 14, 4], [2, 15, 12], [3, 6, 13], [7, 19, 10], [8, 20, 11], [9, 16, 18]],
 [[1, 7, 15], [2, 16, 14], [3, 17, 13], [4, 9, 19], [5, 8, 20], [10, 18, 12]],
 [[1, 12, 20], [2, 11, 16], [3, 18, 7], [4, 19, 6], [5, 13, 15], [8, 10, 17]],
 [[1, 9, 12], [2, 10, 4], [5, 8, 11], [6, 17, 13], [7, 18, 14], [15, 16, 19]],
 [[1, 14, 6, 5, 15], [2, 13, 7, 4, 20], [3, 19, 8, 12, 16],
 [9, 11, 17, 10, 18]],
 [[1, 8, 3], [4, 6, 9], [5, 7, 10], [11, 14, 16], [12, 15, 17], [13, 20, 18]],
 [[1, 13, 10], [2, 14, 11], [3, 5, 12], [6, 19, 9], [7, 20, 17], [8, 15, 18]],
 [[1, 2], [3, 6], [4, 7], [5, 8], [9, 14], [10, 15], [11, 20], [12, 16],
 [13, 17], [18, 19]],
 [[1, 5, 4, 3, 2], [6, 14, 12, 10, 8], [7, 15, 13, 11, 9],
 [16, 20, 19, 18, 17]],
 [[1, 17], [2, 16], [3, 20], [4, 19], [5, 18], [6, 9], [7, 8], [10, 15],
 [11, 14], [12, 13]],
 [[1, 16, 13], [2, 17, 12], [3, 9, 11], [4, 8, 18], [5, 7, 19], [6, 20, 14]],
 [[1, 3, 8], [4, 9, 6], [5, 10, 7], [11, 16, 14], [12, 17, 15], [13, 18, 20]],
 [[1, 5, 14, 15, 6], [2, 4, 13, 20, 7], [3, 12, 19, 16, 8],
 [9, 10, 11, 18, 17]],
 [[1, 13, 16], [2, 12, 17], [3, 11, 9], [4, 18, 8], [5, 19, 7], [6, 14, 20]],
 [[1, 15, 7], [2, 14, 16], [3, 13, 17], [4, 19, 9], [5, 20, 8], [10, 12, 18]],
 [[1, 19], [2, 18], [3, 17], [4, 16], [5, 20], [6, 13], [7, 12], [8, 11],
 [9, 10], [14, 15]],
 [[1, 4, 14], [2, 12, 15], [3, 13, 6], [7, 10, 19], [8, 11, 20], [9, 18, 16]],
 [[1, 17, 4, 7, 11], [2, 9, 3, 8, 10], [5, 16, 12, 6, 18],
 [13, 15, 19, 14, 20]],
 [[1, 8, 6, 2, 7], [3, 16, 5, 9, 15], [4, 17, 14, 10, 20],
 [11, 19, 12, 18, 13]],
 [[2, 5, 6], [3, 14, 7], [4, 15, 8], [9, 12, 20], [10, 13, 16], [11, 19, 17]],
 [[1, 20, 9], [2, 15, 17], [3, 14, 18], [4, 13, 11], [5, 19, 10], [6, 16, 8]],
 [[1, 13], [2, 19], [3, 20], [4, 15], [5, 14], [6, 12], [7, 11], [8, 18],
 [9, 17], [10, 16]],
 [[1, 7, 2, 6, 8], [3, 15, 9, 5, 16], [4, 20, 10, 14, 17],
 [11, 13, 18, 12, 19]],
 [[1, 11, 7, 4, 17], [2, 10, 8, 3, 9], [5, 18, 6, 12, 16],
 [13, 20, 14, 19, 15]],
 [[1, 2, 8, 7, 6], [3, 9, 16, 15, 5], [4, 10, 17, 20, 14],
 [11, 18, 19, 13, 12]],
 [[1, 9], [2, 8], [3, 7], [4, 16], [5, 17], [6, 10], [11, 15], [12, 20],
 [13, 19], [14, 18]],

$[[1, 16, 10], [2, 7, 9], [3, 6, 17], [4, 15, 18], [5, 20, 11], [12, 14, 19]]$

Ten behoeve van de meer ambitieuze student schetsen we hoe je zelf de structuur van de groep $R(D)$ kan bepalen. De dodecaëder bevat kubussen



waarvan alle hoekpunten ook hoekpunten van de dodecaëder zijn en waarvan iedere zijde een *diagonaal* is van een van de regelmatige 5-hoeken van de dodecaëder.

Er zijn 12 zijden in een kubus en er zijn net zoveel zijvlakken in D . Merk op dat ieder zijvlak van D juist 1 kubus-zijde als diagonaal toelaat. Er is niks speciaal aan deze diagonalen en dus zijn er in totaal 5 zulk ingeschreven kubussen in D (telkens met andere diagonalen).

Bijgevolg zal elke rotatie-symmetrie van D een permutatie bepalen van deze 5 kubussen en dus krijgen we een groep-morfisme

$$R(D) \longrightarrow S_5$$

(vergelijk dit met het argument van de hoofd-diagonalen in het bewijs dat $R(H) \simeq S_4$). Rest nog de volgende (niet triviale) zaken na te gaan :

- Deze map is een inclusie.
- Door rotaties rond assen die 2 tegenoverliggende hoekpunten van D verbinden te beschouwen kan je onder deze map iedere 3-cykel (u, v, w) in S_5 bekomen.
- De alternerende groep A_5 heeft orde 60 en is voortgebracht door alle 3-cykels in S_5 .

Hieruit volgt :

Stelling 2.5 De rotatie-symmetrie groep $R(D)$ van het dodecaëder heeft orde 60 en is isomorf met de alternerende groep A_5 . De rotatie-symmetrie groep $R(I)$ van het icoesaëder heeft orde 60 en is isomorf met de alternerende groep A_5 .

Wederom volgt de laatste bewering uit dualiteit. We hebben nu de drie *Platonische groepen* bepaald.

- De tetraëder-groep $\mathbb{T} = R(T)$ heeft orde 12 en is isomorf met A_4 .
- De octaëder-groep $\mathbb{O} = R(H) = R(O)$ heeft orde 24 en is isomorf met S_4 .
- De icoesaëder-groep $\mathbb{I} = R(D) = R(I)$ heeft orde 60 en is isomorf met A_5 .

Plato (427-347 v.c.)



Plato richtte in 389 v.c. de *Academie van Athene* op en zat deze voor tot zijn dood in 347 v.c. De naam *Academie* komt van Academos, de naam van de man die de grond bezat waarop de academie werd gebouwd. De academie stelde zich tot doel onderzoek en onderricht te verichten in de filosofie en de wetenschappen.

De regelmatige veelvlakken worden de veelvlakken van Plato genoemd (hoewel ze ontdekt werden door anderen) omdat hij in 'Timaeus' een wiskundige constructie van de elementen (aarde, vuur, lucht en water) gaf gebruikmakend van de kubus, tetraëder,

octaëder en icosaeëder. Het vijfde Platonische veelvlak, het dodecaëder, was Plato's model voor het universum.

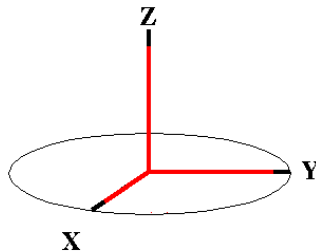
De afbeelding is een detail van Raphael's 'School van Athene'. Meer informatie over Plato kan je vinden op

[http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~ history/Mathematicians/Plato.html](http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Plato.html)

les 3

DE ROTATIE GROEP $SO_3(\mathbb{R})$

We kiezen een (*rechtsdraaiend*) *orthogonaal referentiestelsel* $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ en kunnen t.o.v. dit stelsel iedere vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ voorstellen doormiddel van zijn coördinaten x, y en z



We spreken af dat we vectoren steeds zullen noteren als *kolom-vectoren*

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$\mathbb{R}^3$ is een *vector-ruimte*, d.w.z. dat we vectoren kunnen optellen en vermenigvuldigen met een scalair

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{bmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \lambda \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{bmatrix}$$

Een *lineaire afbeelding* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ is een afbeelding die compatibel is met som en scalair product, d.w.z. zodanig dat

$$f(\lambda \vec{v} + \mu \vec{w}) = \lambda f(\vec{v}) + \mu f(\vec{w})$$

Iedere lineaire afbeelding f is volledig vastgelegd door zijn *matrix* A_f waarvan de kolommen gegeven worden door de beelden van de *basis-vectoren*

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

D.w.z. als

$$f(\vec{e}_1) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} \quad f(\vec{e}_2) = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} \quad f(\vec{e}_3) = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$$

dan is de bijhorende matrix A_f gegeven door

$$A_f = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

We kunnen dan $f(\vec{v})$ bepalen als het *matrix-product* $A_f \cdot \vec{v}$. Immers,

$$f(\vec{v}) = f(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3) = xf(\vec{e}_1) + yf(\vec{e}_2) + zf(\vec{e}_3)$$

en dit levert de vector met coördinaten

$$\begin{bmatrix} xa_{11} + ya_{12} + za_{13} \\ xa_{21} + ya_{22} + za_{23} \\ xa_{31} + ya_{32} + za_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A_f \cdot \vec{v}$$

wegens de *rij-kolom regel* voor matrix-vermenigvuldiging.

De *afstand* tussen de punten bepaalt door twee vectoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ en het *in-product* tussen twee vectoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ wordt gegeven door

$$\begin{cases} d(\vec{v}, \vec{w}) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \\ \vec{v} \cdot \vec{w} = xx' + yy' + zz' \end{cases}$$

Een *isometrie* is een lineaire afbeelding $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die het in-product bewaart, d.w.z.

$$\forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3 : f(\vec{v}) \cdot f(\vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{w}$$

In het bijzonder wordt een *orthonormaal referentiestelsel* (dat is een basis van norm 1 vectoren die loodrecht op elkaar staan) onder een isometrie afgebeeld op een nieuw orthonormaal referentie-stelsel.

Stelling 3.1 Een lineaire afbeelding $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ is een isometrie als en slechts als

$$A_f^\tau \cdot A_f = I_3$$

waarbij A_f^τ de getransponeerde matrix is van A_f en I_3 de identiteits 3×3 matrix.

Bewijs. Bij definitie van de getransponeerde matrix hebben we dat

$$A_f^\tau \cdot A_f = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

en omdat de kolommen van A_f de beelden $f(\vec{e}_i)$ voorstellen kunnen we deze matrix, gebruikmakend van de rij-kolom regel voor matrix-vermenigvuldiging, schrijven als

$$\begin{bmatrix} f(\vec{e}_1) \cdot f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_1) \cdot f(\vec{e}_2) & f(\vec{e}_1) \cdot f(\vec{e}_3) \\ f(\vec{e}_2) \cdot f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) \cdot f(\vec{e}_2) & f(\vec{e}_2) \cdot f(\vec{e}_3) \\ f(\vec{e}_3) \cdot f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_3) \cdot f(\vec{e}_2) & f(\vec{e}_3) \cdot f(\vec{e}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

waaruit het gestelde volgt. $\square$

De *determinant* van een 3×3 matrix A_f , $\det(A_f)$ wordt gegeven door

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{13}a_{31}a_{22} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Hieruit volgt dat $\det(A_f^\tau) = \det(A_f)$ en omdat de determinant van het product van matrices het product van de determinanten is geldt

$$1 = \det(I_3) = \det(A_f^\tau \cdot A_f) = \det(A_f^\tau) \det(A_f) = \det(A_f)^2$$

en dus is $\det(A_f) = \pm 1$ voor elke isometrie f .

We noemen een isometrie f *orientatie-bewarend* indien $\det(A_f) = +1$ en *orientatie-omkerend* indien $\det(A_f) = -1$.

Stelling 3.2 *De isometrieën van $\mathbb{R}^3$ vormen een groep onder samenstelling. De groep van matrices*

$$O_3(\mathbb{R}) = \{A_f \in M_3(\mathbb{R}) \mid A_f^\tau \cdot A_f = I_3\}$$

noemen we de orthogonale groep.

De orientatie-bewarende isometrieën van $\mathbb{R}^3$ vormen een groep onder samenstelling en de bijhorende groep van matrices

$$SO_3(\mathbb{R}) = \{A_f \in M_3(\mathbb{R}) \mid A_f^\tau \cdot A_f = I_3 \text{ en } \det(A_f) = 1\}$$

noemen we de rotatie groep.

Bewijs. Als f en g isometrieën zijn moeten we nagaan dat $f \circ g$ een isometrie is, of op matrix-niveau dat $A_{f \circ g} = A_f \cdot A_g \in O_3(\mathbb{R})$. Immers,

$$(A_f \cdot A_g)^\tau \cdot (A_f \cdot A_g) = A_g^\tau \cdot A_f^\tau \cdot A_f \cdot A_g = A_g^\tau \cdot I_3 \cdot A_g = I_3$$

Een isometrie heeft een inverse afbeelding die opnieuw een isometrie is met matrix

$$A_{f^{-1}} = A_f^\tau$$

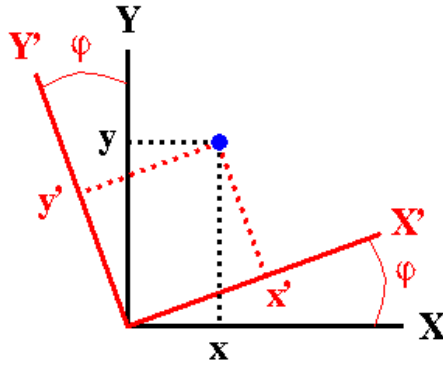
en natuurlijk is de samenstelling van afbeeldingen associatief (of, equivalent, het product van matrices is associatief). Dit toont aan dat $O_3(\mathbb{R})$ een groep is. Dat de rotatie groep $SO_3(\mathbb{R})$ hiervan een deelgroep is volgt uit

$$\det(A_f \cdot A_g) = \det(A_f) \cdot \det(A_g) = +1$$

□

We zullen nu een expliciete beschrijving geven van de rotatie matrix groep $SO_3(\mathbb{R})$ en in het bijzonder aantonen dat deze groep door 3 parameters beschreven wordt. Met andere woorden, de rotatie groep $SO_3(\mathbb{R})$ is een *drie-dimensionale Lie groep*.

We herhalen eerst de overgangsmatrix van een rotatie in tegenwijzerzin onder een hoek ϕ van het vlak $\mathbb{R}^2$



Uit de tekening volgt dat de beelden van de twee basis-vectoren door goniometrische termen gegeven worden

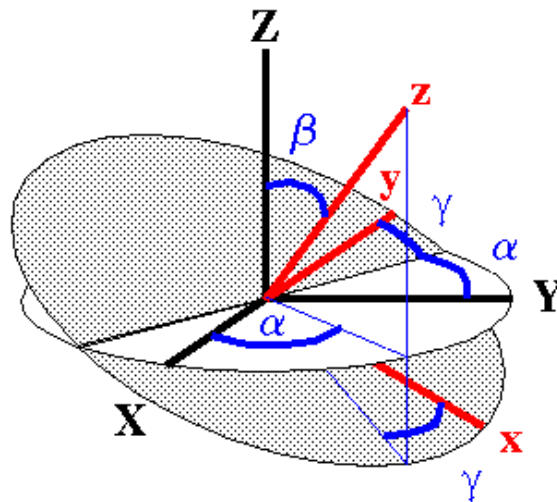
$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

en bijgevolg is de overgangs-matrix $A_f \in SO_2(\mathbb{R})$

$$A_f = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

Op analoge wijze kan een rotatie van $\mathbb{R}^3$ bepaald worden door drie hoeken (α, β, γ) , de zgn. *Euler-hoeken* die de positie van het originele referentiestelsel (X, Y, Z) en

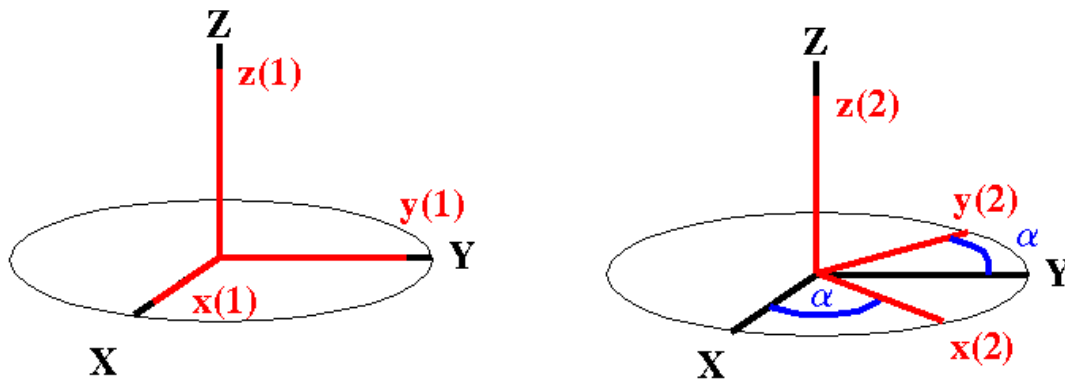
het geroteerde referentiestelsel (x, y, z) vastleggen.



Hier is β de hoek tussen de Z -as en de z -as, α is de hoek tussen de X -as en de *projectie* van de z -as op het (X, Y) -vlak en γ is de hoek tussen de y -as en de rechte in $\mathbb{R}^3$ bepaald als doorsnede van het (X, Y) -vlak met het (x, y) -vlak. Hierbij variëren deze hoeken in volgende intervallen

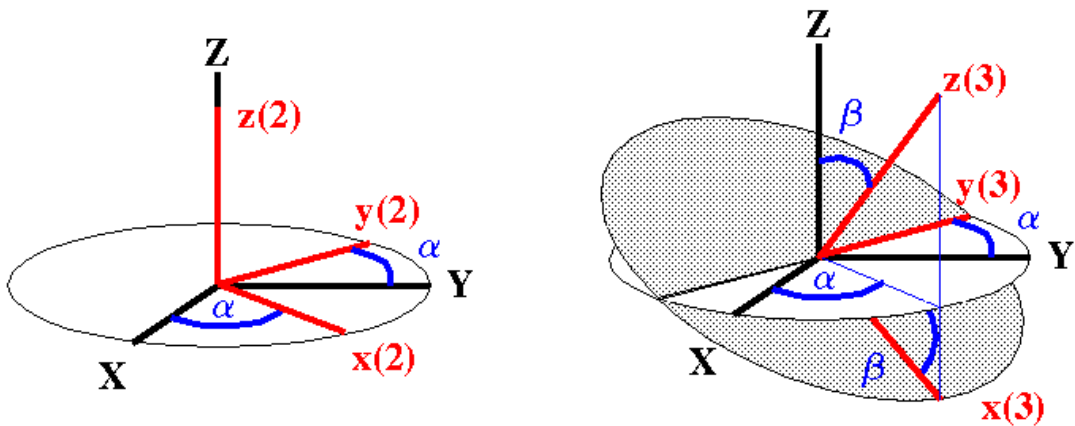
$$0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ \quad 0^\circ \leq \beta \leq 180^\circ \quad 0^\circ \leq \gamma \leq 360^\circ$$

We gaan nu deze rotatie beschrijven als de samenstelling van drie vlakke rotaties.



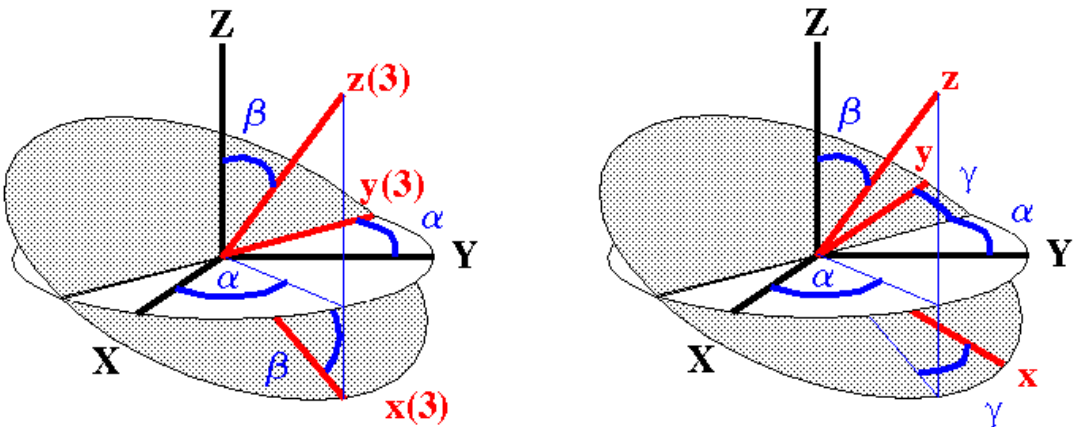
De overgang van het eerste stelsel (het originele) naar het tweede stelsel wordt gegeven door een rotatie met as de Z -as en rotatie-hoek α . Bijgevolg halen we de overgangsmatrix uit deze van een vlakke rotatie

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



De overgang naar het derde stelsel wordt gegeven door een rotatie met als de $y(2)$ -as en rotatie-hoek β . Bijgevolg wordt de overgangsmatrix van $(x(2), y(2), z(2))$ naar $(x(3), y(3), z(3))$ wederom gegeven door deze van een vlakke rotatie

$$A_\beta = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix}$$



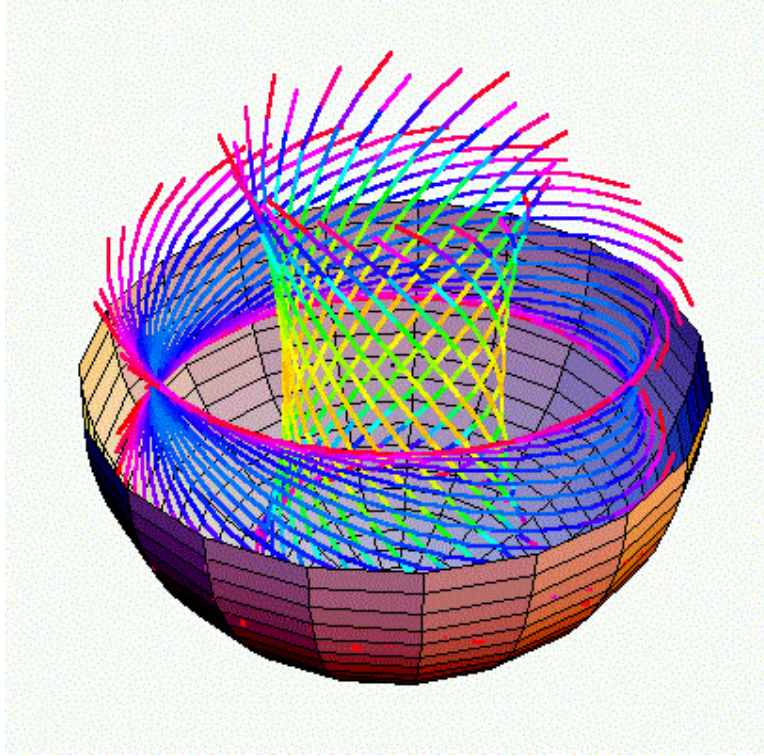
Tenslotte wordt de overgang naar het finale referentie-stelsel (x, y, z) gegeven door een rotatie met als as de $z(3)$ -as en rotatie-hoek γ . De overgangsmatrix van $(x(3), y(3), z(3))$ naar (x, y, z) is gegeven door

$$A_\gamma = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bijgevolg is de matrix die hoort bij deze rotatie f gegeven door $A_f = A_\gamma A_\beta A_\alpha$ en

gelijk aan

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma) - \sin(\alpha)\sin(\gamma) & -\cos(\alpha)\cos(\beta)\sin(\gamma) & \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma) + \cos(\alpha)\sin(\gamma) & -\sin(\alpha)\cos(\beta)\sin(\gamma) + \cos(\alpha)\cos(\gamma) & \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ -\sin(\beta)\cos(\gamma) & \sin(\beta)\sin(\gamma) & \cos(\beta) \end{bmatrix}$$



Een alternatieve methode om de rotatie groep $SO_3(\mathbb{R})$ meetkundig voor te stellen is als volgt. Neem B de bol met straal 180

$$B = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \mid d(\vec{0}, \vec{v}) \leq 180\}$$

Iedere $\vec{v} \in B$ bepaalt een rotatie van $\mathbb{R}^3$ met als as de rechte $\vec{0}\vec{v}$ en het aantal graden van de rotatie-hoek (in tegenwijzer-zin) de afstand tot de oorsprong. Vectoren $\vec{v}$ in het inwendige van B bepalen de rotatie eenduidig maar omdat een punt op de rand van B en zijn antipodale punt (D.w.z. punt-spiegeling t.o.v. $\vec{0}$) dezelfde rotatie definiëren kunnen we $SO_3(\mathbb{R})$ meetkundig identificeren met

$$B / \sim = \bar{B} = \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$$

de bol waarvan antipodale punten op de rand geïdentificeerd zijn. Als je meer weet over meetkunde zal je inzien dat dit een voorstelling is van 3-dimensionale projectieve ruimte $\mathbb{P}^3$. Dit is volkomen analoog met de beschrijving van het projectieve vlak $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ als de eenheidsschijf met antipodale punten van de rand geïdentificeerd.

Leonard Euler (15 April 1707 Basel - 18 Sept 1783 St Petersburg)

Euler leverde belangrijke bijdragen in diverse takken van de wiskunde : getaltheorie, analyse, meetkunde en topologie. Veel van door hem ingevoerde notatie gebruiken we nog steeds : $f(x)$ voor de functiewaarde (1734), e voor de natuurlijke logaritmische basis (1727), i voor $\sqrt{-1}$ (1777), π voor pi, $\sum$ voor sommatie en $\Delta(y)$ voor verschillen, enz.

In getaltheorie bestudeerde hij zgn. Fermat priemgetallen en introduceerde the Euler $\phi(n)$ functie voor het aantal getallen k die copriem zijn met n . Verder bestudeerde hij de *zeta-functie*

$$\zeta(s) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^s}$$

en bewees allerlei functiewaarden zoals $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, Ook bewees hij de gekende relatie

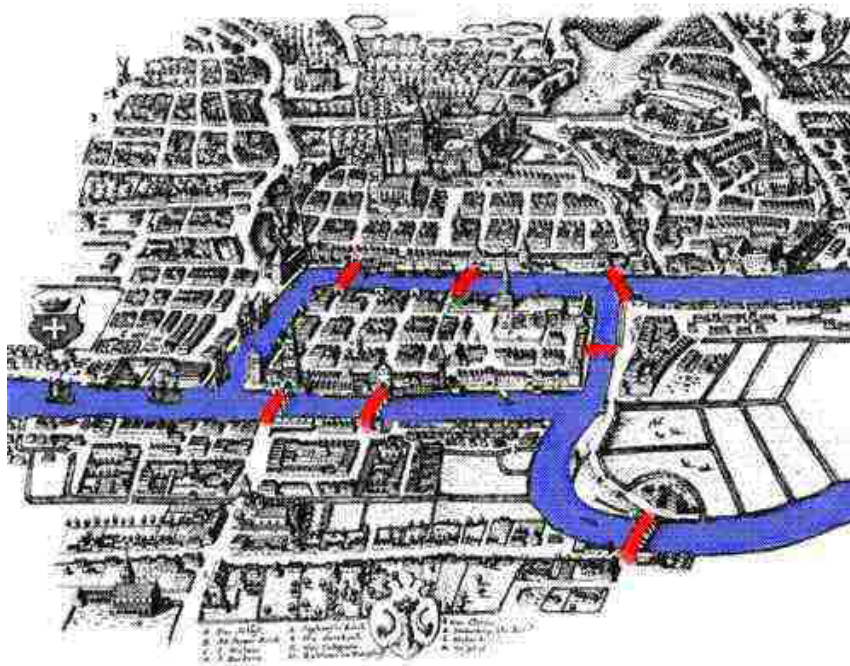
$$\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

waar het oneindig product genomen wordt over alle priemgetallen. Ook bestudeerde hij complexe getallen waaronder de formule

$$e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$$

Hij leverde verscheidene bijdragen in de fysica gebruikmakend van differentiaal vergelijkingen en bestudeerde in differentiaal meetkunde b.v.b. de kromming van oppervlakken.

Euler kan ook het vaderschap opeisen van de topologie waarin zijn belangrijkste bijdragen de notie van de *Euler characteristiek* van een polyhedron (b.v.b. deze van een convex polyhedron is **2** zoals in les 1) en van een *Euler wandeling* in graf-theorie. Deze notie ontstond uit het 7-bruggen probleem van Königsberg.

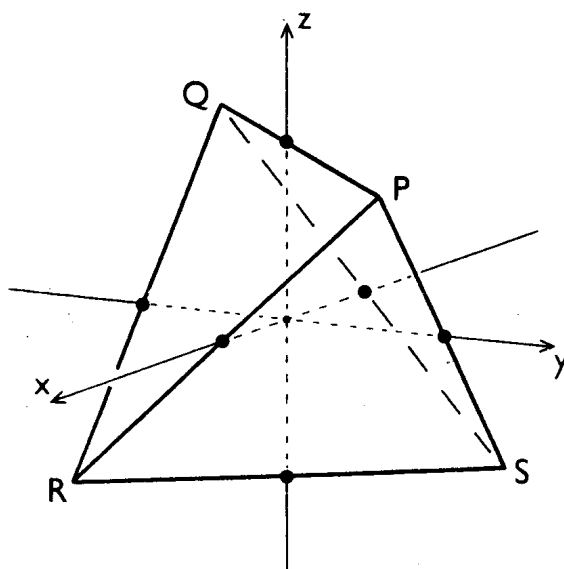


Kan je tijdens 1 wandeling elk van de zeven bruggen slechts 1 keer oversteken? (Oefening : bewijs dat dit niet mogelijk is).

les 4

EINDIGE ROTATIE GROEPEN

Nu we een matrix-beschrijving kennen voor een rotatie $r \in SO_3(\mathbb{R})$ kunnen we de groepen van Plato ook voorstellen als eindige matrix-deelgroepen van $SO_3(\mathbb{R})$ (in de plaats van ze te beschrijven als abstracte groepen van permutaties van de hoekpunten). We zullen het voorbeeld van de *tetraëder-groep* $\mathbb{T}$ uitwerken en de details voor $\mathbb{O}$ en $\mathbb{I}$ als oefening laten.



Neem als hoekpunten van het tetraëder T de punten met coördinaten

$$P = (1, 1, 1), \quad Q = (-1, -1, 1), \quad R = (1, -1, -1) \quad \text{en} \quad S = (-1, 1, -1)$$

Het *centroïed punt*, d.w.z. de doorsnede van de middellijnen van overstaande zijden, is de oorsprong $0 = (0, 0, 0)$. Elke rotatie-as zal 0 bevatten.

De twee rotaties rond de as $\vec{OP}$ met rotatie-hoek 120° resp. 240° (type L rotaties uit les 2) permuteren de drie coördinaat-assen X, Y en Z en geven bijgevolg de

permutatie-matrices

$$r_{120} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad r_{240} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dit zijn inderdaad rotatie-matrices in $SO_3(\mathbb{R})$.

Een rotatie van type M heeft b.v.b. als rotatie-as de middelpunten van de zijden $\vec{PQ}$ en $\vec{RS}$. Dit is de Z -as. Roteren met hoek 180° inverteert de X en Y as en bijgevolg is de bijhorende matrix

$$s = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

We hebben eerder al gezien dat r_{120} en s de symmetrie groep $\mathbb{T}$ voortbrengen. Ga als oefening na dat je inderdaad door deze matrices te vermenigvuldigen 12 verschillende rotatie matrices in $SO_3(\mathbb{R})$ bekomt en associeer aan iedere matrix de bijhorende permutatie van de hoekpunten.

Door dit te herhalen voor de Plato groepen $\mathbb{O}$ (octaëder-groep) en $\mathbb{I}$ (icosaëder-groep) krijgen we drie eindige groepen van rotatie-matrices in $SO_3(\mathbb{R})$ met ordes 12 ($\mathbb{T}$), 24 ($\mathbb{O}$) en 60 ($\mathbb{I}$).

Zijn er nog andere? b.v.b. wanneer is de deelgroep voortgebracht door slechts 1 rotatie $r \in SO_3(\mathbb{R})$ eindig (en bijgevolg cyclisch D.w.z. isomorf met $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ voor zekere $k \in \mathbb{Z}$)?

Stelling 4.1 De deelgroep $\langle r \rangle \subset SO_3(\mathbb{R})$ voortgebracht door de rotatie r is eindig en cyclisch als en slechts als de rotatie-hoek van r uitgedrukt in graden een rationaal getal is.

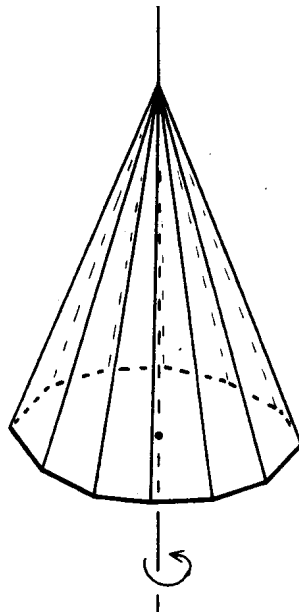
Bewijs. Als de rotatie-hoek van r a° is dan is de rotatie-hoek van r^n gelijk aan na° . Indien $r^n = I_3$ de identiteit is dan moet de rotatie-hoek een geheel aantal keren 360° bedragen, m.a.w. $r^n = I_3$ als en slechts als

$$na = m360$$

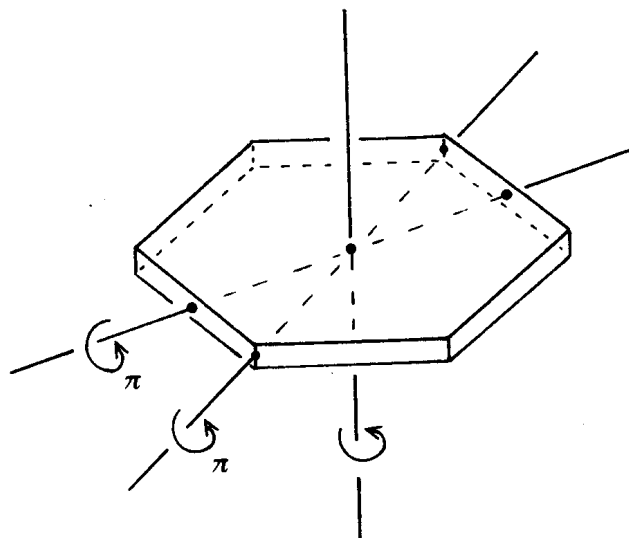
en dus is $a = (360m)/n$ een rationaal getal. Omgekeerd, als $a = k/l$ dan zal r^{360l} de identiteit zijn. $\square$

Omdat de rationale getallen een aftelbare verzameling vormen in de overaftelbare verzameling $[0, 360]$ zullen de 'meeste' rotaties een oneindige deelgroep van $SO_3(\mathbb{R})$ voortbrengen. We kunnen de cyclische groep $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ opvatten als de symmetrie groep

van een convex veelvlak in $\mathbb{R}^3$, namelijk de *pyramide* met grondvlak een regelmatige k -hoek.



De enige symmetrie-as is de rechte door de top en het middelpunt van de veelhoek, alle rotatie-hoeken zijn veelvouden van $360^\circ/k$.



Beschouw nu een veelvlak dat als grond- en boven-vlak een regelmatige k -hoek heeft en waarvan alle zij-vlakken rechthoeken zijn. Rotaties met as de loodlijn op het middelpunt van de regelmatige k -hoeken en hoek een veelvoud van $360^\circ/k$ zijn opnieuw rotatie-symmetrieën van deze figuur.

Er zijn er echter nog andere! Beschouw als rotatie-as de rechte door de middelpunten van twee tegenoverliggende zij-vlakken (indien k even is) of door het middelpunt van een zijde en het midden van de tegenoverliggende ribbe (indien k oneven is) en als rotatie-hoek 180° . Dit is een nieuwe rotatie-symmetrie van de figuur (want ze stuurt hoekpunten van het grondvlak naar hoekpunten van het bovenvlak (en omgekeerd)).

Laat r de rotatie met hoek $360^\circ/k$ rond de as loodrecht op het bovenvlak zijn en s de rotatie met hoek 180° rond de horizontale symmetrie as. Dan gelden direct volgende identiteiten

$$r^k = e \quad \text{en} \quad s^2 = e$$

waar $e = I_3$ is de identiteits-rotatie. De rotaties r en s commuteren evenwel niet met elkaar. Men gaat na dat

$$s \circ r = r^{k-1} \circ s \quad \text{of, equivalent} \quad s \circ r = r^{-1} \circ s$$

en dus krijgen we als symmetrie groep de *diheder-groep*

$$D_k = \langle r, s \mid r^k = e = s^2, r.s.r = s \rangle$$

Door deze relaties te gebruiken zien we dat D_k bestaat uit volgende elementen

$$\{e, r, r^2, \dots, r^{k-1}, s, r.s, r^2.s, \dots, r^{k-1}.s\}$$

en dus heeft D_k orde $2k$.

Door speciale veelvlakken te bestuderen hebben we dus reeds heel wat *eindige rotatie groepen* in $SO_3(\mathbb{R})$ gevonden. Namelijk

- Twee oneindige families van groepen : de *cyclische groepen* $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}_k$ en de *diheder groepen* D_k voor alle $k \in \mathbb{N}$.
- Drie uitzonderingsgroepen : de *tetraëder groep* $\mathbb{T}$, de *octaëder groep* $\mathbb{O}$ en de *icosaëder groep* $\mathbb{I}$.

Maar misschien kunnen we er nog meer vinden door de rotatie-symmetrie groepen te bepalen van andere veelvlakken. In de volgende twee lessen zullen we echter bewijzen dat dit onmogelijk is en dus dat we een volledige klassificatie al hebben.

De strategie van het bewijs is de volgende. Zij G een eindige rotatie-deelgroep van $SO_3(\mathbb{R})$ en bekijk de eindige verzameling V van alle *polen* van G (dat is, de intersecties van de rotatie-assen van elementen van G met de eenheids-sfeer). Door de actie van G op V te bestuderen zullen we restricties kunnen leggen op het aantal *orbits* (banen) van de actie en daardoor bewijzen dat G één van de reeds gekende symmetriegroepen moet zijn.

Niels Henrik Abel (5 Aug 1802 Frindoe, 6 April 1829 Froland)

Commutatieve groepen worden ook *Abelse groepen* genoemd naar de Noorse wiskundige Niels Henrik Abel. Op zijn 16de bewees hij een veralgemening van de binomiaal formule en op zijn 19de bewees hij dat een algemene vijfde graads vergelijking niet opgelost kan worden met behulp van radicalen (wortels trekken). In het bewijs hiervan introduceerde hij (onafhankelijk van *Galois*) de notie van een groep. Groep theorie heeft toepassingen in verschillende takken van de wiskunde maar ook in fysica, b.v.b. in de klassificatie van elementaire deeltjes.

Meer informatie over het leven en werk van Abel kun je vinden op

<http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Abel.html>

les 5

TELLEN VAN ORBITS

Als X een eindige verzameling is van n elementen, b.v.b. $X = \{1, 2, \dots, n\}$ en als G een groep is dan definiëren we een G -actie op X als een afbeelding

$$G \times X \longrightarrow X \quad (g, x) \mapsto g.x$$

die voldoet aan de volgende voorwaarden :

- (eenheid naar identiteit) : $\forall x \in X : e.x = x$
- (compatiebel met groeps wet) : $\forall g, h \in G, \forall x \in X : (g.h).x = g.(h.x)$

De actie $g. —$ van een element van G levert bijgevolg een bijjectie op X of m.a.w. een permutatie van de n -elementen van X . Noteer met $\phi(g)$ de permutatie

$$\phi(g) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ g.1 & g.2 & \dots & g.n \end{bmatrix}$$

Een andere manier om te zeggen dat we een G -actie op X hebben is dat de afbeelding

$$G \longrightarrow S_n \quad g \mapsto \phi(g)$$

is een *groepsmorfisme*, d.w.z. $\phi(e) = id_n$ en $\phi(g.h) = \phi(g) \circ \phi(h)$. (Ga na!)

Voor $x \in X$ noemen we de *orbit van x* (baan van x) de verzameling van beelden onder de G -actie

$$\mathcal{O}(x) = \{g.x \mid g \in G\}$$

De *stabilisator* G_x van de G -actie in $x \in X$ is de verzameling groeps-elementen die x onveranderd laat

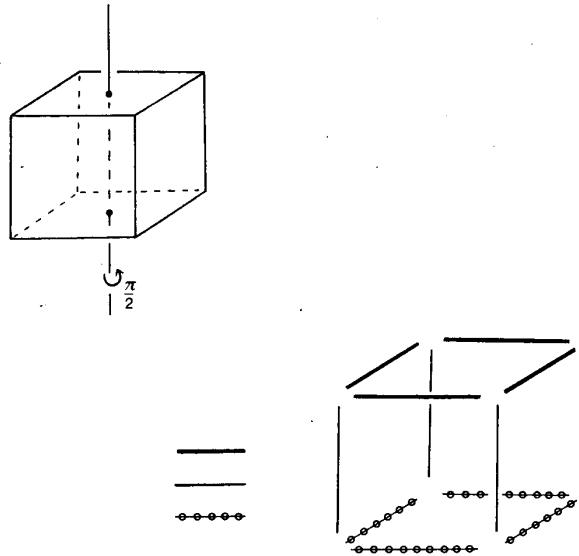
$$G_x = \{g \in G \mid g.x = x\}$$

G_x is een *deelgroep* van G . Immers, $e \in G_x$ en als $g, h \in G_x$ dan geldt ook

$$(g.h).x = g.(h.x) = g.x = x$$

Een G -actie op X noemen we *transitief* als er slechts 1 orbit is, d.w.z. voor elk paar elementen $x, y \in X$ kunnen we een $g \in G$ vinden zodat $y = g.x$.

Voorbeeld 5.1 Laat X de verzameling van zijden een een hexaëder (cubus) zijn en beschouw de cyclische groep $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ voortgebracht door de rotatie-symmetrie van de cubus met als as de rechte door de middelpunten van boven- en ondervlak en rotatie-hoek 90° .



Deze actie heeft juist 3 orbits, nl. de zijden van het ondervlak, de rechtopstaande zijden en de zijden van het bovenvlak. Omdat geen van de zijden op z'n plaats gelaten wordt onder de actie van $\bar{0} \neq g \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ volgt dat de stabilisator-deelgroepen G_x allemaal triviaal zijn $G_x = \{\bar{0}\}$.

Twee deelgroepen H en H' van een groep G noemen we *geconjugeerd* als we een $g \in G$ kunnen vinden zodat

$$H' = g.H.g^{-1} = \{g.h.g^{-1} \mid h \in H\}$$

en twee elementen $h, h' \in G$ noemen we *geconjugeerd* als $h' = g.h.g^{-1}$ voor zekere $g \in G$.

De conjugatie-notie definieert een *equivalentie relatie* op elementen van G en de bijhorende equivalentie-klassen noemen we de *conjugatie-klassen* van G .

Stelling 5.2 Onder een G -actie op X hebben punten in dezelfde orbit geconjugeerde stabilisator deelgroepen.

Bewijs. Stel $y \in \mathcal{O}(x)$ d.w.z. $y = g.x$ dan beweren we dat $g.G_x.g^{-1} = G_y$. Om te beginnen geldt $g.G_x.g^{-1} \subset G_y$ want als $h \in G_x$ dan

$$(g.h.g^{-1}).y = g(h(g^{-1}.y)) = g(h.x) = g.x = y$$

dus $g.h.g^{-1} \in G_y$. De omgekeerde inclusie volgt uit $g^{-1}.G_y.g \subset G_x$. $\square$

Als H een deelgroep is van G dan kunnen we een equivalentie-relatie definiëren

$$g \sim g' \quad \text{als en slechts als} \quad \exists h \in H : g' = h.g$$

(ga na dat dit een equivalentie-relatie is). De equivalentie-classes voor deze relatie noemen we de *links nevenklassen van H in G* en de verzameling van deze nevenklassen noteren we met G/H . Merk op : G/H is *niet noodzakelijk* opnieuw een groep. Ga na wanneer dit wel het geval is!

Stelling 5.3 Voor een G -actie op X geldt dat voor alle $x \in X$ de afbeelding

$$g.x \mapsto gG_x$$

een bijectie geeft tussen de orbit $\mathcal{O}(x)$ en de nevenklassen G/G_x . Bijgevolg is het aantal elementen in de orbit $\mathcal{O}(x)$ gelijk aan $|G|/|G_x|$.

Bewijs. De afbeelding is duidelijk surjectief. Stel nu g, g' zodat $gG_x = g'G_x$ dan is $g' = g.h$ voor zekere $h \in G_x$ maar dan geldt dat

$$g'.x = (g.h).x = g(h.x) = g.x$$

en bijgevolg bepalen $g'.x$ en $g.x$ hetzelfde punt in de orbit $\mathcal{O}(x)$, d.w.z. de afbeelding is ook injectief. $\square$

Een toepassing van deze stelling is dat de orde van de rotatie-symmetrie groep van het dodecaëder orde 60 moet hebben. Immers, de groep werkt transitief op alle zijvlakken (d.i. er is slechts 1 orbit) en de orde van de stabilisator deelgroep van een zijvlak is 5. Omdat $|\mathcal{O}(x)| = 12$ (het totaal aantal zijvlakken) volgt dat

$$|G| = |\mathcal{O}(x)||G_x| = 12.5 = 60$$

Duaal met de notie van stabilisator deelgroep definiëren we de *verzameling van fixpunten*

$$X^g = \{x \in X \mid g.x = x\}$$

als de elementen van X die door $g \in G$ op zichzelf worden afgebeeld. We kunnen nu het aantal orbits van een G -actie op X tellen.

Stelling 5.4 (tel-stelling) Het aantal verschillende orbits voor een G -actie op X wordt gegeven door de formule

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

D.w.z. het aantal orbits is het gemiddelde aantal elementen dat door een element van G gefixed blijft.

Bewijs. Het aantal elementen

$$\# \{(g, x) \in G \times X \mid g.x = x\}$$

kan zowel opgevat worden als $\sum_{g \in G} |X^g|$ als $\sum_{x \in X} |G_x|$. Omdat punten in dezelfde orbit geconjugeerde stabilisatoren hebben kunnen we de tweede som herschrijven als

$$\sum_{i=1}^k \sum_{x \in X_i} |G_x| = \sum_{i=1}^k |X_i| |G_{\bar{x}}|$$

waar $X_1, \dots, X_k$ de verschillende orbits zijn en $\bar{x} \in X_i$ een gekozen punt. Maar dit is gelijk aan

$$\sum_{i=1}^k |\mathcal{O}(\bar{x})| |G_{\bar{x}}| = \sum_{i=1}^k |G| = k|G|$$

gebruikmakend van de voorgaande stelling. We hebben dus bewezen dat

$$\sum_{g \in G} |X^g| = \sum_{x \in X} |G_x| = k|G|$$

waaruit het gestelde volgt. □

In het bovenstaane voorbeeld van de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ -actie op de zijden X van een kubus hebben we dat $X^0 = X$ en dat $X^g = \emptyset$ voor alle $g \neq \bar{0}$. Dus krijgen we

$$\# \text{ orbits} = \frac{1}{4}(12 + 0 + 0 + 0) = 3$$

Stelling 5.5 Voor een G -actie op X geldt

$$|X^h| = |X^{h'}|$$

wanneer $h' = g.h.g^{-1}$ geconjugeerd zijn.

Bewijs. als $x \in X^h$ dan beweren we dat $g.x \in X^{h'}$. Immers,

$$h'.(g.x) = (g.h.g^{-1}).(g.x) = g(h(g^{-1}.g.x)) = g(h.x) = g.x$$

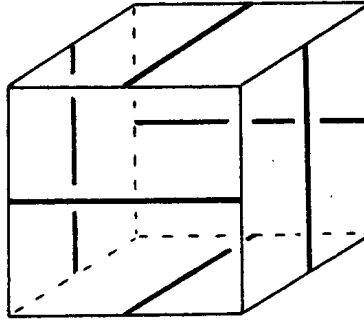
Analoog geldt dat als $y \in X^{h'}$ dan ook $g^{-1}.y \in X^h$ en beide afbeeldingen geven de gevraagde bijectie tussen X^h en $X^{h'}$. □

Veronderstel dat twee kinderen Alice en Bob een voorraad kubussen hebben en twee verfpotten (rood en blauw). Zij kleuren de kubussen op volgende wijze

- (Alice) : kleur elke zijde van de kubus ofwel rood ofwel blauw.

- (Bob) : Verdeel elk zijvlak in twee gelijke delen met een horizontale of verticale rode of blauwe rechte zodat geen van deze rechten elkaar raakt.

Bob's kleur-regel kan beter begrepen worden met een tekening



Welk van beiden kan de meeste essentieel verschillende gekleurde kubussen produceren? Hierbij noemen we twee kleur-kubussen essentieel verschillend als ze niet door een rotatie-symmetrie in elkaar omgezet kunnen worden.

Dus, b.v.b. als Alice het bovenvlak blauw schildert en alle andere vlakken rood is dat essentieel dezelfde kubus als deze met alle vlakken rood behalve 1 zijvlak blauw. De rotatie symmetrieën voor het probleem van Alice is de volledige rotatie symmetrie groep van de kubus.

We herhalen dat de rotatie-symmetrie groep van het hexaëder (de kubus) de octaëder groep $\mathbb{O} \simeq S_4$ is, de permutatie groep op 4 letters. De identificatie wordt gegeven door de 4 letters te interpreteren als de 4 hoofddiagonalen van de kubus. We moeten eerst de conjugatie klassen bepalen in S_4 . (Meer informatie kan je ook vinden in de cursus 'Algebra').

In de permutatie groep S_n , neem een *cykel*

$$h = (a_1, a_2, \dots, a_r) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_r \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{bmatrix}$$

en een willekeurige permutatie

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ g(1) & g(2) & \dots & g(n) \end{bmatrix}$$

dan weten we dat het geconjugeerde element $g.h.g^{-1}$ gelijk is aan

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ g(1) & g(2) & \dots & g(n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_r \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g(1) & g(2) & \dots & g(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix}$$

en deze permutatie is gelijk aan

$$\begin{bmatrix} g(a_1) & g(a_2) & \dots & g(a_r) \\ g(a_2) & g(a_3) & \dots & g(a_1) \end{bmatrix} = (g(a_1), g(a_2), \dots, g(a_r))$$

Stelling 5.6 Twee permutaties $\sigma, \tau \in S_n$ zijn geconjugeerd als en slechts als ze dezelfde cykel-lengten hebben.

Bewijs. Hierboven hebben we al gezien dat twee geconjugeerde permutaties dezelfde cykel-lengten hebben. Uit het bewijs volgt eveneens dat als

$$\begin{cases} \sigma = (a_1, \dots, a_{i_1})(b_1, \dots, b_{i_2}) \dots (z_1, \dots, z_{i_k}) \\ \tau = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i_1})(\beta_1, \dots, \beta_{i_2}) \dots (\zeta_1, \dots, \zeta_{i_k}) \end{cases}$$

dan is $\tau = g \cdot \sigma \cdot g^{-1}$ wanneer we als permutatie nemen

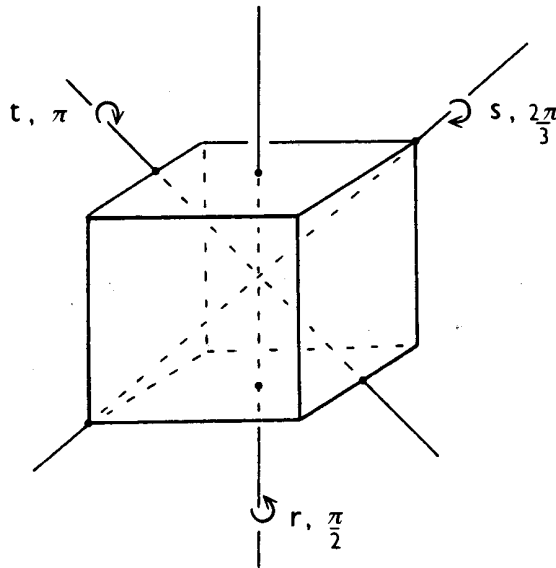
$$g = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & b_1 & \dots & z_1 & \dots & z_{i_k} \\ \alpha_1 & \dots & \beta_1 & \dots & \zeta_1 & \dots & \zeta_{i_k} \end{bmatrix}$$

waaruit het gestelde volgt. □

De groep $\mathbb{O} = S_4$ heeft dus precies 5 conjugatie-klassen waarvan we als representanten kunnen nemen

$$\begin{cases} (1, 2, 3, 4) \text{ de conjugatie-klasse bevat 6 elementen} \\ (1, 2, 3)(4) \text{ de conjugatie-klasse bevat 8 elementen} \\ (1, 2)(3, 4) \text{ de conjugatie-klasse bevat 3 elementen} \\ (1, 2)(3)(4) \text{ de conjugatie-klasse bevat 6 elementen} \\ (1)(2)(3)(4) \text{ de conjugatie-klasse bevat 1 element.} \end{cases}$$

We gaan nu rotatie-symmetrieën in $\mathbb{O}$ vinden die deze klassen representeren.



Ga na, door de actie van deze rotaties op de 4 hoofddiagonalen van de kubus te beschrijven dat volgende rotaties corresponderen met de 5 conjugatie-classes

$$\begin{cases} r \leftrightarrow (1, 2, 3, 4) \\ r^2 \leftrightarrow (1, 2)(3, 4) \\ s \leftrightarrow (1, 2, 3)(4) \\ t \leftrightarrow (1, 2)(3)(4) \\ I_3 \leftrightarrow (1)(2)(3)(4) \end{cases}$$

Het kleur-probleem van Alice : We hebben nu alle informatie om het kleur-probleem op te lossen. De actie die we bekijken is deze van de octaëder groep $\mathbb{O}$ op de eindige verzameling X bestaande uit $2^6 = 64$ elementen van alle mogelijke gekleurde kubussen.

We moeten het aantal gekleurde kubussen bepalen $|X^g|$ dat invariant gelaten wordt onder een rotatie $g \in \{r, r^2, s, t, I_3\}$. Als een kubus identiek blijft onder r dan moeten alle zijvlakken dezelfde kleur hebben, dus hebben we 2 mogelijkheden voor zowel bovenzvlak als ondervlak als zijvlakken, in totaal

$$|X^r| = 8$$

Voor r^2 moeten enkel voor- en achtervlak en links- en rechts-zijvlak dezelfde kleur hebben, dus hebben we

$$|X^{r^2}| = 16$$

Onder s gaan de 6 zijvlakken als volgt

$$\begin{cases} \text{bovenvlak} \longrightarrow \text{rechts-zijvlak} \longrightarrow \text{achtervlak} \longrightarrow \text{bovenvlak} \\ \text{ondervlak} \longrightarrow \text{links-zijvlak} \longrightarrow \text{voorvlak} \longrightarrow \text{ondervlak} \end{cases}$$

en beiden deelverzamelingen kunnen 2 kleuren krijgen. Bijgevolg

$$|X^s| = 4$$

De rotatie t verwisselt voor- en achtervlak, bovenzvlak met links zijvlak en ondervlak met rechts zijvlak. Bijgevolg

$$|X^t| = 2^3 = 8$$

en natuurlijk hebben we dat $|X^{I_3}| = 64$. Het totale aantal orbits van de actie wordt dus gegeven door

$$\frac{1}{|G|} \sum_{conj} |conj| |X^g| = \frac{1}{24} (6 \cdot 8 + 3 \cdot 16 + 8 \cdot 4 + 6 \cdot 8 + 1 \cdot 64) = 10$$

Het kleur-probleem van Bob : De groep van rotatie-symmetrieën die de kubus met de grid van lijnen invariant laat is *niet* $\mathbb{O} = S_4$ (r verbreekt het grid) maar de deelgroep A_4 die orde 12 heeft en waarvan de conjugatie-klassen gegeven worden door

$$\begin{cases} r^2 & \text{de conjugatie-klasse bestaat uit 3 elementen} \\ s & \text{de conjugatie-klasse bestaat uit 4 elementen} \\ s^2 & \text{de conjugatie-klasse bestaat uit 4 elementen} \\ I_3 & \text{de conjugatie-klasse bestaat uit 1 element} \end{cases}$$

Ga na (zoals boven) dat ditmaal de fixpunt verzamelingen volgende getallen leveren

$$|X^{r^2}| = 16, \quad |X^s| = 4, \quad |X^{s^2}| = 4 \quad \text{en} \quad |X^{I_3}| = 64$$

Als we deze informatie weer stoppen in onze formule krijgen we dat het totaal aantal A_4 -orbits op X gelijk is aan

$$\frac{1}{12}(3 \cdot 16 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 64) = \frac{144}{12} = 12$$

en dus kan Bob twee kubussen meer kleuren dan Alice.

Evariste Galois (25 Oct 1811 Bourg La Reine, 31 May 1832 Paris)



In 1831 was Galois de eerste die realiseerde dat het probleem om wortels van polynomen met expliciete formules te beschrijven verband hield met de structuur van een groep, de zgn. *Galois groep van de vergelijking*. In 1832 voerde hij het begrip van normaaldelers in en bewees wat we nu kennen als *Galois theorie*. Verder ontdekte hij de notie van links- en rechts-nevenklassen van een groep t.o.v. een deelgroep.

Hij bewees dat men een vergelijking niet met radicalen kan oplossen als de groep niet-Abels en *simpel* is, d.w.z. als de groep geen echte normaaldelers heeft. Hij toonde aan

dat de minimale orde van een niet-Abelse simpele groep 60 is (de groep die we nu kennen als de groep A_5 (de icosaeëder groep).

Meer informatie over het (dramatische) leven van Galois kan je vinden op

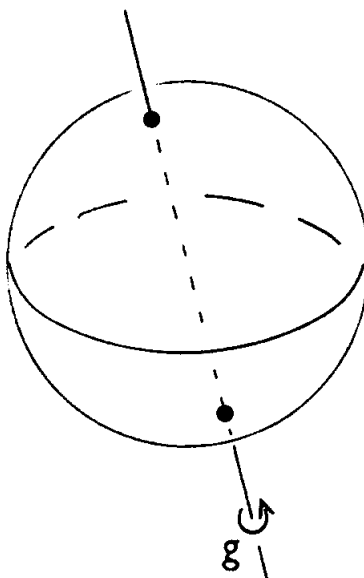
<http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Galois.html>

les 6

DE KLASSIFICATIE

In deze les bewijzen we de hoofdstelling van deze cursus, namelijk de klassificatie van alle eindige rotatie groepen.

Als G een eindige deelgroep is van $SO_3(\mathbb{R})$ met eenheidselement e dan is ieder element van $G - \{e\}$ een niet triviale rotatie en heeft bijgevolg 2 *polen* (de snijpunten van de rotatie as van g met de eenheids-sfeer)



Met X noteren we de verzameling van alle polen van elementen van $G - \{e\}$. Omdat $SO_3(\mathbb{R})$ de rotatie-symmetrie groep is van de eenheidssfeer S^2 is er een $SO_3(\mathbb{R})$ -actie

$$SO_3(\mathbb{R}) \times S^2 \longrightarrow S^2$$

en dus zal ook iedere eindige deelgroep $G \subset SO_3(\mathbb{R})$ een actie definiëren op S^2 .

Als $x \in X$ een pool is van $h \in G$ dan is $g.x$ opnieuw een punt op de eenheids-sfeer voor iedere $g \in G$. We beweren nu dat $g.x$ opnieuw in de verzameling X zit en i.h.b.

dat $g.x$ een pool is van het element $g.h.g^{-1}$. Immers,

$$(g.h.g^{-1}).(g.x) = (g.h).x = g.x$$

We hebben dus een G -actie op de verzameling X van polen.

Stelling 6.1 *De G -actie op de polen X heeft ten hoogste 3 verschillende orbits.*

Bewijs. Laat N het aantal orbits zijn en kies een punt $x_1, x_2, \dots, x_N$ in iedere orbit. Iedere rotatie $g \in G - \{e\}$ laat juist 2 polen invariant en het element e laat alle $|X|$ polen invariant. De tel-stelling levert ons dus

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{|G|} (2(|G| - 1) + |X|) \\ &= \frac{1}{|G|} (2(|G| - 1) + \sum_{i=1}^N |\mathcal{O}(x_i)|) \end{aligned}$$

Dit kunnen we herschrijven als

$$\begin{aligned} 2(1 - \frac{1}{|G|}) &= N - \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^N |\mathcal{O}(x_i)| \\ &= N - \sum_{i=1}^N \frac{1}{|G_{x_i}|} \\ &= \sum_{i=1}^N (1 - \frac{1}{|G_{x_i}|}) \end{aligned}$$

Omdat $|G| \geq 2$ is de linkerkant $1 \leq 2(1 - \frac{1}{|G|}) < 2$. Eveneens is de orde van elk van de stabilisator deelgroepen tenminste 2 en dus hebben we ook dat voor alle $1 \leq i \leq N$

$$\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{|G_{x_i}|} < 1$$

en dus moet N gelijk zijn aan 2 of 3. □

Stelling 6.2 *Als de G -actie op de polen X juist $N = 2$ orbits heeft, dan is G een cyclische groep $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

Bewijs. De relatie in vorig bewijs levert ons voor $N = 2$:

$$2(1 - \frac{1}{|G|}) = N - \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^N |\mathcal{O}(x_i)| = 2 - \frac{1}{|G|} (|\mathcal{O}(x_1)| + |\mathcal{O}(x_2)|)$$

en bijgevolg is $2 = |\mathcal{O}(x_1)| + |\mathcal{O}(x_2)| = |X|$. Dus er zijn slechts 2 polen en bijgevolg heeft iedere niet triviale rotatie in G dezelfde rotatie-as. Kies $g \in G - \{e\}$ met minimale rotatie-hoek dan volgt dat alle andere elementen van G machten van g zijn (Euklidisch-type argument) en dus is G cyclisch. $\square$

Stelling 6.3 *Als de G -actie op de polen X juist $N = 3$ orbits heeft dan zijn enkel de volgende gevallen mogelijk voor de orden van de stabilisator deelgroepen*

$$(|G_x|, |G_y|, |G_z|) = \begin{cases} (2, 2, n) & n \geq 2 \\ (2, 3, 3) \\ (2, 3, 4) \\ (2, 3, 5) \end{cases}$$

Bewijs. Noteer $\{x, y, z\}$ voor $\{x_1, x_2, x_3\}$ dan hebben we de gelijkheid

$$2(1 - \frac{1}{|G|}) = 3 - (\frac{1}{|G_x|} + \frac{1}{|G_y|} + \frac{1}{|G_z|})$$

wat herschreven kan worden als

$$1 + \frac{2}{|G|} = \frac{1}{|G_x|} + \frac{1}{|G_y|} + \frac{1}{|G_z|} \quad (\dagger)$$

dus moet de som van de drie rechtse termen groter dan 1 zijn en dit levert enkel de aangehaalde mogelijkheden. $\square$

We bekijken nu alle gevallen afzonderlijk :

Geval 1a $|G_x| = |G_y| = |G_z| = 2$: Uit $(\dagger)$ volgt dat G een groep is van orde 4 en omdat alle elementen $G - \{e\}$ orde twee hebben is G de groep van Klein

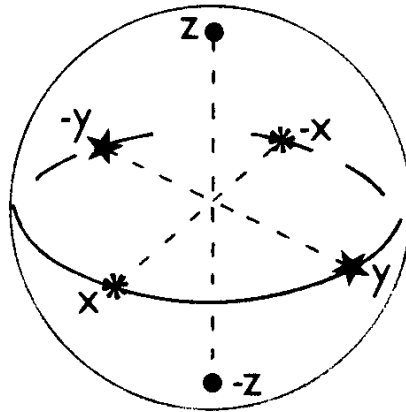
$$G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Als g de voortbrenger is van G_z dan volgt uit het feit dat rotaties afstandsbehoudend zijn dat

$$d(x, z) = d(g.x, g.z) = d(g.x, z) \quad \text{en} \quad d(y, z) = d(g.y, g.z) = d(g.y, z)$$

Dus moet $\mathcal{O}(z) = \{z, -z\}$ en hebben we dat $g(x) = -x$ en $g(y) = -y$. Maar dan staan de drie assen door x, y en z loodrecht op elkaar en de drie G -orbits kunnen

voorgesteld worden als

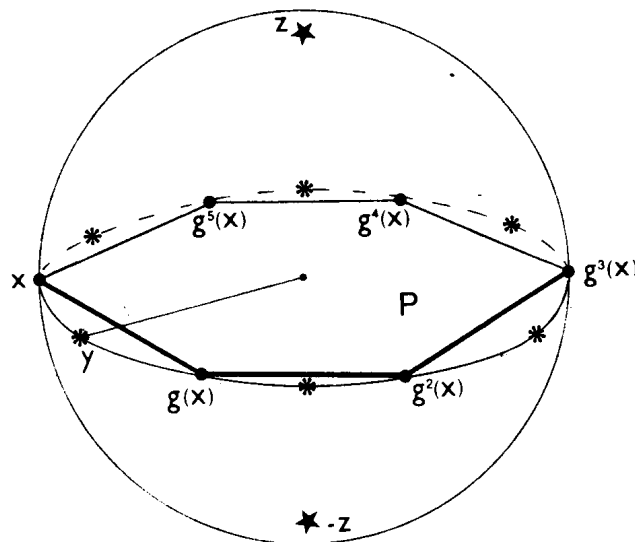


merk op dat $G \simeq D_4$ de diheder groep op 4 elementen.

Geval 1b $|G_x| = |G_y| = 2$ en $|G_z| = n \geq 3$: De as door z wordt invariant gelaten door elke rotatie in G_z en dus hebben we met een Euklides-type argument dat G_z een cyclische groep is van orde n . Laat g een rotatie zijn met minimal rotatie-hoek dan beweren we dat de punten

$$\{x, g.x, g^2.x, \dots, g^{n-1}.x\}$$

allen verschillend zijn.



Als immers $g^r.x = g^s.x$ dan is $g^{r-s} \in G_x$, maar $\{z, -z\}$ zijn de enige polen die invariant gelaten worden onder $g^{r-s} \in G_z$ en $g^{r-s}.x \neq -z$ omdat $|G_x| = 2$ en $|G_{-z}| = |G_z| \geq 3$. Verder bewaart g afstanden en dus

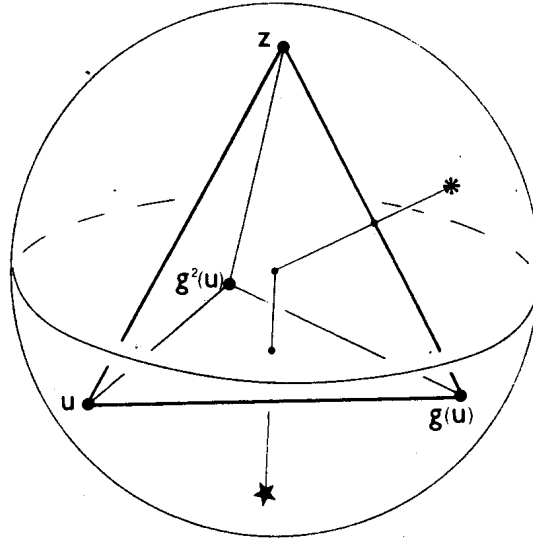
$$d(x, g.x) = d(g.x, g^2.x) = \dots = d(g^{n-1}.x, x)$$

Daarom zijn $\{x, g.x, \dots, g^{n-1}.x\}$ de hoekpunten van een regelmatige n -hoek en omdat G orde $2n$ heeft en deze veelhoek in zichzelf voert onder elk van zijn elementen moet G de rotatie-symmetrie groep zijn van de veelhoek en dus is G de diheder groep op $2n$ elementen.

Geval 2 $|G_x| = 2$ and $|G_y| = |G_z| = 3$: Uit (†) volgt dat de orde van G gelijk is aan 12. De orbit $\mathcal{O}(z)$ bestaat uit $|G|/|G_z| = 4$ elementen en kies een $u \in \mathcal{O}(z) - \{z\}$. Omdat $|G_z| = 3$ is de stabilisator deelgroep G_z cyclisch, b.v.b. met generator g . Bijgevolg zijn de overblijvende punten van de orbit

$$\mathcal{O}(z) = \{z, u, g.u, g^2.u\}$$

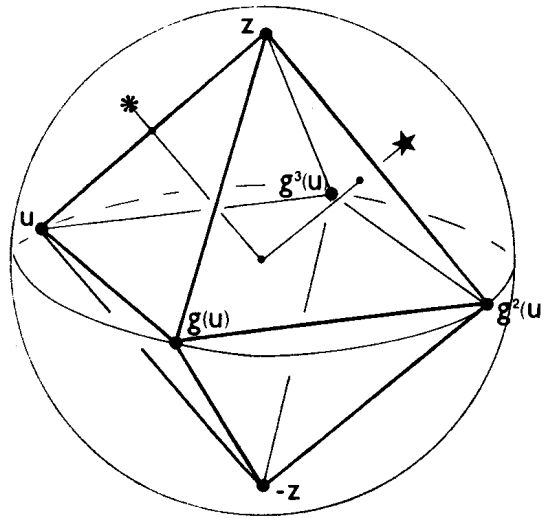
en omdat g de afstand bewaart hebben we dus als voorheen dat $u, g.u$ en $g^2.u$ de hoeken zijn van een gelijkzijdige driehoek. Herhaal dit argument nu met u ipv. z , d.w.z. $z, g.u$ en $g^2.u$ zijn ook de zijden van een gelijkzijdige driehoek en dus liggen alle vier de punten op gelijke afstand van elkaar, m.a.w. ze vormden de hoekpunten van een tetraëder. Omdat G weer de juiste orde heeft volgt dat $G = \mathbb{T}$. de volgende figuur toont de drie orbits van polen



Geval 3 $|G_x| = 2$, $|G_y| = 3$ en $|G_z| = 4$: dan volgt uit (†) dat $|G| = 24$. Er zijn bijgevolg 6 punten in $\mathcal{O}(z)$ dus kies een punt $u \in \mathcal{O}(z) - \{z, -z\}$ en kies een generator g voor G_z dan

$$\{z, u, g.u, g^2.u, g^3.u\} \subset \mathcal{O}(z)$$

en wederom vormen $u, g.u, g^2.u, g^3.u$ de hoekpunten van een vierkant met zijden gelijk aan de afstand van elk van deze punten tot z . M.a.w. als z de noordpool is liggen de 4 punten $u, g.u, g^2.u$ en $g^3.u$ in het evenaarsvlak en is $-u = g^2.u$. We missen nog 1 punt in de orbit maar dat moet op gelijke afstand van $u, g.u, g^2.u, g^3.u$ liggen dus kan enkel $-z$ zijn. Bijgevolg vormt deze orbit de hoekpunten van een octaëder. Wederom wegens $|G| = 24 = \mathbb{O}$ hebben we dat $G \simeq \mathbb{O}$. De pool-orbits worden beschreven in de figuur



Geval 4 $|G_x| = 2, |G_y| = 3$ and $|G_z| = 5$: De orde van G is 60 en de orbit $\mathcal{O}(z)$ bestaat uit 12 punten. Kies twee punten $u, v \in \mathcal{O}(z)$ zodanig dat

$$0 < d(z, u) < d(z, v) < 2$$

Dit doen we als volgt : omdat G_z cyclisch is kiezen we $g \in G_z$ met minimale rotatiehoek en dan liggen

$$\{u, g.u, g^2.u, g^3.u, g^4.u\}$$

op een regelmatige 5 hoek en al deze punten liggen even ver van z . Omdat dit niet heel de orbit is bestaat er dus een punt v op grotere afstand van z zodat ook de punten

$$\{v, g.v, g^2.v, g^3.v, g^4.v\}$$

de hoekpunten van een regelmatige 5-hoek vormen en allen dezelfde afstand tot z hebben. We missen dus nog 1 punt in de orbit $\mathcal{O}(z)$ en dit kan enkel $-z$ zijn.

Bekijk u dan moet ook $-u \in \mathcal{O}(u) = \mathcal{O}(z)$ en omdat $d(u, -u) = 2$ moet $-u$ een van de punten uit $\{v, g.v, g^2.v, g^3.v, g^4.v\}$ zijn. Hernummer indien nodig zodanig dat

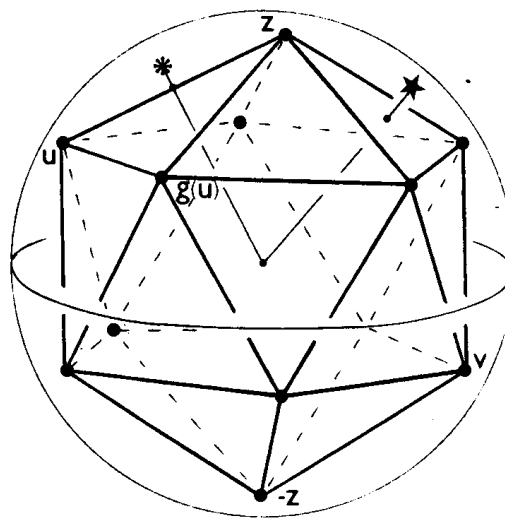
$$-u = v$$

en dus ook $-g^r \cdot u = g^r \cdot v$ voor $1 \leq r \leq 4$. Vanuit u kijken zien we 11 punten waarvan de 5 dichtsbijzijnde

$$\{z, g \cdot u, g^3 \cdot v, g^2 \cdot v, g^4 \cdot u\}$$

even ver van u moeten liggen. Uit dit alles volgt dat de 12 punten de hoekpunten vormen van een icosaeëder.

Omdat $|G| = 60 = |\mathbb{I}|$ hebben we dat $G \simeq \mathbb{I}$. De resterende orbits van polen worden voorgesteld in de figuur



Felix Klein (25 April 1849 Düsseldorf, 22 June 1925 in Göttingen)



In deze cursus hebben we gezien dat er een nauw verband is tussen *meetkunde* (veelvlakken van Plato) en de bijhorende *symmetrie groepen* (groepen van Plato). Felix Klein was de eerste die het belang van meetkundige eigenschappen die invariant gelaten worden onder een groep van transformaties inzag. Deze synthese vatte hij samen in zijn *Erlanger Program* (1872).

Plato's groepen leiden ook tot de zgn. *groepen van Klein*. Beschouw de *spin-groep*

$$SU_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} : a\bar{a} + b\bar{b} = 1 \right\}$$

dan zullen we zien dat er een groep-morfisme bestaat

$$SU_2(\mathbb{C}) \longrightarrow SO_3(\mathbb{R})$$

met als kern $\pm I_2$. Bijgevolg kunnen we ieder van de Plato groepen *liften* tot een deelgroep van $SU_2(\mathbb{C})$ met orde tweemaal deze van de Plato groep. Deze eindige deelgroepen van $SU_2(\mathbb{C})$ noemen we de groepen van Klein.

Meer informatie over het leven en werk van Felix Klein kan je vinden op

<http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Klein.html>

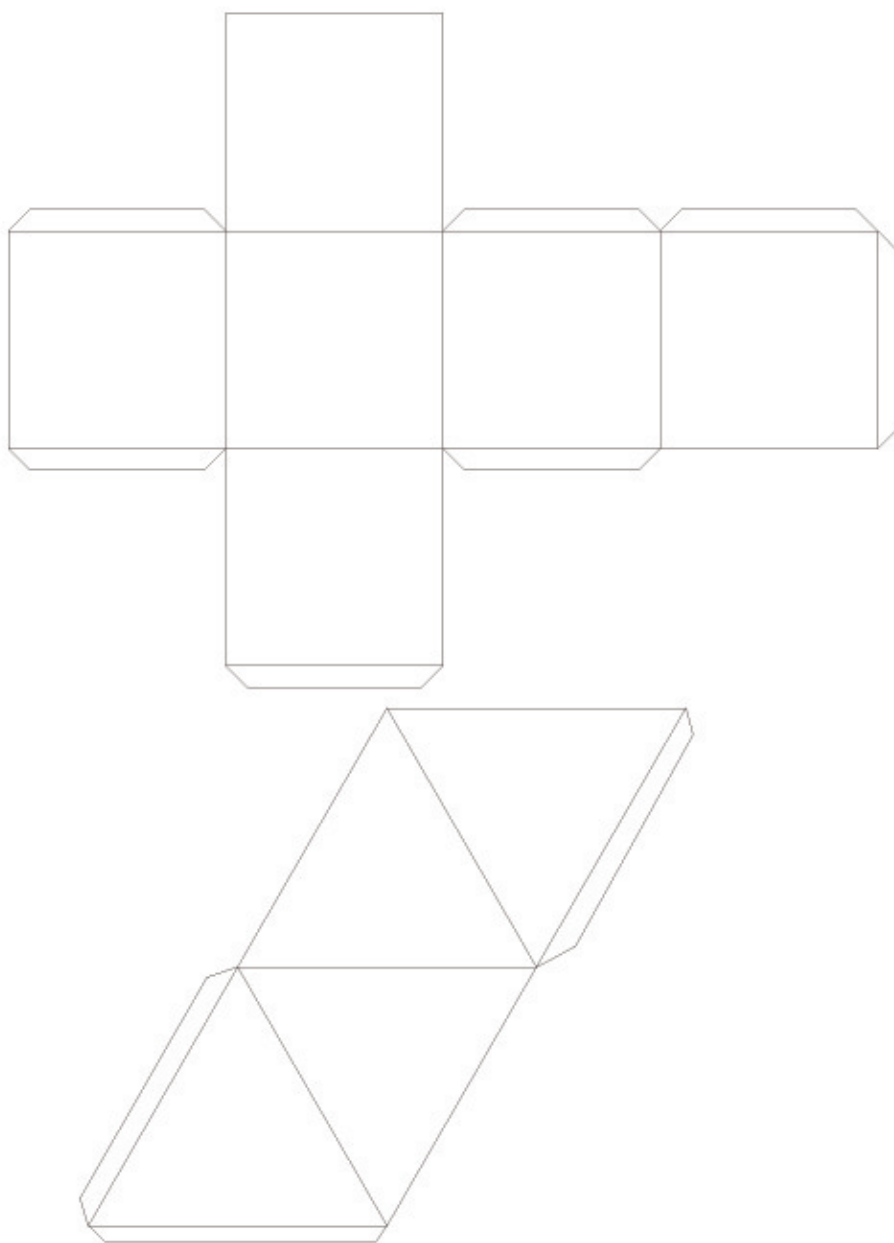
appendix A

PAPIER MODELLEN

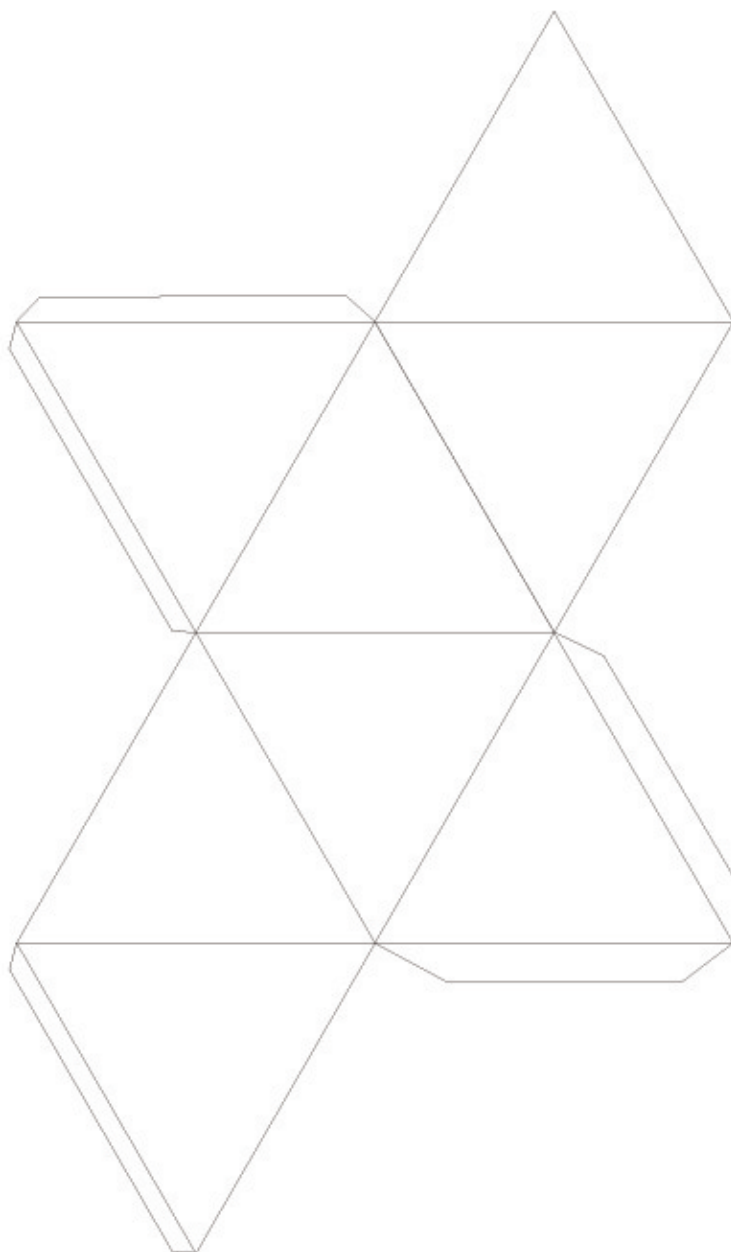
Om een beter inzicht te verwerven omtrent de symmetrie van de veelvlakken van Plato is het nuttig je eigen model te maken van deze veelvlakken. Op de volgende paginas vind je eenvoudige plannen. Hier is wat je moet doen :

1. Kopieer deze plannen met vergroting op een stevig A3 papier.
2. Gebruik een breekmes om de uiterste rand van de plannen uit te snijden.
3. Vouw alle zijden en breng in de gewenste vorm.
4. Plak vast met behulp van de kleinere strippen.

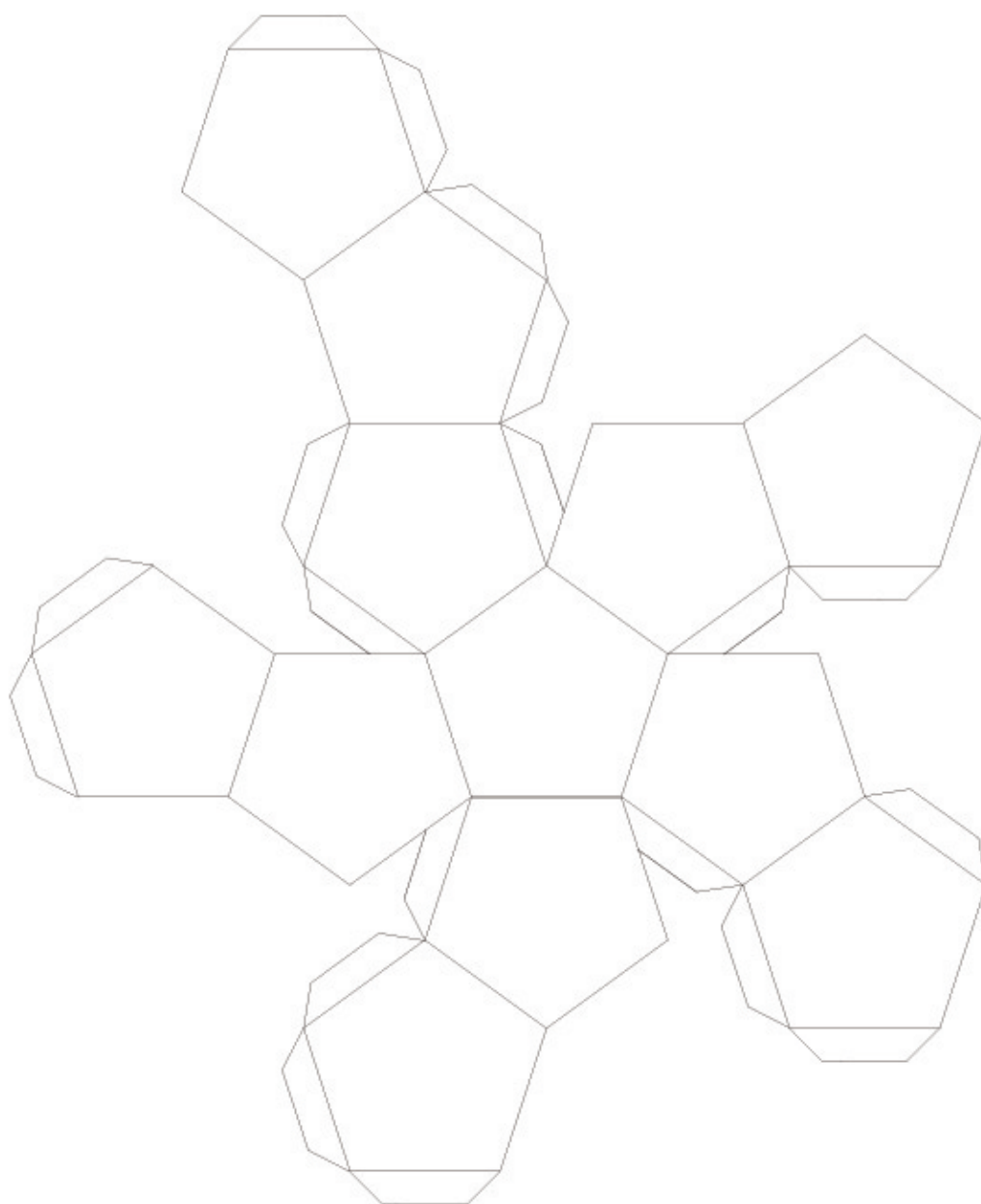
tetraëder en hexaëder.

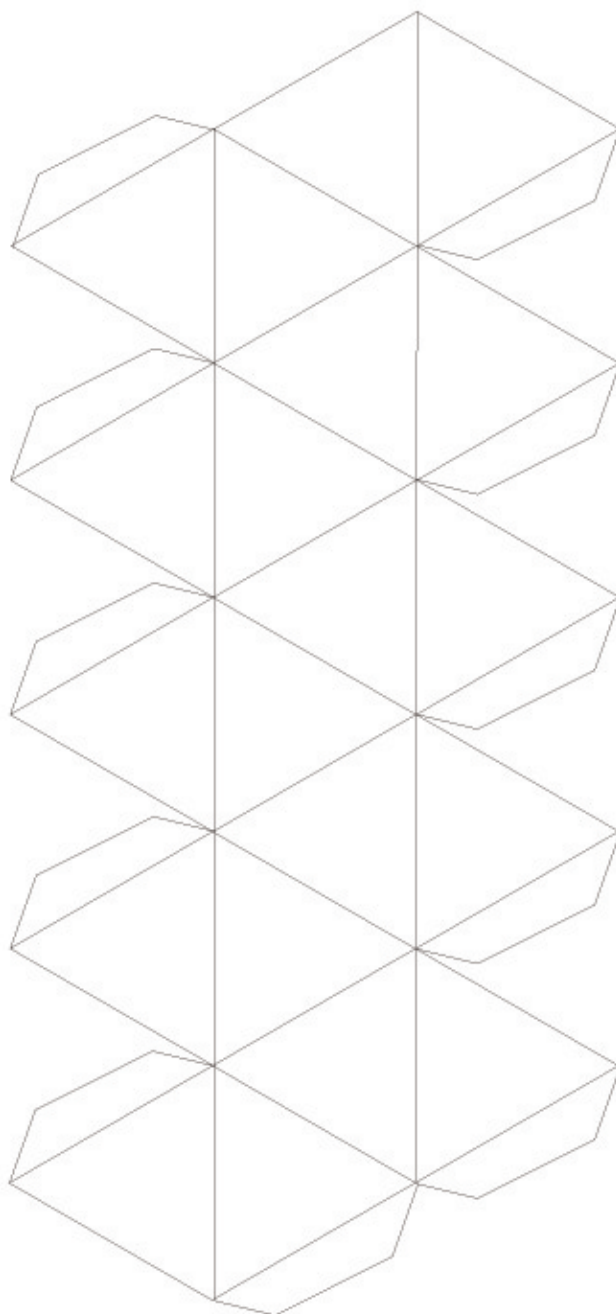


octaëder.



dodecaëder.



icosaëder.

appendix B

GAP

GAP (groeps, Algorithms, Programming) is een uiterst krachtig freeware pakket voor de bestudering van groepen. Je kan versies downloaden voor Linux, Mac OS X of Windows vanaf

<http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~gap/Download/index.html>

De belangrijkste routines om te werken met (permutatie)groepen kan je vinden in hoofdstuk 5 van de online tutorial

<http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~gap/Manuals/doc/htm/tut/chapters.htm>

Een volledige manual van alle routines staat eveneens online en wel op

<http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~gap/Manuals/doc/htm/ref/chapters.htm>

We zullen enkel voorbeelden geven van GAP-toepassingen. Laat ons eerst nagaan dat de symmetrie groep van het dodecaheder inderdaad de alternerende groep A_5 is.

```
gap> dode:=group((1,2,3,4,5)(6,8,10,12,14)(7,9,11,13,15)(16,17,18,19,20),
> (1,6,7,8,2)(3,5,15,16,9)(4,14,20,17,10)(12,13,19,18,11));
groep([ (1,2,3,4,5)(6,8,10,12,14)(7,9,11,13,15)(16,17,18,19,20),
(1,6,7,8,2)(3,5,15,16,9)(4,14,20,17,10)(11,12,13,19,18) ])
gap> Size(dode);
60
gap> IsSimplegroup(dode);
true
gap> IsomorphismTypeInfoFiniteSimplegroup(dode);
rec( series := "A", parameter := 5,
name := "A(5) ~ A(1,4) = L(2,4) ~ B(1,4) = O(3,4) ~ C(1,4) = S(2,4) ~ 2A(1,4)
) = U(2,4) ~ A(1,5) = L(2,5) ~ B(1,5) = O(3,5) ~ C(1,5) = S(2,5) ~ 2A(1,5) = U
(2,5)" )
gap>
```

We definiëren eerst de groep *dode* als permutatie-groep (zoals voorheen) en berekenen het aantal elementen. Vervolgens vragen we of dit een simpele groep en na bevestiging

dan is de groep van alle transformaties voortgebracht door de volgende permutaties :

$$F = (17, 19, 24, 22)(18, 21, 23, 20)(6, 25, 43, 16)(7, 28, 42, 13)(8, 30, 41, 11)$$

$$B = (33, 35, 40, 38)(34, 37, 39, 36)(3, 9, 46, 32)(2, 12, 47, 29)(1, 14, 48, 27)$$

$$L = (9, 11, 16, 14)(10, 13, 15, 12)(1, 17, 41, 40)(4, 20, 44, 37)(6, 22, 46, 35)$$

$$R = (25, 27, 32, 30)(26, 29, 31, 28)(3, 38, 43, 19)(5, 36, 45, 21)(8, 33, 48, 24)$$

$$U = (1, 3, 8, 6)(2, 5, 7, 4)(9, 33, 25, 17)(10, 34, 26, 18)(11, 35, 27, 19)$$

$$D = (41, 43, 48, 46)(42, 45, 47, 44)(14, 22, 30, 38)(15, 23, 31, 39)(16, 24, 32, 40)$$

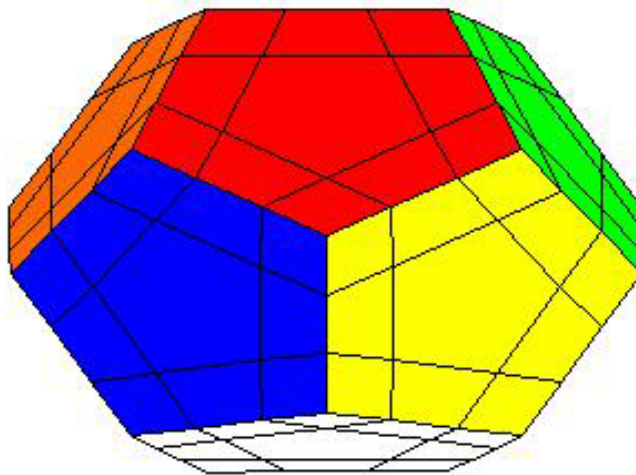
De *rubik-groep* kan dus gedefinieerd worden als een permutatie groep en de orde kan ervan bekomen worden via GAP

```
gap> rubik:=group(f,b,l,r,u,d);
<permutation group with 6 generators>
gap> Size(rubik);
43252003274489856000
```

waarvan de priem-ontbinding gelijk is aan

$$\#rubik = 2^{27}3^{14}5^37^211$$

Men kan ook Rubik-achtige constructies maken met andere Platonische veelvlakken. b.v.b. op de dodecaëder bestaat het spel *Megaminx*.



Ieder zijvlak is opgedeeld in 11 gebieden en we kunnen bijgevolg de groep van alle transformaties van megaminx opvatten als een permutatie deelgroep op $11 \cdot 12 = 132$ elementen. Met een goede ordening van deze gebieden kunnen we wederom de orde van megaminx door GAP laten berekenen.

```

f1:=(1,3,5,7,9)(2,4,6,8,10)(20,31,42,53,64)(19,30,41,52,63)(18,29,40,51,62);
f2:=(12,14,16,18,20)(13,15,17,19,21)(1,60,73,84,31)(3,62,75,86,23)(2,61,74,85,32);
f3:=(23,25,27,29,31)(24,26,28,30,32)(82,95,42,3,16)(83,96,43,4,17)(84,97,34,5,18);
f4:=(34,36,38,40,42)(35,37,39,41,43)(27,93,106,53,5)(28,94,107,54,6)(29,95,108,45,7);
f5:=(45,47,49,51,53)(46,48,50,52,54)(38,104,117,64,7)(39,105,118,65,8),(40,106,119,56,9);
f6:=(56,58,60,62,64)(57,59,61,63,65)(49,115,75,20,9)(50,116,76,21,10),(51,117,67,12,1);
f7:=(67,69,71,73,75)(68,70,72,74,76)(58,113,126,86,12)(59,114,127,7,13),(60,115,128,78,14);
f8:=(78,80,82,84,86)(79,81,83,85,87)(71,124,97,23,14)(72,125,98,24,15),(73,126,89,25,16);
f9:=(89,91,93,95,97)(90,92,94,96,98)(80,122,108,34,25)(81,123,109,35,26),(82,124,100,36,27);
f10:=(100,102,104,106,108)(101,103,105,107,109)(91,130,119,45,36),(92,131,120,46,37)(93,122,111,47,38);
f11:=(111,113,115,117,119)(112,114,116,118,120)(102,128,67,56,47),(103,129,68,57,48)(104,130,69,58,49);
f12:=(122,124,126,128,130)(123,125,127,129,131)(100,89,78,69,111),(101,90,79,70,112)(102,91,80,71,113);

```

```

megaminx:=group(f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,f8,f9,f10,f11,f12);
Size(megaminx);
334475145672456352879405902704518629337637316656901
490514783567615081677862248149468343708263599249065
407881894660704527626720429470406092994924055719482
5002982480260628480000000000000000000000000000000000

```

waarvan de priem-ontbinding gelijk is aan

$$\# \text{megaminx} = 2^{115} 3^{58} 5^{28} 7^{19} 11^{10} 13^9 17^7 19^6 23^5 29^4 31^3 37^3 41^2 43^2 47^2 53^2 59^2$$

$$61.67.71.73.79.83.89.97.101.103.107.109.113$$