# Lie groepen en representatietheorie

Lieven Le Bruyn

U.I.Antwerpen 1994

# Deel 1
# Conjugatie klassen van matrixen

In dit eerste deel zullen we het generieke representatie probleem behandelen. Dit kan volledig gesteld worden in lineaire algebra. Noteer met $\mathbb{C}$ het lichaam van de complexe getallen en met $M_n(\mathbb{C})$ de $n^2$-dimensionale vectorruimte van $n \times n$ matrixen over $\mathbb{C}$.
Met $GL_n(\mathbb{C})$ noteren we de groep van de omkeerbare $n \times n$ matrixen, dit is, de deelverzameling $\{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid det(A) \neq 0\}$. Matrix-vermenigvuldiging zet een groepsstruktuur op $GL_n(\mathbb{C})$.
De groep $GL_n(\mathbb{C})$ werkt op $M_n(\mathbb{C})$ door conjugatie, dat is

$$GL_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$$

$$(g, A) \to g.A.g^{-1}$$

Deze aktie breidt uit tot een $GL_n(\mathbb{C})$ aktie op $m$-tuppels van $n \times n$ matrixen en het hoofdprobleem kan als volgt geformuleerd worden.

**Probleem 0.0.1** *Klassificeer $m$-tuppels $n \times n$ matrixen op gelijktijdige conjugatie na. Dat is, gegeven twee $m$-tuppels*

$$(A_1, ..., A_m), (B_1, ..., B_m) \in M_n(\mathbb{C}) \oplus ... \oplus M_n(\mathbb{C})$$

*bestaat er een $g \in GL_n(\mathbb{C})$ zodat*

$$B_i = g.A_i.g^{-1} \ \forall 1 \leq i \leq m$$

*en beschrijf de equivalentie-klassen.*

# Hoofdstuk 1

# Voorbeelden : $2 \times 2$ matrixen

Vooraleer we het algemene probleem behandelen is het nuttig eerst een zo volledig mogelijk beeld te krijgen van de eenvoudigste gevallen, namelijk $2 \times 2$ matrixen.

## 1.1 Eén $2 \times 2$ matrix

Twee matrixen $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ noemen we geconjugeerd en we schrijven $A \sim B$ asa er een $g \in GL_n(\mathbb{C})$ bestaat zodat $B = g.A.g^{-1}$. De stelling van de **Jordan normaalvorm** stelt dat iedere matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ op verwisseling van de 'kastjes' na met juist één matrix van de volgende vorm geconjugeerd is

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 & & 0 \\ 0 & J_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & J_m \end{bmatrix}$$

Hierin heeft elk 'kastje' $J_i$ de vorm

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

waar $\lambda_1, ..., \lambda_m$ de **eigenwaarden** van de matrix $A$ zijn, dat is, de wortels van het **karakteristiek polynoom** $det(tI_n - A) = 0$. Verder zullen we met $C_A$ steeds de conjugatieklasse van $A$ noteren, d.i. $C_A = \{g.A.g^{-1} \mid g \in GL_n(\mathbb{C})\}$.
Specializeren we nu tot het geval $n = 2$, dan is een volledig representantensysteem voor de conjugatie klassen gegeven door de matrixen

$$\{\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C}\} \bigcup \{\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$$

Als $A$ twee verschillende eigenwaarden $\lambda \neq \mu$ heeft dan is $C_A$ door de eigenwaarden eenduidig bepaald. De matrixen met tweevoudige eigenwaarde $\lambda$ vormen de twee verschillende conjugatie-klassen

$$C_{\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}} \text{ en } C_{\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}}$$

We gaan nu deze resultaten meetkundig voorstellen. We vatten de vectorruimte $M_2(\mathbb{C})$ op als de vier-dimensionale affiene ruimte $\mathbb{A}^4$ met coordinaat-functies $(a, b, c, d)$. Onder deze identificatie sturen we een matrix

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ naar het 4-tuple } (a, b, c, d)$$

Ideaal gesproken zouden we nu een 'quotient-varieteit' willen bepalen, dat is, een affiene varieteit (d.i. een deelverzameling van een $\mathbb{A}^k$ bepaald als de gemeenschappelijke nulpunt verzamelingen van een stel polynomen in de coordinaat functies $x_1, ..., x_k$ van $\mathbb{A}^k$) waarvan de punten juist de conjugatie klassen vam $2 \times 2$ matrixen representeren. We zullen echter zien dat dit onmogelijk is. Niettemin kunnen we een zo goed mogelijke benadering voor dit probleem zoeken.
Hiervoor hebben we invariante reguliere functies op $\mathbb{A}^4 \simeq M_2(\mathbb{C})$ nodig, dit zijn polynomen $p(a, b, c, d)$ die constant blijven op conjugatie klassen. Standaard voorbeelden zijn het **spoor** $sp(A) = a + d$ en de **determinant** $det(A) = ad - bc$. Hiermee kunnen we een reguliere afbeelding maken

$$\pi : M_2(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{A}^4 \to \mathbb{A}^2 \simeq \mathbb{C}^2$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to (a + d, ad - bc)$$

Het karacteristiek polynoom voor een $2 \times 2$ matrix $A$ is

$$t^2 - sp(A)t + det(A) = 0$$

en bijgevolg heeft $A$ twee gelijke eigenwaarden als de discriminant van deze vergelijking

$$sp(A)^2 - 4det(A)$$

nul is. Of, in termen van de coordinaat functies $(x, y)$ van de beeld-ruimte $\mathbb{A}^2$ : een matrix $A$ heeft tweevoudige eigenwaarde asa $\pi(A)$ ligt op de curve

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 \mid x^2 - 4y = 0\}$$

d.i. een 1-dimensionale gesloten deelvarieteit van $\mathbb{A}^2$. De voorgaande opmerkingen over de Jordan-normaal vormen kunnen nu samengevat worden in :

**Stelling 1.1.1** *$\pi : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{A}^2$ is surjectief en constant op conjugatie klassen. De vezels $\pi^{-1}(P)$ voor $P \in \mathbb{A}^2$ hebben devolgende vorm*

1. *Voor $P \in \mathbb{A}^2 - K$ bestaat de vezel uit één conjugatie klasse*

$$\pi^{-1}(P) = C_{\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}}$$

   *met $\lambda \neq \mu \in \mathbb{C}$.*

2. *Voor $P \in K$ bestaat de vezel uit 2 conjugatie klassen*

$$\pi^{-1}(P) = C_{\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}} \cup C_{\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}}$$

   *voor een $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Als we $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ conjugeren met $g = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon^{-1} \end{bmatrix}$ krijgen we de matrix $\begin{bmatrix} \lambda & \epsilon^2 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$. Door $\epsilon \to 0$ zien we dat $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ in de afsluiting ligt (zowel in de gewone analytische als de **Zariski** topologie) van

$$C_{\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}}$$

Hieruit besluiten we dat er geen affiene varieteit kan bestaan waarvan de punten juist de conjugatie klasse parametrizeren vermits dan het punt horend bij de conjugatieklasse van $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ niet gesloten kan zijn.
Wat is er nu zo speciaal aan deze welbepaalde reguliere afbeelding $\pi$ ?

**Stelling 1.1.2** *Ieder polynoom $p(a, b, c, d)$ dat constant is op elke conjugatie klasse is een polynoom in $sp(A) = a + d$ en $det(A) = ad - bc$.*

**Bewijs :** Zij $f$ een reguliere functie op $\mathbb{A}^4 \simeq M_2(\mathbb{C})$, d.i. $f$ is evaluatie van een polynoom $p(a, b, c, d)$, dan moeten we aantonen dat $f$ factorizeert over $\pi$ en dus een polynoom is in de coordinaat functies $(sp, det)$ van $\mathbb{A}^2$.
We hebben een reguliere map

$$i : \mathbb{A}^2 \to M_2(\mathbb{C})$$

$$(x, y) \to \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -y & x \end{bmatrix}$$

zodat $\pi \circ i = id_{\mathbb{A}^2}$.

Als nu $f$ een reguliere functie is op $M_2(\mathbb{C})$ kunnen we de reguliere functie $g = f \circ i : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{C}$ bekijken. Vermits $f$ constant is op conjugatie klassen is $f$ ook constant op de sluiting van een klasse ($f$ is continu), dus is $f$ constant op de vezels $\pi^{-1}(P)$. Maar dan geldt wegens constructie dat $g \circ \pi = f$ en klaar. $\square$

Als we met $\mathbb{C}[a,b,c,d]^{GL_2}$ de deelring van $\mathbb{C}[a,b,c,d]$ bestaande uit alle reguliere functies die constant zijn op conjugatie klassen dan hebben we aangetoond dat

$$\mathbb{C}[a+d, ad-bc] = \mathbb{C}[a,b,c,d]^{GL_2}$$

Tenslotte geeft de natuurlijke inclusie

$$\mathcal{O}(\mathbb{A}^2) = \mathbb{C}[a+d, ad-bc] \subset \mathbb{C}[a,b,c,d] = \mathcal{O}(M_2(\mathbb{C}))$$

aanleiding tot een reguliere afbeelding

$$M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{A}^2$$

waarvan men gemakkelijk ziet dat dit de afbeelding $\pi$ is. $\pi$ is bijgevolg de beste algebraische benadering van de (onbestaande) quotient-varieteit.

We kunen echter wel een keten van goede quotient-varieteiten maken. De grote obstructie tegen het bestaan van een echt totaal quotient is het bestaan van niet gesloten conjugatie klassen. We kunnen echter kijken naar de verzameling $U \subset M_2(\mathbb{C})$ bestaande uit matrixen $A$ waarvan

$$dim(C_A) = 2 \text{ of equivalent } dim(\{g \in GL_2(\mathbb{C}) \mid g.A = A.g\}) = 4 - 2 = 2$$

dan gaat men na dat $U$ een Zariski-open deel is van $M_2(\mathbb{C})$ (ga als oefening na dat het complement $M_2(\mathbb{C}) - U$ de gesloten deelvarieteit $V(b, c, a-d)$ is) met de eigenschap dat alle conjugatie klassen **in** $U$ gesloten zijn (de dimensie van een klasse die echt in de afsluiting van een andere ligt is strikt kleiner, bvb. de conjugatie klasse van $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ is het punt zelf, dus heeft dimensie 0). Bijgevolg kan met hiervan wel een goed quotient verwachten en inderdaad :

$$\pi : U \to \mathbb{A}^2$$

de restrictie van $\pi$ tot het open deel is een quotient. Blijven nog de orbits op het gesloten deel $M_2(\mathbb{C}) - U$. Alle conjugatie klassen hier zijn de punten zelf, en de projectie map

$$\pi_2 : M_2(\mathbb{C}) - U \to \mathbb{A}^1$$
$$(a,b,c,d) \to a$$

is een quotient. We kunnen dus alle conjugatie klassen parametrizeren met

$$\mathbb{A}^2 \bigcup \mathbb{A}^1$$

en we zeggen dat dit klassificatie probleem een **cellulaire ontbinding** van de quotient-ruimte toelaat.

ut → 17



## 1.2 Twee $2 \times 2$ matrixen

Voor $(A, B) \in M_2(\mathbb{C}) \oplus M_2(\mathbb{C})$ willen we representanten vinden voor de conjugatie klasse

$$C_{(A,B)} = \{(g.A.g^{-1}, g.B.g^{-1}) \mid g \in GL_2(\mathbb{C})\}$$

We kunnen hier niet zoals in vorige sectie een beroep doen op een bestaand resultaat in lineaire algebra.
Wel kunnen we trachten de meetkundige behandeling uit te breiden. Beschouw dus de 8-dimensionale vectorruimte $M_2(\mathbb{C}) \oplus M_2(\mathbb{C})$ als een 8-dimensionale affiene ruimte $X_2 = \mathbb{A}^8$ met coordinaat functies $(a, b, c, d, e, f, g, h)$ via de identificatie

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) \to (a, b, c, d, e, f, g, h)$$

Met behulp van reguliere invariante functies op $X$ willen we wederom een zo goed mogelijke benadering maken van de quotient-ruimte. Hiervoor bekijken we de reguliere afbeelding

$$\pi : X \simeq M_2(\mathbb{C}) \oplus M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{A}^5$$

$$(A, B) \to (sp(A), det(A), sp(B), det(B), sp(A.B))$$

en we noemen de coordinaat functies in de beeldruimte $x_1, ..., x_5$.

**Lemma 1.2.1** *$\pi$ is een surjectieve afbeelding.*

**Bewijs :** Op het open deel $Y_1$ bepaald door $x_1^2 \neq 4x_2$ kunnen we een representant in $C_{(A,B)}$ vinden van de vorm

$$\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right)$$

waar $\lambda \neq \mu$ en beiden zijn bepaald door $x_1, x_2$. We moeten dus een oplossing vinden in de onbekenden $a, b, c, d$ van het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} x_3 = & e + h \\ x_5 = & \lambda e + \mu f \\ x_4 = & eh - fg \end{cases}$$

De eerste twee vergelijkingen zijn steeds oplosbaar omdat $\lambda \neq \mu$ en substitueren in de laatste levert ons $f, g$ (op factor na).
Analoog liggen ook alle punten in het open deel $Y_2$ bepaald door $x_3^2 \neq 4x_4$ in het beeld van $\pi$.

Resteert nog te bewijzen dat punten in het complement van $Y_1 \cup Y_2$, d.i. punten die voldoen aan $x_1^2 = 4x_2$ en $x_3^2 = 4x_4$, in het beeld van $\pi$ liggen. Bekijk nu het koppel

$$\left( \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ \alpha & \mu \end{bmatrix} \right)$$

dan is $\lambda$ (resp. $\mu$) bepaald door $x_1, x_2$ (resp. $x_3, x_4$). Rest nog in te zien dat

$$x_5 = 2\mu\lambda + \alpha$$

steeds een oplossing heeft. □

We gaan nu een stratificatie definiëren op de beeldruimte $Y = \mathbb{A}^5$ en de vezels bestuderen van $\pi : X \to Y$ in de verschillende strata.
Definieer de deelverzameling $U$ van $X = M_2(\mathbb{C}) \oplus M_2(\mathbb{C})$ als

$$U = \{(A, B) \mid \ A \text{ en } B \text{ hebben een gemeenschappelijke eigenvector } \}$$

De volgende stelling impliceert i.h.b. dat $U$ een gesloten deelvarieteit is van $X$.

**Stelling 1.2.1** *1. $(A, B) \in U$ asa $C_{(A,B)}$ een koppel opper triangulaire matrixen bevat.*

*2. $V = \pi(U)$ is de gesloten deelvarieteit van $Y$ bepaald door de vergelijking*

$$x_5^2 - x_1x_3x_5 + x_1^2x_4 + x_3^2x_2 - 4x_2x_4 = 0$$

**Bewijs :** (1) : Neem $v = (x, y)^t$ met $A.v = \lambda v$ en $B.v = \mu v$. Kies nu een nieuwe basis $(v, w)$ van $\mathbb{C}^2$ en laat $g \in GL_2$ de coordinaat veandering $(e_1, e_2) \to (v, w)$ voorstellen. Dan zijn $(g.A.g^{-1}, g.B.g^{-1})$ een koppel matrixen met $(1, 0)^t$ als gemeenschappelijke eigenvector. Bijgevolg moeten deze matrixen opper triangulair zijn (oefening).
(2) : Neem een opper triangulaire representant $(A, B)$ van de conjugatie klasse

$$\left( \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \right)$$

De eigenwaarden $a_1, a_2$ (resp. $b_1, b_2$) worden bepaald door $x_1, x_2$ (resp. $x_3, x_4$) enkel op verwisseling na. Bijgevolg is $sp(A.B)$ één van beide uitdrukkingen

$$a_1b_1 + a_2b_2 \text{ of } a_1b_2 + a_2b_1$$

maar dan moet $(A, B)$ voldoen aan de vergelijking

$$(sp(A.B) - a_1b_1 - a_2b_2)(sp(A.B) - a_1b_2 - a_2b_1) = 0$$

dit kunnen we nu uitdrukken in de invariante functies gebruikmakend van $sp(A) = a_1 + a_2, det(A) = a_1a_2, sp(B) = b_1 + b_2$ en $det(B) = b_1b_2$. Als we de verkregen vergelijking dan uitschrijven in de coordinaat functies $x_i$ volgt het gestelde. $\square$

Verder bekijken we het beeld onder $\pi$ van koppels van scalaire matrixen

$$\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\right)$$

Dus $W$ is de verzameling 5-tuppels $(2a, a^2, 2b, b^2, 2ab)$ in $Y = \mathbb{A}^5$ en is bijgevolg een gesloten deelvarieteit, nl.

$$W = V(x_1^2 - 4x_2, x_3^2 - 4x_4, x_1x_3 - 2x_5)$$

en we hebben inclusies van gesloten deelvarieteiten

$$W \subset V \subset Y$$

We gaan nu de vezels bestuderen in de lokaal gesloten 'strata' $Y - V$, $V - W$ en $W$.

**Stelling 1.2.2** *Voor ieder punt $p \in Y$ noteer met $p_0$ het koppel matrixen $(\frac{1}{2}x_1I_2, \frac{1}{2}x_3I_2)$.*

1. *Als $p \in V - W$ dan bestaat de vezel $\pi^{-1}(p)$ uit 3 klassen met representanten $p_0 + v$ waar $v$ één van volgende koppels is (in het geval $x_1^2 \neq 4x_2$ anders moet de rol van beide componenten omgewisseld worden)*

$$\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b & 1 \\ 0 & -b \end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -b & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}\right)$$

   *Hierin zijn $a$ resp. $b$ uniek bepaald door $x_1, x_2$ (resp. $x_3, x_4$) en niet beiden 0.*

2. *Als $p \in W$ dan bestaat de vezel $\pi^{-1}(p)$ uit een $\mathbb{P}^1$ van klassen met representanten $p_0 + v$ met $v$ één van de koppels*

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

   *met $(u : v) \in \mathbb{P}^1$ alsook de triviale klasse $p_0$*

**Bewijs :** Oefening. $\square$

Tenslotte moeten we nog de vezel van punten in $Y - V$ bestuderen.

**Stelling 1.2.3** *Als $p \in Y - V$ dan bestaat de vezel $\pi^{-1}(p)$ uit een unieke klasse.*

**Bewijs :** Neem een koppel $(A, B)$ in de vezel en veronderstel eerst dat $x_1^2 \neq 4x_2$, dan is $(A, B)$ geconjugeerd met

$$\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right)$$

We weten dat $fg \neq 0$ (want anders hebben $A$ en $B$ een gemeenschappelijke eigenvector). Dus kunnen we met conjugeren met een $\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{bmatrix}$ ervoor zorgen dat bvb. $f = 1$. Verder zijn $\lambda \neq \mu$ beiden bepaald door $x_1$ en $x_2$. We beweren nu dat $e, g, h$ uniek bepaald zijn door het stelsel

$$\begin{cases} x_3 = & e + h \\ x_4 = & eh - g \\ x_5 = & \lambda e + \mu h \end{cases}$$

Nl. $e = \frac{\mu x_3 - x_5}{\mu - \lambda}, h = \frac{x_5 - \mu x_3}{\mu - \lambda}$ en $g = eh - x_4$ dan de klasse van $(A, B)$ is uniek bepaald door het punt $p = (x_1, \ldots, x_5) \in Y - V$.
Resteert het geval wanneer $A$ een tweevoudige eigenwaarde heeft. Ga over naar het koppel $(A', B)$ met $A' = \alpha A + \beta B$ waar $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$. Eerst merken we op dat $(A', B) \notin U$ asa $(A, B) \notin U$. Verder bepaalt $\pi(A, B)$ eenduidig $\pi(A', B)$ want

$$\begin{cases} sp(A') = & \alpha sp(A) + \beta sp(B) \\ det(A') = & \alpha^2 det(A) + \beta^2 det(B) + \alpha\beta(sp(A)sp(B) - sp(AB)) \\ sp(A'B) = & \alpha sp(AB) + \beta(sp(B)^2 - 2det(B)) \end{cases}$$

(deze gelijkheden krijgen we door het spoor te nemen van de karacteristieke polynomen). Als we nu nog kunnen aantonen dat voor sommige $\alpha, \beta$ de matrix $A'$ verschillende eigenwaarden heeft dan zijn we klaar wegens het voorgaande. Immers is $(A', B)$ dan volledig bepaald door zijn beeld en dus ook (voor vastgelegde $\alpha, \beta$) $(A, B)$.
Stel dat $sp(A')^2 = 4det(A')$ voor alle $\alpha, \beta$ dan krijgen we door vergelijken van de coefficienten van deze vergelijking in $\alpha, \beta$ de condities

$$\begin{cases} sp(A)^2 = & 4det(A) \\ sp(B)^2 = & 4det(B) \\ sp(AB) = & \frac{1}{2} sp(A)sp(B) \end{cases}$$

Deze kennis substitueren in de vergelijkig van $\pi(U)$ geeft dat $(A, B) \in U$ een contradictie en klaar. $\square$

**Gevolg 1.2.1** *De punten van $Y = \mathbb{A}^5$ parametrizeren de gesloten klassen in $X = M_2(\mathbb{C}) \oplus M_2(\mathbb{C})$.*

**Bewijs :** $\pi^{-1}(p)$ is steeds gesloten dus als $p \in Y - V$ dan is de unieke klasse die $p$ bepaalt gesloten in $X$. Als $p \in V - W$ dan ligt de klasse bepaald door de tweede representant in de sluiting van de overige twee (aan te tonen door conjugatie met matrixen van de vorm $\begin{bmatrix} t^{\pm} & 0 \\ 0 & t^{\mp} \end{bmatrix}$ ) en is de klasse van minimale dimensie (2 de overige klassen hebben dimensie 3) in het gesloten deel $\pi^{-1}(p)$ van $X$ dus is deze klasse gesloten. Tenslotte correspondeert de triviale klasse $p_0$ boven $p \in W$ met de unieke gesloten klasse (wederom ligt dit punt in de afsluiting van alle andere klassen boven $p$). □

**Gevolg 1.2.2** *$\mathbb{C}[sp(A), det(A), sp(B), det(B), sp(AB)]$ is de ring van invariante reguliere functies $\mathbb{C}[a, b, c, d, e, f, g, h]^{GL_2}$.*

**Bewijs :** We zullen later algemeen zien dat de affiene varieteit bepaald door de ring van invariante functies de gesloten klassen parametrizeert dus is wegens voorgaande de canonieke inclusie in feite een gelijkheid. □

Dus wederom is onze keuze van $\pi$ de beste algebraische benadering van de quotient-ruimte. Vermits we alle klassen hebben gekaracterizeerd kunnen we ons de meer ambitieuze vraag stellen of er ee cellulaire decompositie voor dit klassificatie probleem bestaat. Laat ons even recapituleren. Het aantal klassen en hun dimensies zijn als volgt

1. Boven $p \in Y - V$ een unieke gesloten klasse van dimensie 3
2. Boven $p \in V - W$ twee klassen van dimensie 3 en 1 van dimensie 2 die gesloten is
3. Boven $p \in W$ een $\mathbb{P}^1$ van klassen van dimensie 2 en 1 triviale klasse van dimensie 0 dus gesloten

Vermits de punten van $Y = \mathbb{A}^5$ de gesloten klassen in $X$ parametrizeren hebben we al 1 cel : $\mathbb{A}^5$. Ons doel is nu ook de niet gesloten klassen met cellen te parametrizeren. Merk op dat al deze klassen leven op $U = \{(A, B) \mid A \text{ en } B \text{ hebben een gemeenschappelijke eigenvector}\}$. We gaan nu in $U$ een gesloten deelvarieteit definieren

$$C = \{(A, B) \mid A \text{ en } B \text{ commuteren}\}$$

(oefening : ga na dat $C$ gesloten is in $X$).

**Lemma 1.2.2** *Alle conjugatie klassen $C_{(A,B)}$ zijn gesloten in $U - C$.*

**Bewijs :** Merk op dat $C$ de unie is van $\pi^{-1}(W)$ en van de gesloten 2-dimensionale klassen boven $V - W$. Bijgevolg is de dimensie van alle klassen in $U - C$ gelijk aan 3 en hun randpunten liggen allemaal in $C$. □

We verwachten dus dat we een goede quotient-varieteit van $U - C$ kunnen vormen. Uit onze beschrijving van representanten voor de klassen in $U - C$ volgt dat alle koppels $(A, B) \in U - C$ de eigenschap hebben dat ze een unieke niet-triviale eigenruimte hebben $\mathbb{C}(x, y)^t$ met eigenwaarden zeg $(\lambda, \mu)$. Merk op dat de eigenwaarden constant blijven op een klasse in $U - C$ (omdat al deze koppels een uniek bepaalde eigenruimte hebben). Op $U - C$ hebben we bijgevolg invariante functies die een mogelijk quotient definieren :

$$\pi' : U - C \to \mathbb{A}^4$$

$$(A, B) \to (sp(A), sp(B), \lambda(A, B), \mu(A, B))$$

we moeten echter nog nagaan dat de functies $\lambda(A, B)$ en $\mu(A, B)$ verkregen kunnen worden uit de coordinaten van $(A, B)$.
Veronderstel bijgevolg dat

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

met $A.v = \lambda v$ en $B.v = \mu v$. Dit levert volgens stel vergelijkingen

$$\begin{cases} 0 = & (a - \lambda)x + by \\ 0 = & cx + (d - \lambda)y \\ 0 = & (e - \mu)x + fy \\ 0 = & gx + (h - \mu)y \end{cases}$$

We **veronderstellen** nu even dat

$$b.c.f.g.x.y \neq 0$$

dan hebben we de volgende gelijkheden

$$\begin{cases} f(a - \lambda) = & b(e - \mu) \\ g(d - \lambda) = & c(h - \mu) \end{cases}$$

Waaruit we $\lambda$ en $\mu$ kunnen distileren

$$\begin{cases} \lambda = \lambda(A, B) = & \frac{b(gd-ch)-c(fa-be)}{bg-fc} \\ \mu = \mu(A, B) = & \frac{g(fa-be)-f(gd-ch)}{bg-fc} \end{cases}$$

**Stelling 1.2.4** *1. De functies $\lambda(A, B), \mu(A, B)$ zijn invariante* ***rationale*** *functies op de varieteit $U$*

*2. De functies $\lambda(A, B), \mu(A, B)$ zijn gedefinieerd op alle klassen $C_{(A,B)}$ in $U - C$*

*3. De rationale afbeelding $\pi' : U - C \to \mathbb{A}^4$ bepaalt de klassen eenduidig*

**Bewijs :**
(1) : Ga als oefening na dat $\lambda$ en $\lambda' = sp(A) - \lambda$ (resp. $\mu$ en $\mu' = sp(B) - \mu$) de eigenwaarden zijn van $A$ (resp. $B$) als $(A, B) \in U$ en bijgevolg zijn ze invariant onder conjugatie met $GL_2(\mathbb{C})$. In (2) zullen we i.h.b. zien dat de noemer $bg - fc$ niet identiek nul is op $U$ en bijgevolg zijn de functies rationale functies op $U$.
(2) : Neem $(A, B) \in U - C$ en veronderstel dat bvb. $A$ verschillende eigenwaarde heeft dan bevat $C_{(A,B)}$ een koppel $(A', B')$ van de vorm

$$\left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 & 1 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}\right)$$

Natuurlijk zijn de rationale functies $\lambda(A, B), \mu(A, B)$ niet gedefinieerd in $(A', B')$ maar we kunnen gaan kijken naar een ander punt in de orbit. Dat is, stel

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$$

$$P = (I_2 + X)^{-1}.A'.(I_2 + X) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$Q = (I_2 + X)^{-1}.B'.(I_2 + X) = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

Verder is natuurlijk

$$(I_2 + X)^{-1} = I_2 - X - X^2 - X^3 - \dots$$

en kunnen we bijgevolg de termen van $P$ en $Q$ op ordetermen in de $x_i$ eenvoudig uitrekenen en het gestelde aantonen. We kunnen ook de volledige termen uitrekenen en krijgen dan als we met $D = (1 + x_1)(1 + x_4) - x_2x_3$ noteren

$$\begin{cases} b = & \frac{1}{D}((a_1 - a_2)x_2(1 + x_4)) \\ c = & \frac{1}{D}((a_2 - a_1)(1 + x_1)x_3) \\ f = & \frac{1}{D}((1 + (b_1 - b_2)x_2 + x_4)(1 + x_4)) \\ g = & \frac{1}{D}(x_3((b_2 - b_1)(1 + x_1) - x_3)) \end{cases}$$

Waaruit we krijgen dat

$$bg - cf = \frac{(a_1 - a_2)x_3(1 + x_4)}{D}$$

en omdat $a_1 - a_2 \neq 0$ kunnen we dus steeds een andere representant in de orbit vinden zodat $\lambda(A, B), \mu(A, B)$ welgedefinieerde rationale functies zijn.
(3) : Dit volgt uit onze berekening van alle klassen boven punten van $V - W$ (oefening). $\square$

**Stelling 1.2.5** *De quotient-ruimte van alle klassen $C_{(A,B)}$ bevat een cell $\mathbb{A}^4$.*

**Bewijs :** Uit de beschrijving van klassen boven $V - W$ volgt dat de enige punten die niet in het beeld van de map

$$\pi' : U - C \to \mathbb{A}^4$$

liggen van de vorm $(a, b, 0, 0)$ zijn. Aan deze punten kunnen we echter de klasse associeren boven het punt $(a, \frac{a^2}{4}, b, \frac{b^2}{4}, \frac{ab}{2}) \in W$ corresponderend met bvb. het punt $(0 : 1) \in \mathbb{P}^1$. □

De enige klassen die nog niet een punt in de cellen $\mathbb{A}^5 \cup \mathbb{A}^4$ bepalen liggen boven een punt $(2a, a^2, 2b, b^2, 2ab) \in W$ en corresponderen met een punt $(1 : c) \in \mathbb{P}^1$. Het is duidelijk dat deze klassen een 3-cell $\mathbb{A}^3$ bepalen. Samenvattend :

**Stelling 1.2.6** *Het klassificatie probleem van koppels $2 \times 2$ matrixen onder ge/-lijktijdige conjugatie laat een cellulaire ontbinding van de quotient-ruimte toe in cellen*

$$\{C_{(A,B)}\} = \mathbb{A}^5 \bigcup \mathbb{A}^4 \bigcup \mathbb{A}^3$$

## 1.3 Meerdere $2 \times 2$ matrixen

De voorgaande voorbeelden kunnen de illusie wekken dat de beste algebraische benadering van de quotient-ruimte steeds een affiene ruimte $\mathbb{A}^k$ is. Dit is echter ver van waar, men kan zelfs aantonen dat het enige geval van $m$-tuppels $n \times n$ matrixen met $m > 1, n > 1$ met deze eigeschap juist koppels van $2 \times 2$ matrixen is. Laat ons dit illustreren voor het geval van trippels $2 \times 2$ matrixen $(A, B, C) \in M_2(\mathbb{C}) \oplus M_2(\mathbb{C}) \oplus M_2(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{A}^{12}$. We hebben volgende invariante reguliere functies

$$p = (sp(A), det(A), sp(B), det(B), sp(C), det(C), sp(AB), sp(BC), sp(AC))$$

maar er zijn er meer !

**Lemma 1.3.1** *$sp(ABC)$ is geen polynoom in de componenten van $p$.*

**Bewijs :** $sp(ABC)$ is lineair in de entries van $A, B$ en $C$ en is symmetrisch in de 3 matrixen. Dus als het een polynoom zou zijn in de component functies van $p$ verwachten we een schrijfwijze

$$\begin{aligned} sp(ABC) =& \alpha sp(A)sp(B)sp(C) + \\ & \beta(sp(A)sp(BC) + sp(B)sp(AC) + sp(C)sp(AB)) \end{aligned}$$

met $\alpha, \beta \in C$. Dit kunnen we echter tegenspreken door beide leden te evalueren in het trippel

$$\left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

(oefening). $\square$

Bijgevolg moeten we al zeker een 'quotient' afbeelding hebben

$$\pi = (p, sp(ABC)) : M_2(\mathbb{C})^{\oplus 3} \rightarrow \mathbb{A}^{10}$$

en men kan inderdaad opnieuw aantonen dat de beeldpunten van $\pi$ de gesloten klassen parametrizeren en dat dit beeld de beste algebraische benadering is van de quotient-ruimte. Evenwel,

**Lemma 1.3.2** *Het beeld van $\pi$ is een echte gesloten deelruimte van $\mathbb{A}^{10}$.*

**Bewijs :** Net zoals in het geval van koppels zal een 'algemeen' trippel een gesloten klasse van dimensie 3 bepalen. We verwachten dus dat de dimensie van de quotient-ruimte $12 - 3 = 9$ moet zijn, dus kan het beeld niet surjectief zijn. Men kan dit argument ook concreet maken. Als we het spoor nemen van het karacteristiek polynoom van $ABC$

$$(ABC)^2 - sp(ABC)ABC + det(A)det(B)det(C) = 0$$

en alle termen vereenvoudigen in termen van de coordinaat functies van $\mathbb{A}^{10}$ dan krijgen we dat $sp(ABC)$ voldoet aan een quadratische vergelijking

$$X^2 - fX + g = 0$$

waarbij

$$\begin{aligned}
f =& sp(A)sp(BC) + sp(B)sp(AC) + sp(C)sp(AB) - sp(A)sp(B)sp(C) \\
g =& det(A)sp(BC)^2 + det(B)sp(AC)^2 + det(C)sp(AB)^2 \\
&- sp(A)sp(B)sp(AB)det(C) - sp(B)sp(C)sp(BC)det(A) \\
&- sp(A)sp(C)sp(AC)det(B) \\
&+ sp(A)^2det(B)det(C) + sp(B)^2det(A)det(C) + sp(C)^2det(A)det(B) \\
&- 4det(A)det(B)det(C) + sp(AB)sp(BC)sp(AC)
\end{aligned}$$

en dus is $\pi(\mathbb{A}^{12})$ de gesloten deelvarieteit van $\mathbb{A}^{10}$ bepaald door het polynoom $sp(ABC)^2 - fsp(ABC) + g$ en is dus inderdaad van dimensie $10 - 1 = 9$. $\square$

# Hoofdstuk 2

# Konjugatie klassen van matrixen

In dit hoofdstuk zullen we het algemene konjugatie probleem voor 1 $n \times n$ matrix behandelen. Eerst geven we de klassieke (pre 1950) behandeling m.b.v. elementaire divisors en de Jordan normaalvorm. Vervolgens de post 1950 meetkundige behandeling van dit probleem m.b.v. quotient-varieteiten en invarianten theorie.

## 2.1 De Jordan normaalvorm

Zij $\mathbb{C}[t]$ de polynoomring in 1 variabele over $\mathbb{C}$. Het is bekend dat $\mathbb{C}[t]$ een hoofdideaal domein is en zelfs een Euclidisch deelalgoritme toelaat. We zullen deze eigenschappen trachten uit te breiden tot matrixen over $\mathbb{C}[t]$.

**Definitie 2.1.1** *Elke $A \in M_n(\mathbb{C}[t])$ kan op unieke wijze geschreven worden als*

$$A = A_k t^k + A_{k-1} t^{k-1} + \ldots + A_0$$

*met alle $A_i \in M_n(\mathbb{C})$. De maximale $A_k \neq 0$ wordt de kop-coefficient van $A$ genoemd en $k$ de graad $gr(A)$ van $A$. In geval de kopcoefficient $A_k \in GL_n(\mathbb{C})$ dan zeggen we dat $A$ echte graad $k$ heeft.*

**Stelling 2.1.1 (Euclidisch algorithme)** *Zij $A, B \in M_n(\mathbb{C}[t])$ met $B$ van echte graad $k$ dan*

1. *Er bestaan unieke $Q, T \in M_n(\mathbb{C}[t])$ met $A = B.Q + T$ zodat $T = 0$ of $gr(T) < k$.*

2. *Er bestaan unieke $Q', T' \in M_n(\mathbb{C}[t])$ met $A = Q'.B + T'$ met $T = 0$ of $gr(T) < k$.*

**Bewijs :** We bewijzen eerst het bestaan vam $Q$ en $T$. Zij $B = B_k t^k + \ldots$. Als $A = 0$ of $gr(A) < k$ neem dan $Q = 0$ en $T = A$ en klaar. Zoniet, zij

$$A = T_0 = A_0 t^{k_0} + \ldots \text{ en stel } Q_1 = B_k^{-1}.A_0.t^{k_0 - k} \text{ en } T_1 = A - B.Q_1$$

Dan hebben we dat $gr(T_1) < gr(T_0)$.

Als $T_1 = 0$ of $gr(T_1) < k$ zijn we opnieuw klaar met $Q = Q_1$ en $T = T_1$. Zoniet, zij

$$T_1 = A_1 t^{k_1} + ... \text{ en stel } Q_2 = B_k^{-1}.A_1.t^{k_1-k} \text{ en } T_2 = T_1 - B.Q_2$$

en merk op dat

$$A = B.Q + T_1 = B.Q_1 + B.Q_2 + T_2$$

Dus zijn we wederom klaar als $T_2 = 0$ of $gr(T_2) < k$. Zoniet, herhaal het procede met $T_3, ..., T_l$ totdat of $T_l = 0$ of $gr(T_l) < k$ (dit proces moet stoppen omdat we in elke stap de graad van $T_i$ strikt doen dalen). Dit bewijst de existemtie.

Nu nog de uniciteit. Veronderstel dat

$$A = B.Q + T = B.Q' + T' \text{ en dus } B.(Q - Q') = T' - T$$

Als één lid (en dus beiden) niet nul is, kunnen we graden vergelijken. Het rechterlid heeft graad $< k$ en het linkerlid heeft graad $= k + gr(Q - Q')$ (gebruik hier dat $B$ echt van graad k is). Contradictie, dus beiden leden nul en dus $T = T'$ en $Q = Q'$.

Het tweede deel wordt analoog bewezen. □

**Definitie 2.1.2** *Twee matrixen $A, B \in M_n(\mathbb{C}[t])$ noemen we equivalent indien er omkeerbare matrixen $P_1, P_2 \in GL_n(\mathbb{C}[t])$ bestaan met $A.P_1 = P_2.B$.*

**Stelling 2.1.2** *Zij $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ dan zijn equivalent*

1. *$A$ en $B$ zijn geconjugeerd in $M_n(\mathbb{C})$.*

2. *$I_n.t - A$ en $I_n.t - B$ zijn equivalent in $M_n(\mathbb{C}[t])$.*

**Bewijs :** (1) impliceert (2) : Als $P^{-1}.A.P = B$ met $P \in GL_n(\mathbb{C}) \subset GL_n(\mathbb{C}[t])$ dan geldt natuurlijk ook dat $(I_n.t - A).P = P.(I_n.t - B)$.

(2) impliceert (1) : $A' = I_n.t - A$ en $B' = I_n.t - B$ zijn van echte graad 1 in $M_n(\mathbb{C}[t])$. Zij nu $P_1, P_2 \in GL_n(\mathbb{C}[t])$ met $A'.P_1 = P_2.B'$. Met het Euclidisch algorithme vinden we $Q_1, Q_2 \in M_n(\mathbb{C}[t])$ en $T_1, T_2 \in M_n(\mathbb{C})$ (want nul of van graad $< 1$) zodat

$$P_1 = Q_1.B' + T_1 \text{ en } P_2 = A'.Q_2 + T_2$$

Maar dan hebben we ook

$$A'T_1 - T_2.B' = A'P_1 - A'Q_1.B' - P_2.B' + A'.Q_2.B' = A'(Q_2 - Q_1).B'$$

Als beide leden niet nul zijn heeft het linkerlid graad tenhoogste 1 en het rechterlid tenminste graad 2, dus moeten ze allebei nul zijn en hebben we $A'.T_1 = T_2.B'$ met $T_i \in M_n(\mathbb{C})$.

We beweren nu dat $T_i \in GL_n(\mathbb{C})$. Immers, neem $Q_3 \in M_n(\mathbb{C}[t])$ en $T_3 \in M_n(\mathbb{C})$ zodat $P_1^{-1} = Q_3.A' + T_3$ dan hebben we

$$\begin{aligned} I_n = P_1^{-1}.P_1 &= (Q_3.A' + T_3).(Q_1.B' + T_1) \\ &= Q_3.A'.Q_1.B' + Q_3.A'.T_1 + T_3.Q_1.B' + T_3.T_1 \\ &= (Q_3.A'.Q_1 + Q_3.T_2 + T_3.Q_1).B' + T_3.T_1 \end{aligned}$$

En dus is $I_n - T_3.T_1 = Q'.B'$ voor zekere $Q' \in M_n(\mathbb{C}[t])$. Als beide leden niet nul zijn dan is de graad van het linkerlid 0 en die van het rechterlid tenminste 1, een contradictie. Dus $I_n = T_3.T_1$ en bijgevolg $T_1 \in GL_n(\mathbb{C})$. Analoog toont men aan dat $T_2 \in GL_n(\mathbb{C})$.

Tenslotte volgt uit

$$(I_n.t - A).T_1 = T_2.(I_n.t - B)$$

door vergelijken van coefficienten dat $T_1 = T_2$ en $A.T_1 = T_2.B$ en dus $T_1^{-1}.A.T_1 = B$, klaar. $\square$

Met $Q_{k,n}$ noteren we de verzameling van alle

$$\alpha = \{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n\}$$

Zij $A$ een $n \times n$ matrix en $\alpha, \beta \in Q_{k,n}$ dan noteren we met $A(\alpha, \beta)$ de $k \times k$ minor van $A$ bepaald door de $k$ rijen $\alpha$ en de $k$ kolommen $\beta$. Analoog aan de rij-kolom regel om de entries te bepalen van een produkt van twee matrixen heeft men ook een formule om minoren van produkten uit te rekenen.

**Stelling 2.1.3 (Cauchy-Binet formule)** *Zij $C = A.B$ dan geldt*

$$C(\alpha, \gamma) = \sum_{\beta \in Q_{k,n}} A(\alpha, \beta) B(\beta, \gamma)$$

**Definitie 2.1.3** *Zij nu $A \in M_n(\mathbb{C}[t])$ dan definieren we de k-de determinant divisor van $A$, $d_k(A)$ als de grootste gemene deler van alle $k \times k$ minoren van $A$ (of 0 als alle $k \times k$ minoren van $A$ nul zijn).*

**Stelling 2.1.4** *Zijn $A, B \in M_n(\mathbb{C}[t])$ equivalent, dan is $d_k(A) = d_k(B)$ voor alle $1 \leq k \leq n$.*

**Bewijs :** Als $A = P.B.Q$ met $P, Q \in GL_n(\mathbb{C}[t])$ dan hebben we

$$B(\alpha, \delta) = \sum_{\beta, \gamma \in Q_{k,n}} P(\alpha, \beta) A(\beta, \gamma) Q(\gamma, \delta)$$

Dus als $d_k(A) = 0$ zijn alle $A(\beta, \gamma) = 0$ en dus ook alle $B(\alpha, \delta)$ dus $d_k(B) = 0$.

Als $d_k(A) \neq 0$, dan hebben we $d_k(A) \mid A(\beta, \gamma)$ voor alle $\beta, \gamma \in Q_{k,n}$ en dus ook $d_k(A) \mid B(\alpha, \delta)$ en dus $d_k(A) \mid d_k(B)$.

Dat ook $d_k(B) \mid d_k(A)$ volgt uit de schrijfwijze $A = P^{-1}.B.Q^{-1}$. $\square$

**Stelling 2.1.5 (Smith normaal vorm)** *Zij $A \in M_n(\mathbb{C}[t])$ dan is $A$ equivalent met een diagonaal matrix $S = S(A)$*

$$\begin{bmatrix} s_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & s_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

*waarbij $r$ de rang is van de matrix $A$, $0 \neq s_i \in \mathbb{C}[t]$ met $s_i \mid s_{i+1}$ voor alle $1 \leq i \leq r-1$.*

**Bewijs :** Volgende matrix-operaties kunnen uitgevoerd door voor- of na-vermenigvuldigen met elementen van $GL_n(\mathbb{C}[t])$ :

1. Verwisselen van twee rijen of kolommen
2. Een rij of kolom vermenigvuldigen met een $c\imath\mathbb{C}^*$
3. Het optellen van $f$ maal een rij (of kolom) bij een andere rij (of kolom) waar $f \in \mathbb{C}[t]$

Bijgevolg mogen we deze operaties toepassen en een equivalente matrix verkrijgen.

We mogen veronderstellen dat $A$ een niet-nul entrie heeft die we door rij en kolom verwisselingen in de $(1,1)$ positie kunnen krijgen. Zij nu $(a_1, ..., a_n)^t$ de eerste kolom van deze matrix met $a$ de grootste gemene deler van de $a_i$ dan kunnen we $b_i \in \mathbb{C}[t]$ vinden met

$$a = b_1 a_1 + ... + b_n a_n \text{ en } gcd(b_1, ..., b_n) = 1$$

(oefening).

Nu kunnen we steeds een omkeerbare matrix $B \in GL_n(\mathbb{C})$ vinden met eerste rij $(b_1, ..., b_n)$. Dit volgt uit

**Bewering :** Zij $(b_1, ..., b_n) = (d_n)$ dan bestaat er een matrix $D_n \in M_n(\mathbb{C}[t])$ met eerste rij $(b_1, ..., b_n)$ en determinant $d_n$.

Dit wordt bewezen via inductie op $n$. Als $n = 1$ is dit triviaal. Als $n = 2$ weten we uit $(b_1, b_2) = d_2\mathbb{C}[t]$ dat we $c_1, c_2$ kunnen vinden met $b_1 c_2 - b_2 c_1 = d_2$, maar dan is

$$D_2 = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix}$$

een kandidaat. Veronderstel nu dat de bewering waar is voor $n-1$ met $n \geq 3$ en zij $D_{n-1}$ de matrix met eerste rij $(b_1, ..., b_{n-1})$ en determinanr $d_{n-1}$ waar $(d_{n-1}) = (b_1, ..., b_{n-1})$.Omdat

$$(d_n) = (d_{n-1}, b_n)$$

bestaan er elementen $f, g \in \mathbb{C}[t]$ met $fd_{n-1} - gb_n = d_n$ en bekijk de matrix

$$D_n = \begin{bmatrix} & & & b_n \\ & D_{n-1} & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \\ \frac{b_1 g}{d_{n-1}} & \frac{b_2 g}{d_{n-1}} & \cdots & \frac{b_{n-1} g}{d_{n-1}} & f \end{bmatrix}$$

Natuurlijk is $D_n \in M_n(\mathbb{C}[t])$ met eerste rij gelijk aan $(b_1, ..., b_n)$. Rest nog aan te tonen dat de determinant van $D_n$ gelijk is aan $d_n$. Ontwikkelen van de laatste rij levert

$$\det(D_n) = f\det(D_{n-1}) + (-1)^{n-1} b_n \det(E_{n-1})$$

waar $E_{n-1}$ de minor is door uit $D_n$ de eerste rij en laatste kolom te schrappen. Wegens onze kennis van de eerste en laatste rij van $D_n$ hebben we de gelijkheid

$$d_{n-1}E_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & d_{n-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_{n-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_{n-1} \\ g & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} D_{n-1}$$

waaruit we afleiden dat

$$\begin{aligned} d_{n-1}^{n-1} \det(E_{n-1}) &= (-1)^{n-2} g d_{n-1}^{n-2} \det(D_{n-1}) \\ &= (-1)^{n-2} g d_{n-1}^{n-1} \end{aligned}$$

waaruit $det(E_{n-1}) = (-1)^{n-2} g$ en dus hebben we tenslotte

$$\det(D_n) = fd_{n-1} - gb_n = d_n$$

waaruit het gestelde volgt.

Terug naar ons bewijs nu. Door voorvemenigvuldigen met $B \in GL_n(\mathbb{C}[t])$ mogen we dus veronderstellen dat de we in de $(1,1)$ positie de grootste gemene deler van de eerste kolom hebben. Stel nu dat dit nieuwe element niet alle entries van de eerste rij deelt dan kunnen we met een analoge redenering als voorheen de $(1,1)$ entrie vervangen door de grootste gemene deler van de eerste rij (en bijgevolg een deler van de vorige en dus met minder priemdelers). We kunnen dit tweestaps proces herhalen tot we in de $(1,1)$ positie een element hebben dat alle entries van de eerste rij en eerste kolom deelt (dit proces stopt omdat we in elke stap minder priemdelers hebben).

Vervolgens kunne we door elementaire rij en kolom bewerkingen ervoor zorgen dat alle overige entries in eerste rij en kolom nul worden. Noteer deze nieuwe matrix (die equivalent is met $A$) met $C = (c_{ij})$.

Veronderstel nu dat er nog een $c_{ij}$ met $i, j > 1$ bestaat die niet deelbaar is door $c_{11}$. Als we nu kolom $j$ optellen bij kolom 1 dan bestaat deze eerste kolom uit $(c_{11}, c_{2j}, ..., c_{ij}, ..., c_{nj})^t$. Nu kunnen we de vorige procedure herhalen waardoor we $c_{11}$ vervangen door een deler. Na dit een aantal keren doorlopen te hebben (en wederom stopt dit proces omdat we elke keer een echte deler moeten nemen en dit de graad strikt doet dalen). Uiteindelijk krijgen we een equivalente matrix zodat de $(1,1)$ entrie alle overige deelt en alle overige entries in eerste rij en kolom gelijk aan nul.

Herhaal nu het gehele proces op de beneden $n-1 \times n-1$ deelmatrix. Uiteindelijk krijgen we een equivalente matrix

$$\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}$$

met $D$ een diagonaal matrix

$$D = \begin{bmatrix} s_1 & & & \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_r \end{bmatrix}$$

en $s_i \mid s_{i+1}$ voor alle $1 \leq i \leq r-1$. Maar dan moet $E$ de nulmatrix zijn want anders zou $A$ een rang hebben groter dan $r$. $\square$

**Stelling 2.1.6** *Twee matrixen $A, B \in M_n(\mathbb{C}[t])$ zijn equivalent als en slechts dan als ze dezelfde determinant divisor idealen hebben.*

**Bewijs :** We hebben al gezien dat twee equivalente matrixen dezelfde determinant divisor idealen heben. Omgekeerd, bepalen de determinant divisors de Smith normaalvorm van $A$. Zij immers $S(A)$ de diagonaalmatrix $diag(s_1, ..., s_r, 0, ..., 0)$ dan zijn de determinant divisors van $S(A)$ (en van $A$) bepaald door

$$\begin{cases} d_1(A) & = s_1 \\ d_2(A) & = s_1 s_2 \\ \vdots & \\ d_r(A) & = s_1 ... s_r \\ d_k(A) & = 0 \forall k > r \end{cases}$$

Dus uit de kennis van de idealen $(d_i(A))$ haen we de **invariante factors** $s_i(A) = \frac{d_i(A)}{d_{i-1}(A)}$ op een scalaire factor na en dus ook de equivalentieklasse van de Smith normaalvorm. $\square$

Merk op dat dit een algorithme geeft om te bepalen wanneer twee matrixen $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ geconjugeerd zijn. Bepaal de determinant divisor idealen van $A' = I_n.t - A$ en $B' = I_n.t - B$ (voortgebracht door de $k \times k$ minoren) en ga na of ze gelijk zijn.

**Definitie 2.1.4** *Zij $A \in M_n(\mathbb{C}[t])$ van rang $r$ met invariante factors $s_i = s_i(A)$ voor $1 \leq i \leq r$. Zij $\lambda_1, ..., \lambda_t$ de wortels van de invariante factors, dan bestaan er $e_{ij} \in \mathbb{N}$ en $\mu_i 1\mathbb{C}^*$ zodat*

$$\begin{cases} s_1 & = \mu_1(t-\lambda_1)^{e_{11}}(t-\lambda_2)^{e_{12}}...(t-\lambda_t)^{e_{1t}} \\ s_2 & = \mu_2(t-\lambda_1)^{e_{21}}(t-\lambda_2)^{e_{22}}...(t-\lambda_t)^{e_{2t}} \\ & \vdots \\ s_r & = \mu_r(t-\lambda_1)^{e_{r1}}(t-\lambda_2)^{e_{r2}}...(t-\lambda_t)^{e_{rt}} \end{cases}$$

*Wegens de deelbaarheids eigenschap van de $s_i$ hebben we voor elke $1 \leq j \leq t$ dat*

$$0 \leq e_{1j} \leq e_{2j} \leq \ldots \leq e_{rj}$$

*De verzameling termen $\{(t-\lambda_j)^{e_{ij}} \mid 1 \leq j \leq t, 1 \leq i \leq r, e_{ij} \neq 0\}$ noemen we de verzameling van **elementaire divisors** van $A$.*

**Stelling 2.1.7** *Twee matrixen $A, B \in M_n(\mathbb{C}[t])$ zijn equivalent asa ze dezelfde rang en elementaire divisors hebben.*

**Bewijs :** Het volstaat om de invariante factors af te eiden uit de kennis van de elementaire divisors en de rang $r$. Neem voor elke $1 \leq j \leq t$

$$e_j = \max_{1 \leq i \leq r} e_{ij}$$

dan moet $s_r$ op een scalair na gelijk zijn aan

$$(t-\lambda_1)^{e_1}(t-\lambda_2)^{e_2}\ldots(t-\lambda_t)^{e_t}$$

Als we de deze elementaire divisor factoren schrappen uit de verzameling elementaire divisors en de procedure herhalen verkrijgen we $s_{r-1}$ enz., klaar. $\square$

Laat ons als voorbeeld eens alle invarianten uitrekenen voor $I_3.t - A$ met $A$ een $3 \times 3$ matrix in Jordan vorm met eigenwaarden $\lambda$.

| | $\begin{bmatrix} t-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & t-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & t-\lambda \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} t-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & t-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & t-\lambda \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} t-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & t-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & t-\lambda \end{bmatrix}$ |
|---|---|---|---|
| $d_1$ | $t-\lambda$ | $1$ | $1$ |
| $d_2$ | $(t-\lambda)^2$ | $t-\lambda$ | $1$ |
| $d_3$ | $(t-\lambda)^3$ | $(t-\lambda)^3$ | $(t-\lambda)^3$ |
| $s_1$ | $t-\lambda$ | $1$ | $1$ |
| $s_2$ | $t-\lambda$ | $t-\lambda$ | $1$ |
| $s_3$ | $t-\lambda$ | $(t-\lambda)^2$ | $(t-\lambda)^3$ |

De verzameling elementaire divisors zijn resp.

$$\{t-\lambda, t-\lambda, t-\lambda\}, \{t-\lambda, (t-\lambda)^2\}, \{(t-\lambda)^3\}$$

**Definitie 2.1.5** *Zij $f = t^m + a_{m-1}t^{m-1} + \dots a_0$ een monisch polynoom in $\mathbb{C}[t]$ dan definieren we de **begeleidings matrix** $B(f) \in M_n(\mathbb{C})$ als*

$$B(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{m-1} \end{bmatrix}$$

**Stelling 2.1.8 (Frobenius normaal vorm)** *Zij $A \in M_(\mathbb{C})$ en zij $e_1, e_2, ..., e_k$ de elementaire divisors van $I_n.t - A$, dan is $A$ geconjugeerd met de blok matrix*

$$B = \begin{bmatrix} B(e_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B(e_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B(e_k) \end{bmatrix}$$

**Bewijs :** We beweren eerst dat $I_{k_i}.t - B(e_i)$ equivalent is met de diagonaalmatrix in $M_{k_i}(\mathbb{C}[t])$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & e_i \end{bmatrix}$$

We kunnen namelijk voor iedere $1 \leq k \leq k_i - 1$ de $k \times k$ minor van $I.t - B(e_i)$ bekijken geassocieerd aan kolommen $1, 2, \dots, k$ en rijen $2, 3, \dots, k+1$ en afleiden dat $d_k(I.t - B(e_i)) = 1$ voor $1 \leq k \leq k_i - 1$. Verder gaat men na dat $d_{k_i}(I.t - B(e_i)) = det(I.t - B(e_i)) = e_i$.

De diagonaal matrix heeft natuurlijk dezelfde determinant divisoren en bijgevolg zijn beide matrixen equivalent. In het bijzonder geldt dat de verzameling elementaire divisoren van $I.t - B(e_i)$ het singleton $e_i$ is.

Bijgevolg zijn de elementaire divisoren van $I_n.t - B$ de verzameling $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$. Bijgevolg zijn $I_n.t - A$ en $I_n.t - B$ equivalent en dus is $A$ geconjugeerd met $B$. □

Alle elementaire divisors van $I_n.t - A$ met $A \in M_n(\mathbb{C})$ zijn van de vorm $(t-\lambda)^k$. Aan zo'n divisor associeren we nu de Jordan matrix

$$J_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}$$

**Stelling 2.1.9 (Jordan normaal vorm)** *Zij $A \in M_n(\mathbb{C})$ en zij $(t-\lambda_i)^{e_i}$ met $1 \leq i \leq k$ de verzameling elementaire divisors van $I_n.t - A$. Dan is $A$ geconjugeerd met de blok matrix*

$$J = \begin{bmatrix} J_{e_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{e_2}(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{e_k}(\lambda_k) \end{bmatrix}$$

**Bewijs :** Men gaat op analoge wijze als voorheen na dat $I_n.t - J_k(\lambda)$ equivalent is met de diagonaalmatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & (t-\lambda)^k \end{bmatrix}$$

Wederom haalt men hieruit dat $I_n.t - A$ en $I_n.t - J$ dezelfde elementaire divisors hebben dus equivalent zijn en bijgevolg dat $A$ en $J$ geconjugeerd zijn. □

## 2.2 Representaties van $\mathbb{C}[t]$

In deze sectie zullen we het voorgaande interpreteren in termen van modulen en representaties van $\mathbb{C}[t]$ alsook een meer meetkundige vertaling ervan geven. De bedoeling van dit laatste is het volgende. Voor de meeste klassificatie problemen in lineaire algebra zijn er geen canonieke vormen gekend. We zullen echter zien dat we deze problemen wel steeds meetkundig kunnen beginnen aan te pakken. Daarom is het belangrijk de onderliggende meetkundige eigenschappen tenvolle te begrijpen van het enige geval waarvoor we wel canonieke (Jordan) vormen kennen. Deze vertaling kan dan een leidraad vormen om moeilijker problemen aan te vatten.

**Definitie 2.2.1** *Een n-dimensionale representatie van* $\mathbb{C}[t]$ *is een* $\mathbb{C}$*-algebra morfisme*

$$\phi : \mathbb{C}[t] \to M_n(\mathbb{C})$$

*en is bijgevolg volledig vastgelegd door de matrix* $M_\phi = \phi(t) \in M_n(\mathbb{C})$.

**Definitie 2.2.2** *Een n-dimensionaal moduul van* $\mathbb{C}[t]$ *is een actie gedefinieerd op* $\mathbb{C}^n$

$$. \quad : \quad \mathbb{C}[t] \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$$

*met volgende eigenschappen*

$$\begin{cases} 1.v & = v \\ f.(v+w) & = f.v + f.w \\ (f+g).v & = f.v + g.v \\ f.(g.v) & = (fg).v \end{cases}$$

*voor alle* $f, g \in \mathbb{C}[t]$ *en alle* $v, w \in \mathbb{C}^n$.

**Lemma 2.2.1** *Er bestaat een natuurlijke* $1-1$ *correspondentie tussen n-dimensionale representaties en n-dimensionale modulen van* $\mathbb{C}[t]$.

**Bewijs :** Uit de eigenschappen van de actie van $\mathbb{C}[t]$ op een $n$-dimensionaal moduul is het duidelijk dat deze actie vastligt door de actie van $t.* \quad : \quad \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Dit is een lineaire afbeelding en bijgevolg bepaald door een matrix in $M_n(\mathbb{C})$. □

Zij $V_n = (\mathbb{C}^n, M_\phi)$ en $W_m = (\mathbb{C}^m, M_\psi)$ twee $\mathbb{C}[t]$-modulen van dimensie $n$ resp. $m$ dan definieren we de directe som $V_n \oplus W_m$ als het $n+m$-dimensionale moduul bepaald door de blokmatrix

$$\begin{bmatrix} M_\phi & 0 \\ 0 & M_\psi \end{bmatrix}$$

Een moduul-morfisme $f : V_n \to W_m$ is een lineaire afbeelding (en dus bepaald door een $m \times n$ matrix $F$) zodat volgend diagram commutatief is

$$\begin{tikzcd} V_n \arrow[r, "F"] \arrow[d, "M_\phi"'] & W_m \arrow[d, "M_\psi"] \\ V_n \arrow[r, "F"'] & W_m \end{tikzcd}$$

De vectorruimte van alle moduul-morfismen noteren we met $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[t]}(V_n, W_m)$. Twee modulen noemen we isomorf als er moduul-morfismen $f : V_n \to W_m$ en $g : W_m \to V_n$ bestaan met $f \circ g = 1_{W_m}$ en $g \circ f = 1_{V_n}$. Bijgevolg is $n = m$, $F$ en $G$ zijn omkeerbare matrixen in $GL_n(\mathbb{C})$ en we hebben

$$M_\psi = F.M_\phi.F^{-1}$$

**Lemma 2.2.2** *De studie van n-dimensionale modulen van $\mathbb{C}[t]$ op isomorfie na is equivalent met de studie van conjugatie klassen in $M_n(\mathbb{C})$.*

**Definitie 2.2.3** *Een $\mathbb{C}[t]$ moduul $V$ noemen we*

1. ***simpel** als $V$ geen echte deel-modulen bevat*
2. ***semi-simpel** als $V$ een directe som is van simpele modulen*
3. ***indecomposabel** als $V$ niet de directe som is van echte deelmodulen*

**Lemma 2.2.3** *Zij $V = (\mathbb{C}^n, M_\phi)$ een $\mathbb{C}[t]$-moduul,dan*

1. *Ieder simpel $\mathbb{C}[t]$ moduul is 1-dimensionaal en van de vorm $V \simeq \mathbb{C}[t]/(t-\lambda)$ met $\lambda \in \mathbb{C}$.*
2. *$V$ is semi-simpel asa $M_\phi$ geconjugeerd is met een diagonaalmatrix*
3. *$V$ is indecomposabel asa $M_\phi$ geconjugeerd is met een Jordan matrix $J_n(\lambda)$*
4. *$V$ heeft een unieke decompositie als directe som van indecomposabele deelmodulen*

**Bewijs :** We mogen veronderstellen dat $M_\phi$ in Jordan normaal vorm is.
(1) : Omdat $M_\phi$ steeds opper triangulair is, brengt de vector $(1, 0, \ldots, 0)^t$ een 1-dimensionaal deelmoduul voort. Dus $V_n$ kan enkel simpel ijn als $n = 1$. Dit 1-dimensionaal moduul bepaalt een algebra morfisme

$$\phi : \mathbb{C}[t] \to \mathbb{C}$$

waarvan de kern een maximaal ideaal is en dus moet $V \simeq \mathbb{C}[t]/(t-\lambda)$.
(2) : Als $M_\phi$ een Jordan blok heeft van dimensie $> 1$ dan is de directe factor bepaalt door deze blok niet simpel wegens (1).
(3) : Als $M_\phi$ meerdere Jordan blokken heeft, dan is $V$ een directe som van de corresponderende directe factors.
(4) : volgt direct uit vorige en de Jordan normaalvorm. □

Ieder simpel $\mathbb{C}[t]$-moduul is voortgebracht door 1 element en isomorf met $\mathbb{C}[t]/(t-\lambda)$. We willen nu het minimale aantal voortbrengers van een willekeurig $\mathbb{C}[t]$-moduul bepalen en een voorstelling geven als $\oplus_i \mathbb{C}[t]/(f_i)$ met polynomen $f_i \in \mathbb{C}[t]$. Laat ons beginnen met

**Voorbeeld 2.2.1** *Zij $f = t^n + a_{m-1}t^{m-1} + \dots a_0$ een monisch polynoom van graad $n$ dan is het quotient $\mathbb{C}[t]/(f)$ een moduul van dimensie $n$ waarvan de actie $M_\phi$ gegeven wordt door de begeleidings matrix $B(f)$ van $f$.*

$\mathbb{C}[t]$ heeft immers als basis $\{e_1 = 1, e_2 = t, e_3 = t^2, \dots e_n = t^{n-1}\}$. T.o.v. deze basis wordt vermenigvuldigig met $t$ gerepresenteerd door de matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

en dit is juist de begeleidingsmatrix $B(f)$.

Laat ons nu het algemene geval behandelen. Zij $V$ een $n$-dimensionaal moduul gegeven met matrix $M_\phi$ en zij

$$s_1, s_2, \dots, s_n$$

de invariante factoren van $I_n.t - M_\phi$ (merk hier op dat deze matrix steeds rang $n$ heeft (reken de determinant uit)). Uit de voorgaande sectie weten we

- $s_1 \mid s_2 \mid \dots \mid s_n$, dus $s_{i+1} = r_{i+1}s_i$ voor zekere $r_i \in \mathbb{C}[t]$
- $s_1 = d_1, s_2 = \frac{d_2}{d_1}, \dots, s_n = \frac{d_n}{d_{n-1}}$ en bijgevolg

  $$\prod_{i=1}^{n} s_i = d_n = det(I_n.t - M_\phi)$$

  is een polynoom van graad $n$.

Als we nu $t_i = deg(s_i)$ dan hebben we

$$t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \text{ en } \sum t_i = n$$

en dus vormen de $\{t_i\}$ een partitie van $n$.
Meestal schrijf men echter partities in dalende orde en zonder nul termen. Deze conventie noopt ons een nieuwe notatie in te voeren. Zij $s_{n-r}$ de minimale $s_i \neq 1$, dan definieren we

$$q_1 = s_n, q_2 = s_{n-1}, \dots, q_r = s_{n-r}$$

en

$$p_i = deg(q_i)$$

Dan weten we volgende zaken

- $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_r > 0$ met $\sum p_i = n$

- Voor alle $1 \leq i \leq r-1$ : $q_i = r_i.q_{i+1}$ voor zekere $r_i \in \mathbb{C}[t]$.

**Stelling 2.2.1 (canonieke moduul-vorm)** *Zij $V = (\mathbb{C}^n, M_\phi)$ een $n$-dimensionaal $\mathbb{C}[t]$-moduul.*

1. *Er bestaan niet-constante monische polynomen $q_1, ..., q_r \in \mathbb{C}[t]$ met $q_i = r_i q_{i+1}$ voor zekere $r_i \in \mathbb{C}[t]$ en zodat*
$$V \simeq \oplus_{i=1}^r \mathbb{C}[t]/(q_i)$$
2. *Stel dat we monische niet-constante polynomen $u_1, ..., u_s$ in $\mathbb{C}[t]$ hebben met $u_i = v_i u_{i+1}$ voor zekere $v_i \in \mathbb{C}[t]$ en dat*
$$V \simeq \oplus_{i=1}^s \mathbb{C}[t]/(u_i)$$
*dan geldt $s = r$ en $u_i = q_i$.*

**Bewijs :** We kunnen de invariante factoren $q_i$ schrijven als producten van elementaire divisoren
$$q_i = \prod_{j=1}^{t_i}(t-\lambda_j)^{e_{ij}}$$
dan geldt wegens de Chinese rest-stelling dat
$$\mathbb{C}[t]/(q_i) \simeq \oplus_{j=1}^{t_i} \mathbb{C}[t]/(t-\lambda_j)^{e_{ij}}$$
Verder weten we uit de Frobenius normaal vorm dat de matrix $M_\phi$ geconjugeerd is met de blok-matrix
$$\begin{bmatrix} B((t-\lambda_1)^{e_{11}}) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & B((t-\lambda_{t_1})^{e_{1t_1}}) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$
en dus zijn bijhorende modulen isomorf. Wegens het bovenstaande voorbeeld kennen we de modulen bepaald door een begeleidings-blok en bijgevolg
$$V \simeq \oplus_{i=1}^r(\oplus_{j=1}^{t_i} \mathbb{C}[t]/(t-\lambda_j)^{e_{ij}})$$
en de laatste term kan herschreven worden als
$$\oplus_{i=1}^r \mathbb{C}[t]/(q_i)$$
Uniciteit volgt uit de uniciteit van de Frobenius normaal vorm. □

Als direct gevolg hebben we dat een $n$-dimensionaal moduul $V = (\mathbb{C}^n, M_\phi)$ voortgebracht is door tenhoogste $r$ elementen als het aantal niet-constante invariante factoren $r$ is. Later zullen we een verfijning van deze opmerking bewijzen.

## 2.3 De meetkundige formulering

We hebben reeds een interpretatie gegeven in termen van lineaire algebra en moduul theorie. In deze sectie zullen we het probleem meetkundig formuleren. Niet enkel is dit waarschijnlijk de elegantste formulering, maar vooral blijkt dat we heel wat wiskundige problemen op analoge wijze kunnen beschrijven. Bijgevolg kunnen de resultaten die we in dit speciale geval verkrijgen omdat we een volledige oplossing kennen als leidraad gebruikt worden om moeilijkere problemen aan te vatten.

**Definitie 2.3.1** *1. Een algebraische groep $G$ is een affiene varieteit waarvan de punt-verzameling een groep vormt.*

*2. Een actie van een algebraische groep $G$ op een affiene varieteit $Z$ is een reguliere afbeelding*

$$\rho : G \times Z \to Z$$

*die voldoet aan volgende eisen*

- $\rho(e,z) = z$ *voor alle* $z \in Z$ *waar* $e$ *het neutraal element van de groep* $G$ *is*
- $\rho(g.h,z) = \rho(g,\rho(h,z))$ *voor alle* $z \in Z$ *en alle* $g,h \in G$.

*we zullen steeds $\rho(g,z)$ met $g.z$ noteren.*

*3. Een punt $z \in Z$ noemen we een fixpunt onder de actie van $G$ als $g.z = z$ voor alle $g \in G$*

*4. De baan van $z \in Z$ onder de $G$-actie is de verzameling*

$$C_z = G.z = \{g.z \mid g \in G\}$$

*m.a.w. $C_z$ is het beeld onder de reguliere afbeelding $G \to Z$ die $g$ naar $g.z$ mapt.*

*5. De stabilizator of isotropie groep $G_z$ van een punt $z \in Z$ is de deelgroep $\{g \in G \mid g.z = z\}$ van $G$.*

*6. Een deelverzameling $Y \subset Z$ noemen we $G$-stabiel als $g.y \in Y$ voor alle $g \in G$ en $y \in Y$.*

Hoe vertalen we nu het conjugatie-probleem van $n \times n$ matrixen in deze setting ? Als algebraische groep nemen we

$$GL_n(\mathbb{C}) = \{g \in M_n(\mathbb{C}) \mid det(g) \neq 0\}$$

Dit is een affiene varieteit want horend bij het speciaal open deel $X(det) \subset M_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{A}^{n^2}$. De coordinaat ring van $GL_n(\mathbb{C})$ is

$$\mathcal{O}(GL_n(\mathbb{C})) = \mathbb{C}[x_{ij} : 1 \leq i,j \leq n][s]/(det(x_{ij}).s - 1)$$

De actie van $GL_n(\mathbb{C})$ op de affiene varieteit $M_n(\mathbb{C}) = \mathbb{A}^{n^2}$ waarin we geinteresseerd zijn is

$$GL_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C}) \quad (g, A) \to gAg^{-1}$$

waarvan met nagaat dat dit een reguliere afbeelding is.
Het conjugatie-probleem kan nu vertaald worden als : beschrijf de banen van deze $GL_n(\mathbb{C})$-actie op $M_n(\mathbb{C})$.
Omdat we een meetkundige formulering hebben verhopen we ook een meetkundig antwoord, d.i. bestaat er een affiene varieteit $X$ waarvan de punten juist de banen van $GL_n(\mathbb{C})$ in $M_n(\mathbb{C})$ parametrizeren en bestaat er een quotient-afbeelding

$$\pi : M_n(\mathbb{C}) \to X$$

die elke matrix stuurt naar het punt dat de conjugatie klasse bepaalt ? Als $X$ een affiene varieteit is, dan is $X$ een gesloten deelvarieteit van een $\mathbb{A}^r$ en regulariteit van de quotient-afbeelding zegt dat de coordinaatfuncties van $M_n(\mathbb{C}) \to X \to \mathbb{A}^r$ reguliere functies of $M_n(\mathbb{C})$ moeten zijn die constant zijn op banen.
Bijgevolg is de best mogelijke quotient-varieteit deze horende bij de deel algebra

$$\mathcal{O}(M_n(\mathbb{C}))^{GL_n(\mathbb{C})} = \{f \in \mathcal{O}(M_n(\mathbb{C})) \mid f \text{ is constant op banen } \}$$

en we dienen dus voortbrengers en relaties van deze 'invarianten' ring te vinden.
Sommige ivariante reguliere functies zijn eenvoudig te verzinnen. Neem

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

en bekijk zijn characteristiek polynoom

$$det(I_n.t - X) = t^n + \sigma_1(X)t^{n-1} + \dots + \sigma_n(X)$$

dan zijn de $\sigma_i(X)$ reguliere functies op $M_n(\mathbb{C})$ die invariant blijven onder de $GL_n(\mathbb{C})$-actie (conjugatie bewaart de determinant). We kunnen bijgevolg een reguliere afbeelding definieren

$$\pi : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{A}^n \quad A \to (\sigma_1(A), \dots, \sigma_n(A))$$

en hiervan gaan we enkele eigenschappen afleiden :

**Stelling 2.3.1**

1. *$\pi$ is constant op banen*

2. *$\pi$ is surjectief*

3. *Er bestaat een open deel-varieteit $U \subset \mathbb{A}^n$ zodat $\pi^{-1}(u)$ juist 1 baan vormt*

**Bewijs :**
(1) : Volgt uit het feit dat de coordinaat-functies invariante reguliere functies zijn.
(2) : Volgt uit de eigenschappen van de begeleidings matrix $B(f)$ van een polynoom $f = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + ... + a_0$ horend bij het punt $(a_{n-1}, ..., a_0) \in \mathbb{A}^n$.
(3) : Beschouw de discriminant $disc(f)$ van $f$, dit is een reguliere functie op $\mathbb{A}^n$. Als $disc(f) \neq 0$ dan is

$$f = (t - \lambda_1)....(t - \lambda_n) \quad \text{met} \quad \lambda_i \neq \lambda_j$$

Dus, alle eigenwaarden van een matrix $A$ met $\pi(A) = f$ zijn verschillend, maar dan moet de Jordaan normaal vorm van $A$ de diagonaal-matrix zijn

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

waaruit het gestelde volgt. □

Helaas parametrizeren de punten van $\mathbb{A}^n$ niet de banen. Het meest drastische voorbeeld is de nul-vezel :

**Stelling 2.3.2** *De nulvezel $\pi^{-1}(0, 0, ..., 0)$ bestaat uit zoveel verschillende banen als er partities van n zijn. De nulvezel is de gesloten $GL_n(\mathbb{C})$-stabiele deelvarieteit van $M_n(\mathbb{C})$ bestaande uit alle nilpotente matrixen.*

**Bewijs :** Per definitie van de map $\pi$ bestaat de nulvezel uit alle matrixen $A \in M_n(\mathbb{C})$ met characteristiek polynoom $t^n = 0$. Dus $A$ is nilpotent en de Jordan normaal vorm toont aan dat iedere partitie van $n$ zeg $p = (p_1, ..., p_r)$ met $p_1 \geq p_2 \geq ... \geq p_r$ en $\sum p_i = n$ een unieke conjugatie klasse van nilpotente matrizen definieert,nl

$$\begin{bmatrix} J_{p_1}(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{p_r}(0) \end{bmatrix}$$

□

Wat parametrizeren de punten van $\mathbb{A}^n$ dan wel ?

**Stelling 2.3.3**

1. *Punten van $\mathbb{A}^n$ parametrizeren isomorfie klassen van n-dimensionale semi-simpele representaties van $\mathbb{C}[t]$*

2. *Punten van $\mathbb{A}^n$ parametrizeren de gesloten $GL_n(\mathbb{C})$- banen in $M_n(\mathbb{C})$*

**Bewijs :**
(1) : Semi-simpele representaties zijn op isomorfie bepaald door diagonaal-matrixen. De entries van deze diagonaal-matrix zijn de eigenwaarden (met hun multipliciteit). Deze informatie is bevat in het polynoom $f$ horend bij een punt van $\mathbb{A}^n$. Omgekeerd, laat het punt $p$ in $\mathbb{A}^n$ het polynoom $f$ bepalen en ontbind $f$ in lineaire factoren

$$f = (t-\lambda_1)^{e_1}...(t-\lambda_r)^{e_r}$$

dan zal in $\pi^{-1}(p)$ de diagonaalmatrix

$$D = diag(\underbrace{\lambda_1, ..., \lambda_1}_{e_1}, ..., \underbrace{\lambda_r, ..., \lambda_r}_{e_r})$$

bevatten en op conjugatie na enkel deze diagonaal matrix.
(2) : We gaan aantonen dat alle banen in $\pi^{-1}(p)$ in hun afsluiting de baan van deze diagonaal-matrix hebben. Uit de Jordan normaalvorm en uit het feit dat $\pi^{-1}(p)$ gesloten is volgt dat de baan van de diagonaal matrix $D$ de enige gesloten $GL_n(\mathbb{C})$-baan is in de vezel.
Het volstaat aan te tonen dat voor 1 Jordaanblok $J_k(\lambda)$ de diagonaal-matrix

$$d = diag(\underbrace{\lambda, ..., \lambda}_{k})$$

in de afsluiting van de baan ligt. Conjugeer $J_k(\lambda)$ met de omkeerbare diagonaal-matrix

$$g = diag(1, \epsilon^{-1}, \epsilon^{-2}, ..., \epsilon^{-k+1})$$

dan krijgen we de matrix

$$\begin{bmatrix} \lambda & \epsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \epsilon & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \epsilon \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}$$

en als we $\epsilon \to 0$ laten gaan, verkrijgen we $d$. □

Als $n \geq 2$ bestaan er dus steeds niet-gesloten $GL_n(\mathbb{C})$ banen in $M_n(\mathbb{C})$. Bijgevolg kunnen we geen quotient-varieteit vinden die de banen parametrizeert, want anders zou de vezel van elk punt enerzijds een unieke baan moeten bepalen en anderzijds gesloten moeten zijn (als invers beeld van een gesloten punt). Zoals boven uitgelegd is de beste benadering van de quotient-varieteit de varieteit horend bij de invarianten ring.

**Stelling 2.3.4** *De ring van invariante reguliere functies*

$$\mathcal{O}(M_n(\mathbb{C}))^{GL_n(\mathbb{C})} = \mathbb{C}[\sigma_1(X), ..., \sigma_n(X)]$$

*en bijgevolg is de reguliere afbeelding*

$$\pi : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{A}^n$$

*als boven beschreven de beste benadering van de niet-bestaande banen-varieteit. Deze quotient-varieteit parametrizeert de gesloten $GL_n(\mathbb{C})$ banen in $M_n(\mathbb{C})$ die juist de isomorfie klassen zijn van semi-simpele n-dimensionale representaties van $\mathbb{C}[t]$.*

**Bewijs :** Zij $f$ een reguliere functie $M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ die constant is op de banen. Beschouw nu de reguliere afbeelding

$$f' : \mathbb{A}^n \to \mathbb{C} \quad (a_1, ..., a_n) \to f(B(t^n + a_1 t^{n-1} + ... + a_n))$$

Wegens continuiteit van $f$ weten we dat $f$ constant moet zijn op de afsluiting van een baan en omdat er in iedere vezel $\pi^{-1}(p)$ een unieke baan is die in de afsluiting ligt van alle andere en omdat de vezel een begeleiingsmatrix bevat, volgt dat $f$ constant is op de vezels van $\pi$. Bijgevolg, factorizeert $f$ over $\pi$ en hebben we $f = f'(\sigma_1(X), ..., \sigma_n(X))$ en klaar. □

## 2.4 De lakens van $M_n(\mathbb{C})$

De belangrijkste obstruktie tegen het bestaan van een goede quotient-varieteit is het bestaan van niet-gesloten banen. In deze sectie zullen we deze obstruktie wegwerken door $M_n(\mathbb{C})$ te overdekken met 'lakens', dit zijn lokaal-gesloten $GL_n(\mathbb{C})$-stabiele delen waarop de dimensie van de $GL_n(\mathbb{C})$-banen constant is. Merk op dat wanneer een baan $GL_n(\mathbb{C}).m$ niet gesloten is, de dimensie van een baan in de rand strikt kleinere dimensie moet hebben. Bijgevolg zullen alle $GL_n(\mathbb{C})$ banen in een laken gesloten zijn en mogen we verwachten dat er een goede quotient-varieteit gevormd kan worden.

**Definitie 2.4.1** *Zij $p = (p_1, p_2, ..., p_r)$ een partitie van n. Met $S(p)$ noteren we de verzameling matrixen $M_\phi \in M_n(\mathbb{C})$ zodat het bijhorende moduul $V = (\mathbb{C}^n, M_\phi)$ een canonieke decompositie heeft*

$$V = \oplus_{i=1}^r \mathbb{C}[t]/(q_i)$$

*met $deg(q_i) = p_i$.*

Met een partitie $p = (p_1, ..., p_r)$ associeren we

- de norm $p^2 = p_1^2 + p_2^2 + ...p_r^2$
- de duale partitie $\hat{p} = (\hat{p}_1, ..., \hat{p}_s)$ waarbij

$$\hat{p}_j = \#\{i \mid p_i \geq j\}$$

Bvb. als $p = (5, 3, 2)$ san is de norm $p^2 = 38$ en $\hat{p} = (3, 3, 2, 1, 1)$.

**Lemma 2.4.1** *Zij $V = (\mathbb{C}^n, M_\phi)$ een n-dimensionaal $\mathbb{C}[t]$-moduul met $M_\phi \in S(p)$ voor een partitie $p$ van $n$. Dan is*

$$dim(End_{\mathbb{C}[t]}(V)) = dim(Hom_{\mathbb{C}[t]}(V, V)) = \hat{p}^2$$

**Bewijs :** We weten dat $V \simeq \oplus_{i=1}^r \mathbb{C}[t]/(q_i)$ en dus

$$\begin{aligned} End(V) =& Hom(\oplus_{i=1}^r \mathbb{C}[t]/(q_i), \oplus_{j=1}^r \mathbb{C}[t]/(q_j)) \\ =& \oplus_{i,j=1}^r Hom(\mathbb{C}[t]/(q_i), \mathbb{C}[t]/(q_j)) \end{aligned}$$

Omdat ieder moduul-morfisme van een cyclisch moduul bepaald wordt door het beeld van de voortbrenger weten we dat

$$Hom(\mathbb{C}[t]/(q_i), \mathbb{C}[t]/(q_j)) = \{f \in \mathbb{C}[t]/(q_j) \mid q_i.f \in (q_j)\}$$

We hebben verder de deelbaarheids eigenschap $q_j \mid q_i$ voor alle $j > i$. Als dus $j > i$ dan is $Hom(\mathbb{C}[t]/(q_i), \mathbb{C}[t]/(q_j)) \simeq \mathbb{C}[t]/(q_j)$. In het andere geval dat $i \geq j$ hebben we $q_j = g.q_i$ voor zekere $g \in \mathbb{C}[t]$ en dan hebben we

$$Hom(\mathbb{C}[t]/(q_i), \mathbb{C}[t]/(g.q_i)) = (g)/(g.q_i) \simeq \mathbb{C}[t]/(q_i)$$

In beide gevallen hebben we bijgevolg

$$Hom(\mathbb{C}[t]/(q_i), \mathbb{C}[t]/(q_j)) = \mathbb{C}[t]/(q_{max(i,j)})$$

en daarom geldt

$$\dim(End(V)) = \sum_{i,j=1}^r \min(p_i, p_j)$$

De dimensie van de endomorfisme ring hangt dus enkel af van de partitie $p$ en niet van het specifieke moduul $V$. Om deze uitdrukking expliciet te berekenen kunnen we dus een ander moduul $W$ nemen zolang de bijhorende matrix tot $S(p)$ behoort.

Neem nu verschillende complexe getallen $\lambda_1, ..., \lambda_{p_1}$ en neem als invariante factoren

$$q_i = \prod_{j=1}^{p_i} (t - \lambda_j)$$

dan is de bijhorende matrix een diagonaal-matrix en we hebben dat

$$W \simeq \oplus_{i=1}^{r} \mathbb{C}[t]/(q_i) \simeq \oplus_{j=1}^{p_1} (\mathbb{C}[t]/(t-\lambda_j))^{\oplus \hat{p}_j}$$

Omdat tenslotte $Hom(\mathbb{C}[t]/(t-\lambda_i), \mathbb{C}[t]/(t-\lambda_j)) = \delta_{ij}\mathbb{C}$ hebben we dat

$$\dim(End(V)) = \dim(End(W)) = \hat{p}^2$$

□

**Voorbeeld 2.4.1** *Zij $V$ een n-dimensionaal semi-simpel moduul*

$$V = \oplus_{i=1}^{r} (\mathbb{C}[t]/(t-\lambda_i))^{\oplus n_i}$$

*met verschillende $\lambda_i$ en $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_r$. Dan hebben we*

$$End(V) = \times_{i=1}^{r} M_{n_i}(\mathbb{C})$$

*en dus is de dimensie $n_1^2 + \ldots + n_r^2$. Merk tenslotte op dat de invariante factoren van de bijhorende diagonaal matrix gelijk zijn aan*

$$q_j = \prod_{i=1}^{s} (t-\lambda_i)$$

*als $n_{s+1} < j \leq n_r$.*

Een alternatieve beschrijving voor de endomorfisme ring van $V = (\mathbb{C}^n, M_\phi)$ is

$$End(V) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : A.M_\phi - M_\phi.A = 0\}$$

We identificeren in het volgende $Mod_n(\mathbb{C}[t])$ met $M_n(\mathbb{C})$.

**Lemma 2.4.2** *De functie $d : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{N}$ die aan een moduul $V = (\mathbb{C}^n, M_\phi)$ de dimensie van $End(V)$ associeert is half-continu naar boven. Hiermee bedoelen we dat de verzamelingen*

$$\{M_\phi \in M_n(\mathbb{C}) \mid dimEnd(V) < d\}$$

*open deelvarieteiten van $M_n(\mathbb{C})$ zijn.*

**Bewijs :** Bekijk de lineaire afbeelding

$$s_V : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C}) \quad s_V(A) = A.M_\phi - M_\phi.A$$

dan is de functie $V \to \dim(Kern(s_V))$ half-continu naar boven want

$$\{V \in M_n(\mathbb{C}) \mid \dim(Kern(s_V)) < d\} =$$

$$\{V \in M_n(\mathbb{C}) \mid \dim(rang(s_V)) \geq d' = n^2 - d\}$$

en de laatste verzameling is het open deel waarop een $d' \times d'$ minor niet-nul wordt.
□

**Definitie 2.4.2** *Een deelverzameling $M$ van een affiene varieteit $X$ noemen we lokaal-gesloten als $M$ de intersectie is van een open en een gesloten deelvarieteit van $X$. Equivalent, $M$ is open in zijn afsluiting.*
*$M$ noemen we construeerbaar indien $M$ een eindige unie is van lokaal-gesloten deelverzamelingen.*

**Stelling 2.4.1** *Noteer voor een $d \in \mathbb{N}$*

$$M_n(\mathbb{C})(d) = \{V \in M_n(\mathbb{C}) \mid dim(End(V)) = d' = n^2 - d\}$$

*Dan is $M_n(\mathbb{C})(d)$ een $GL_n(\mathbb{C})$-stabiele lokaal-gesloten deelverzameling van $M_n(\mathbb{C})$.*

**Bewijs :** $M_n(\mathbb{C})(d)$ is de doorsnede van de open deelvarieteit

$$\{V \in M_n(\mathbb{C}) \mid \dim(Kern(s_V)) < d' + 1\}$$

en de gesloten deelvarieteit

$$\{V \in M_n(\mathbb{C}) \mid \dim(Kern(s_V)) \geq d'\}$$

(beide uitspraken volgen uit voorgaand lemma). □

**Definitie 2.4.3** *De **lakens** van $M_n(\mathbb{C})$ noemen we de irreduciebele componenten van de lokaal-gesloten deelverzameligen $M_n(\mathbb{C})(d)$. Hiermee bedoelen we hetvolgende : $M_n(\mathbb{C})(d)$ is een open deelvarieteit van de afsluiting $\overline{M_n(\mathbb{C})(d)}$ dat een gesloten deelvarieteit is van $M_n(\mathbb{C})$. Zij $\cup_i Y_i$ de ontbinding in irreduciebele componenten van $\overline{M_n(\mathbb{C})(d)}$ dan hebben we dat $X_i = M_n(\mathbb{C})(d) \cap Y_i \neq \emptyset$ en dat $\overline{X_i} = Y_i$. $\cup_i X_i$ noemen we dan de ontbinding in irreduciebele componenten van $M_n(\mathbb{C})(d)$ en de $X_i$ zijn bijgevolg lakens.*

We zullen nu aantonen dat de dimensie van de banen constant is op een laken van $M_n(\mathbb{C})$. Hiervoor hebben we een algemene dimensie- formule nodig

**Stelling 2.4.2 (dimensie formule voor morfismen)** *Zij*

$$\phi : Z \to W$$

*een dominante reguliere afbeelding tussen irreduciebele affiene varieteiten. Voor ieder punt $z \in Z$ en iedere irreduciebele component $C$ van de vezel $\phi^{-1}(\phi(z))$ geldt*

$$dim(C) \geq dim(Z) - dim(W)$$

*Verder bestaat er een open deel $U$ in $W$ met $U \subset \phi(Z)$ en voor ieder punt $u \in U$ geldt*

$$dim(\phi^{-1}(u)) = dim(Z) - dim(W)$$

**Bewijs :** We schetsen enkel het bestaan van $U$. Zij

$$d = \dim(Z) - \dim(W)$$

We herhalen effe de formulering van het Noether's normalizatie lemma : zij $A$ een affien domein over een lichaam $K$, dan bestaan er $K$-algebraisch onafhankelijke elementen $a_1, ..., a_n$ in $A$ zodat $A$ een eindig moduul is over de polynoomring $K[a_1, ..., a_n]$. $n$ is dan natuurlijk de trancendentiegraad van het quotienten lichaam van $A$ over $K$.
Pas dit nu toe op de situatie $\mathbb{C}(W) \subset \mathbb{C}(W)\mathcal{O}(Z)$. Dan bestaan er een $s \in \mathcal{O}(W)$ en algebraisch onafhankelijke $f_1, ..., f_d \in \mathcal{O}(Z)_s$ zodat $\mathcal{O}(Z)_s$ integraal is over $\mathcal{O}(W)_s[f_1, ..., f_d]$.
Hieruit haalt men reguliere mappen

$$Z_s \xrightarrow{\rho} W_s \times \mathbb{C}^d \xrightarrow{pr_1} W_s$$

waarvan de samenstelling $\phi$ is en $\rho$ is een surjectieve afbeelding met eindige vezels (volgt uit integraliteit). Bijgevolg is $W_s$ een open deel van $W$ met de gevraagde eigenschappen. □

**Gevolg 2.4.1** *Zij $\phi : Z \rightarrow W$ een reguliere afbeelding tussen affiene varieteiten, dan bevat $\phi(Z)$ een open dicht deel van $\overline{\phi(Z)}$.*

**Stelling 2.4.3** *Zij $V$ een $n$-dimensionaal moduul $(\mathbb{C}^n, M_V)$. Zij $C_V$ de baan van $V$ in $M_n(C)$ (d.i. de conjugatie-klasse van $M_V$) en $GL_V$ de stabilizer deelgroep, d.i.*

$$GL_V = \{g \in GL_n(\mathbb{C}) \mid g.M_V.g^{-1} = M_V\}$$

*dan hebben we*

$$n^2 = dim(C_V) + dim(GL_V)$$

*en verder is*

$$dim(GL_V) = dim(End(V)) = \hat{p}^2$$

**Bewijs :** Beschouw de reguliere afbeelding

$$\phi : GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow C_V \quad g \rightarrow g.M_V.g^{-1}$$

Omdat $\phi$ surjectief is, is $\mathcal{O}(C_V) \subset \mathcal{O}(GL_n(\mathbb{C}))$ en bijgevolg is $C_V$ een irreduciebele affiene varieteit. Verder merken we op dat de vezels van ieder punt $N \in C_V$ dezelfde dimensie hebben. Want als $N = h.M_V.h^{-1}$ voor zekere $h \in GL_n(\mathbb{C})$ dan hebben we dat

$$\phi^{-1}(N) = h.GL_V.h^{-1}$$

en bijgevolg

$$\dim(\phi^{-1}(N)) = \dim(\phi^{-1}(M_V)) = \dim(GL_V)$$

maar dan moet wegens de dimensie-formule

$$\dim(GL_V) = \dim(GL_n(\mathbb{C})) - \dim(C_V)$$

De tweede uitspraak volgt uit het feit dat $GL_V$ een open deelvarieteit is van de irreduciebele varieteit $End(V)$ (want is een deel-vectorruimte van $M_n(\mathbb{C})$). $\square$

**Gevolg 2.4.2** *$M_n(\mathbb{C})(d)$ is*

$$\{V \in M_n(\mathbb{C}) \mid dim(C_V) = d\}$$

*en is de unie van alle $S(p)$ met $d = n^2 - \hat{p}^2$.*

Ons hoofd-doel zal er nu in bestaan aan te tonen dat de $S(p)$ juist de lakens zijn van $M_n(\mathbb{C})$. Hiervoor dienen we volgende zaken aan te tonen

- $S(p)$ is een irreduciebele varieteit
- $S(p)$ is gesloten in $M_n(\mathbb{C})(d)$ met $d = n^2 - \hat{p}^2$.

We beginnen met de irreducibiliteit. Hiervoor hebben we wat notatie nodig.
Als $f = t^m + a_{m-1}t^{m-1} + ... + a_0$ een monisch graad $m$ polynoom is, noteren we met $B(f)$ de $m \times m$ begeleidings matrix van $f$ waarvan we weten dat de invariante factoren zijn : $s_m = f$ en $s_k = 1$ voor $k < m$.
Zij $s, t \in \mathbb{N} - \{0\}$ en $h = b_s t^s + b_{s-1}t^{s-1} + ... + b_0$ een polynoom van graad $\leq s$. Dan noteren we met $C(s+1, t, h)$ de $s+1 \times t$ matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & b_0 \\ 0 & \dots & 0 & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_s \end{bmatrix}$$

Als de dimensies vastliggen noteren we gewoon $C(h)$.
Voor iedere partitie $p = (p_1, p_2, ..., p_r)$ van $n$ gaan we nu deelverzamelingen

$$Z(p) \subset Y(p) \subset X(p) \subset M_n(\mathbb{C})$$

definieren.

**Definitie 2.4.4** *$A \in X(p)$ als er monische polynomen $f_i$ van graad $p_i$ bestaan en polynomen $h_{ij}$ van graad $\leq p_i - 1$ zodat $A$ devolgende matrix is*

$$\begin{bmatrix} B(f_1) & C(h_{12}) & \dots & C(h_{1r}) \\ C(h_{21}) & B(f_2) & \dots & C(h_{2r}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(h_{r1}) & C(h_{r2} & \dots & B(f_r) \end{bmatrix}$$

**Lemma 2.4.3** *$X(p)$ is een affiene deelruimte $\mathbb{A}^{r.n}$ van $M_n(\mathbb{C})$ en dus irreduciebel.*

**Bewijs :** Zij bvb. $p = (3,2,1)$ dan heeft een willekeurige matrix in $X(p)$ volgende vorm

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & a & 0 & g & m \\ 1 & 0 & b & 0 & h & n \\ 0 & 1 & c & 0 & i & o \\ 0 & 0 & d & 0 & j & p \\ 0 & 0 & e & 1 & k & q \\ 0 & 0 & f & 0 & l & r \end{bmatrix}$$

met $a, ..., r \in \mathbb{C}$. □

**Definitie 2.4.5** *Een matrix $A \in X(p)$ behoort tot*

1. *$Y(p)$ indien volgende voorwaarden voldaan zijn*
   - *$(Y_1)$ : Als $i > j$ dan is $h_{ij} = 0$*
   - *$(Y_2)$ : Als $i < r$ dan $f_{i+1} \mid f_i$*
   - *$(Y_3)$ : Als $i < j$ dan $f_j \mid h_{ij}$*
2. *$Z(p)$ indien $A \in Y(p)$ en bovendien alle $h_{ij} = 0$. Met andere woorden : als $A \in Z(p)$ dan heeft $A$ invariante factoren $f_1, ..., f_r$ en behoort dus tot $S(p)$.*

**Stelling 2.4.4** *$Y(p)$ en $Z(p)$ zijn gesloten deelvarieteiten van $M_n(\mathbb{C})$ isomorf met een affiene ruimte $\mathbb{A}^b$ voor zekere $b$. In het bijzonder zijn $Y(p)$ en $Z(p)$ irreduciebel.*

**Bewijs :** Voorwaarden van de vorm $h_{ij} = 0$ zijn lineair en geven een affiene deelruimte van $X(p)$. De deelbaarheidseisen zijn echter niet lineair. Essentieel voor het bewijs is dus hetvolgende :
Zij $U$ de verzamelig van alle polynomen van graad $\leq s$, bijgevolg is $U \simeq \mathbb{A}^{s+1}$. Zij $V$ de verzameling van alle monische polynomen van graad $t$ waarbij $t \leq s$, dus $V \simeq \mathbb{A}^t$. Beschouw nu de deelverzameling $W$ van $U \times V$ :

$$W = \{(h, f) \mid f \text{ deelt } h\}$$

We beweren nu dat $W$ een gesloten deelvarieteit is van $U \times V$ isomorf met $\mathbb{A}^{s+1}$. M.b.v. het Euclidisch algorithme in $\mathbb{C}[t]$ bestaan er voor ieder $(h, f) \in U \times V$ uniek bepaalde polynomen $g, k \in \mathbb{C}[t]$ met

$$h = f.g + k$$

en omdat $f$ monisch is kan men zelfs de coefficienten van $g$ en $k$ beschrijven door middel van polynomen in de coefficienten van $h$ en $f$ (d.i. als reguliere functies

op $U \times V$). Bijgevolg is $W$ een gesloten deelvarieteit want $W$ is de nulpunten verzameling van alle coefficienten van $k$.
Zij nu $\mathbb{A}^{s+1-t}$ de ruimte van alle polynomen van graad $\leq s-t$ dan hebben we een afbeelding

$$\mathbb{A}^t \times \mathbb{A}^{s+1-t} \to W \quad (f,g) \to (f.g, f)$$

die regulier is. Deze map laat ook een reguliere inverse toe vermits we met bovenstaande de coefficienten van $g$ kunnen halen uit deze van $f.g$ en $f$. Bijgevolg is $W \simeq \mathbb{A}^{s+1}$. □

Een belangrijk direct gevolg hiervan is :

**Stelling 2.4.5** *$S(p)$ is irreduciebel.*

**Bewijs :** Bij definitie bestaat $S(p)$ uit de $n \times n$ matrixen waarvan de niet-constante invariante factoren graden hebben $(p_1, ..., p_r)$. Wegens de Frobenius normaal vorm zijn deze matrixen geconjugeerd met een element uit $Z(p)$. We hebben bijgevolg een surjectieve reguliere afbeelding

$$GL_n(\mathbb{C}) \times Z(p) \to S(p) \quad (g, A) \to g.A.g^{-1}$$

Nu zijn $GL_n(\mathbb{C})$ en $Z(p)$ irreduciebele affiene varieteiten, dus zo ook hun product (oefening). We hebben reeds gezien dat epimorfe beelden van irreduciebele varieteiten irreduciebel zijn en dus klaar. □

Vervolgens gaan we aantonen dat $S(p)$ gesloten is in $M_n(\mathbb{C})(d)$ met $d = n^2 - \hat{p}^2$. Zij dus $p = (p_1, ..., p_r)$ een partitie van $n$ en definieer voor iedere $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ het getal

$$s(k,p) = \sum_{i=1}^{r} min(k, p_i)$$

Andere beschrijvingen van dit getal zijn : $\sum_{i=1}^{k} \hat{p}_i$ of nog het aantal cellen in de eerste $k$-kolommen van het Young-diagram horend bij de partitie $p$.
Definieer nu de deelverzameling $Z_k \subset M_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n$ bestaande uit alle koppels $(A, v)$ waarvoor de dimensie van het deelmoduul van $V_A$ voortgebracht door de vector $v$ tenhoogste $k$ is.

**Lemma 2.4.4** *$Z_k$ is een gesloten deelvarieteit van $M_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n$.*

**Bewijs :** $(A, v) \in Z_k$ asa de rang van de matrix met colommen

$$\begin{bmatrix} v & A.v & A^2.v & \dots & A^{n-1}.v \end{bmatrix}$$

tenhoogste $k$ is. Bijgevolg is $Z_k$ de nulpuntverzameling van alle $k+1 \times k+1$ minoren van deze matrix en merk op dat elk van deze minoren een reguliere functie is op $M_(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n$. □

$M_n(\mathbb{C})$

Met $\pi_k$ noteren we de projectie-map naar de eerste component

$$\pi_k : Z_k \to M_n(\mathbb{C})$$

**Stelling 2.4.6** *Zij $A \in S(p)$ dan is de dimensie van de vezel $\pi_k^{-1}(A)$ gelijk aan $s(k,p)$.*

**Bewijs :** Als $A \in S(p)$ dan heeft het bijhorende $\mathbb{C}[t]$-moduul $V_A = (\mathbb{C}^n, A)$ een canonieke vorm

$$V_A \simeq \oplus_{i=1}^r \mathbb{C}[t]/(q_i)$$

Neem nu een willekeurig element $m \in V_A$ geschreven in deze ontbinding, d.i. $m = (m_1, ..., m_r)$ met $m_i \in \mathbb{C}[t]/(q_i)$ en we willen het deel-moduul van $V_A$ voortgebracht door $m$ beschrijven.
Laat ons beginnen met het $\mathbb{C}[t]$-deelmoduul van $\mathbb{C}[t]/(q_i)$ te beschrijven voortgebracht door $m_i$. We definieren

$$Ann(m_i) = \{f \in \mathbb{C}[t] \mid f.m_i = 0 \text{ in } \mathbb{C}[t]/(q_i)\}$$

dan is $Ann(m_i)$ een ideaal van $\mathbb{C}[t]$ en we mogen dus onderstellen dat $Ann(m_i)$ voortgebracht is door een monisch polynoom $h_i$. Ga als oefening na dat $h_i$ een deler moet zijn van $q_i$ in $\mathbb{C}[t]$. Zeg, $h_i.g_i = q_i$ dan is $\mathbb{C}[t].m_i \simeq \mathbb{C}[t]/(h_i)$ en is het deelmoduul $(g_i)/(q_i) \subset \mathbb{C}[t]/(q_i)$.
Zij nu $h = kgv(h_1, ..., h_r)$ dan is $Ann(m) = \mathbb{C}[t]h$ en is het deelmoduul voortgebracht door $m$ isomorf met $\mathbb{C}[t]/(h)$.
Met bovenstaande kunnen we de vezel $\pi_k^{-1}(A)$ beschrijven als

$$\cup_H \oplus_{i=1}^r Kern(h_i)$$

waarbij $Kern(h_i) = (g_i)/(q_i) \subset \mathbb{C}[t]/(q_i)$ en de unie is genomen over alle $r$-tuppels $H = (h_1, ..., h_r)$ waarin $h_i$ een monische deler van $q_i$ is en de graad van $kgv(h_1, ..., h_r)$ tenhoogste $k$ is.
Nu hebben we natuurlijk dat

$$dim(Kern(h_i)) \leq min(k, p_i)$$

want $Kern(h_i) \simeq \mathbb{C}[t]/(h_i)$ en dus van dimensie $\leq$ graad van $h_i$ die kleiner blijft dan $k$ en anderzijds is $Kern(h_i) = (g_i)/(q_i) \subset \mathbb{C}[t]/(q_i)$ dus moet de dimensie kleiner blijven dan de graad van $q_i$ die $p_i$ is.
Bijgevolg geldt ook

$$dim(\oplus_{i=1}^r Kern(h_i) \leq \sum_{i=1}^r min(k, p_i) = s(k,p)$$

omdat de vezel bestaat uit eindig veel zulke componenten moet dus ook de dimensie van $\pi_k^{-1}(A)$ tenhoogste $s(k,p)$ zijn.
Om de omgekeerde ongelijkheid te bewijzen volstaat het een $H = (h_1, ..., h_r)$ te vinden zodat $\oplus Kern(h_i) = s(k,p)$. Neem hiervoor een $g \in \mathbb{C}[t]$ waarvoor

van graad k.

$q_1 | q_2 | q_3 | \cdots | q_\ell | q_{\ell+1}$



- $g \mid q_i$ als de graad van $q_i \geq \ell$ is
- $q_i \mid g$ als de graad van $q_i \leq \ell$ is

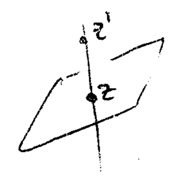
Merk op dat we wegens de deelbaarheids eigenschappen van de invariante factoren $q_i$ zulke $g$ steeds kunnen vinden. Ga nu als oefening na dat wanneer we stellen $h_i = ggd(q_i, g)$ dan is $dim(\oplus Kern(h_i)) = s(k,p)$. □

We hebben volgende verfijning nodig van de dimensie-formule voor reguliere afbeeldingen tussen affiene varieteiten. Het bewijs hiervan is verre van gemakkelijk en zullen we dus maar cadeau doen.

**Stelling 2.4.7 (Chevalley's half-continu stelling)** *Zij*

$\dim_{z'} = 1$

$$\phi : Z \to W$$



*een reguliere afbeelding tussen affiene varieteiten dan is de functie*

$$z \to dim_z \phi^{-1}(\phi(z))$$

*van* $Z \to \mathbb{N}$ *half-continu naar boven. Dus, voor alle* $n \in \mathbb{N}$ *is*

$\Rightarrow \dim_z = 2$

$$\{z \in Z \mid dim_z \phi^{-1}(\phi(z)) < n\}$$

*een open deelvarieteit van* $Z$. *Hierin noteren we met* $dim_z$ *de lokale dimensie in* $z$, *d.i. de dimensie van de maximale irreduciebele component van* $\phi^{-1}\phi(z)$ *die door* $z$ *gaat.*

**Definitie 2.4.6** *Definieer een partiele orde relatie op de verzameling van alle partities van* $n$ *via*

$$p \leq q \text{ asa } \forall \quad k \in \mathbb{N} \quad : \quad s(k,p) \leq s(k,q)$$

**Stelling 2.4.8** *Zij* $p$ *een partitie van* $n$ *dan geldt*

$$\overline{S(p)} \subset \cup_{q \geq p} S(q)$$

**Bewijs :** Definieer voor alle $k, l \in \mathbb{N}$

$$X(k,l) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \dim \pi_k^{-1}(A) \geq l\}$$

We beweren eerst dat $X(k,l)$ een gesloten deelvarieteit is. We weten dat

$$\pi_k^{-1}(A) = \cup_H \oplus Kern(h_i)$$

en ieder van de irreduciebele component hiervan bevat bijgevolg het punt $z_A = (A, 0)$. Wegens Chevalley is de verzameling

$$\{z \in Z_k \mid \dim_z \pi_k^{-1} \pi_k z \geq l\}$$

gesloten in $Z_k$. Nu is $X(k,l)$ de doorsnede van deze verzameling en de gesloten deelvarieteit $\{(A,0)\}$ in $Z_k$, klaar.
Wegens de stelling weten we dat

$$S(p) \subset C = \cap_k X(k, s(k,p))$$

en vermits dit een doorsnede van geslotens is, is $C$ gesloten en bevat bijgevolg de afsluiting $\overline{S(p)}$. Tenslotte moeten we nog opmerken dat als $A \in S(q)$ in $C$ ligt we per definitie weten dat voor alle $k \in \mathbb{N}$ : $\dim \pi_k^{-1}(A) \geq s(k,p)$ maar het linkerlid is wegens de stelling gelijk aan $s(k,q)$. Dus we hebben $q \geq p$ en dus is $C \subset \cup_{q \geq p} S(q)$ en zijn we klaar. □

**Stelling 2.4.9** *$S(p)$ is gesloten in $M_n(\mathbb{C})(d)$ waarbij $d = n^2 - \hat{p}^2$. Dus,*

$$\overline{S(p)} \cap M_n(\mathbb{C})(d) = S(p)$$

**Bewijs :** Ga als oefening na dat als $p < q$ (d.i. $p \leq q$ en $p \neq q$) dan ook $\hat{p}^2 < \hat{q}^2$. Nu weten we wegens voorgaande stelling dat

$$\overline{S(p)} \subset \cup_{p \leq q} S(q)$$

en als $q > p$ dan is $S(q) \cap M_n(\mathbb{C})(d) = \emptyset$, dus klaar. □

**Stelling 2.4.10 (Peterson)** *De afbeelding $p \to S(p)$ geeft een bijectie tussen de partities van $n$ en de lakens van $M_n(\mathbb{C})$.*

**Bewijs :** Per definitie zijn de lakens van $M_n(\mathbb{C})$ de irreduciebele componenten van de lokaal-gesloten deelverzamelingen $M_n(\mathbb{C})(d)$. We hebben nu aangetoond dat $S(p)$ met $n^2 - \hat{p}^2 = d$ irreduciebel is en gesloten in $M_n(\mathbb{C})(d)$. Om het bewijs af te maken merken we op dat weges de Frobenius normaal vorm stelling we weten dat $M_n(\mathbb{C})$ de unie is van de $S(p)$. □

We kunnen nu eenvoudig volgende standaard resultaten afleiden. Sommige van volgende stellingen hebben uitbreidingen naar willekeurige 'adjoint' acties van reductieve Lie groepen op hun Lie algebra. In ons geval is de Lie groep $GL_n(\mathbb{C})$ en de bijhorende Lie algebra is $M_n(\mathbb{C})$ met als Lie-haakje de commutator $[A,B] = AB - BA$. De 'adjoint' actie is in dit geval conjugatie.

**Stelling 2.4.11 (Dixmier)** *De lakens van $M_n(\mathbb{C})$ zijn disjunct.*

**Bewijs :** Uit de Frobenius normaal vorm is duidelijk dat $S(p) \cap S(q) = \emptyset$ als $p \neq q$. □

**Stelling 2.4.12 (Ozeki-Wakimoto,Tauvel)** *Ieder laken bevat semi-simpele modulen (diagonalizeerbare matrixen)*

dicht deel v.

**Bewijs :** Dit bewezen we wanneer we de dimensie van de endomorfisme ring van een moduul berekenden. □

**Stelling 2.4.13 (Johnston-Richardson)** *Ieder laken bevat juist* 1 *baan van een nilpotente matrix.*

**Bewijs :** We weten dat de banen van nilpotente matrixen geparametrizeerd zijn door partities. Het is gemakkelijk na te gaan dat de nilpotente matrix

$$\begin{bmatrix} J_{p_1}(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{p_r}(0) \end{bmatrix}$$

in $S(p_1, ..., p_r)$ ligt, klaar. □

## 2.5 Cellulaire decompositie

In deze sectie gaan we aantonen dat de lakens van $M_n(\mathbb{C})$ rationale gladde varieteiten zijn die een goede quotient varieteit toelaten isomorf met een affiene ruimte.
Essentieel voor deze resulaten is de gelijkheid

$$Y(p) = X(p) \cap S(p)$$

waar we de notatie van vorige sectie gebruiken. Vooraleer we dit kunnen aantonen hebben we eerst een technisch resultaat nodig omtrent voortbrengers van deelmodulen.

**Stelling 2.5.1** *Zij $A \in S(p)$ zodat het corresponderende moduul $V_A = (\mathbb{C}^n, A)$ een canonieke decompositie heeft*

$$V_A \simeq \oplus_{i=1}^{r} \mathbb{C}[t]/(q_i)$$

*Zij $i \in \mathbb{N}$ en $N$ een deelmoduul van $V$ voortgebracht door $i$ elementen. Dan hebben we*

1. *$dim(N) \leq \sum_{j=1}^{i} p_j$*
2. *Als $dim(N) = \sum_{j=1}^{i} p_j$ dan is $N \simeq \oplus_{j=1}^{i} \mathbb{C}[t]/(q_j)$*

**Bewijs :** Gebruik eerst de Chinese reststelling om aan te tonen dat de stelling volgt indien we het speciale geval kunnen aantonen waarin alle wortels va de invariante factoren gelijk zijn (of, m.a.w. dat $A$ slechts één eigenwaarde heeft), die we ook 0 mogen onderstellen (oefening).

Bijgevolg mogen we onderstellen dat $q_i = t^{p_i}$. We bewijzen de stelling door inductie op $i$. Als $i = 1$, dit is als $N = \mathbb{C}[t].n$ met $n \in V$, dan weten we dat $t^{p_1}.n = 0$ (schrijf $n$ in componenten en gebruik $p_1 \geq p_i$). Dus is $N$ een factormoduul van $\mathbb{C}[t]/(t^{p_1})$ en zijn we klaar.
Zij nu $i > 1$ en noteer met $m_i$ de voortbrenger van de $i$-de component $\mathbb{C}[t]/(t^{p_i})$.
We onderscheiden twee mogelijkheden :
**Geval 1 : $t^{p_1-1}$ slaat $N$ dood.** Zij $s = \#\{p_j : p_1 = p_j\}$ dan moet $N$ liggen in het deelmoduul van $V_A$ voortgebracht door $t.m_1, ..., t.m_s, m_{s+1}, ..., m_r$. Dit moduul heeft dimensie $< n$ en dus kunnen we per inductie op $n$ veronderstellen dat de stelling geldt, dus

$$\dim(N) \leq \sum_{j=1}^{s}(p_j - 1) + \sum_{j=s+1}^{i} p_j$$

en dus zeker

$$1 + \dim(N) \leq \sum_{j=1}^{s} p_j$$

In dit geval kan gelijkheid niet optreden.
**Geval 2 : $t^{p_1-1}$ is niet 0 op $N$.** We kunnen de voortbrengers $n_1, ..., n_i$ van $N$ herschikken dat $t^{p-1}.n_1 \neq 0$ en dus ligt de projectie van $n_1$ in éen van de $\mathbb{C}[t]/(t^{p_j})$ met $j \leq s$ niet in het deel-moduul voortbebracht door $t$. We veronderstellen dat deze $j = 1$. Maar dan hebben we een isomorfisme $\alpha : V \to V$ door

$$\alpha(m_1) = n_1 \quad \text{en} \quad \alpha(m_j) = m_j \quad \forall j \geq 2$$

We hebben een commutatief diagram van $\mathbb{C}[t]$-modulen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{C}[t].n_1 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "\beta"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & \overline{N} \arrow[r] \arrow[d, "\delta"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{C}[t]/(t^{p_1}).m_1 \arrow[r, "\phi"] & V_A \arrow[r] & \oplus_{j=2}^{r}\mathbb{C}[t]/(t^{p_j}).m_j \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

waar de horizontale mappen de canonieke inclusies en projecties zijn en $\gamma$ is de samenstelling $N \hookrightarrow V_A \to V_A$ waar de laatste map $\alpha^{-1}$ is. Nu is $\beta$ een isomorfisme en $\gamma$ een inclusie dus volgt uit het slangen-lemma dat $\delta$ injectief is.
Nu is $\overline{N}$ voortgebracht door $i - 1$ elementen en per inductie weten we

$$\dim(\overline{N}) \leq \sum_{j=2}^{i} p_j$$

waaruit $dim(N) \leq \sum_{i=1}^{i} p_i$. Verder weten we per inductie dat als gelijkheid van dimensies voor $\overline{N}$ geldt dan

$$\overline{N} \simeq \oplus_{i=2}^{i}\mathbb{C}[t]/(t^{p_j})$$

Maar uit het feit dat $\phi$ slpits en $\beta$ een iso is volgt dat $\epsilon$ split en bijgevolg hebben we ook

$$N \simeq \oplus_{j=1}^{i} \mathbb{C}[t]/(t^{p_j})$$

en klaar. □

In het vervolg fixeren we een partitie $p = (p_1, ..., p_r)$ van $n$ en noteren we de basisvectoren

$$\begin{cases} w_1 = & v_1 \\ w_2 = & v_{p_1+1} \\ w_3 = & v_{p_1+p_2+1} \\ & \vdots \\ w_r = & v_{p_1+...+p_{r-1}+1} \end{cases}$$

We zijn nu klaar voor het grote werk :

**Stelling 2.5.2** *Zij $p = (p_1, ..., p_r)$ een partitie van $n$. Dan geldt*

$$Y(p) = X(p) \cap S(p)$$

**Bewijs :**
$Y(p) \subset X(p) \cap S(p)$ : Als $A \in Y(p)$ bepaalt door de polynomen $f_1, ...f_r$ en $h_{ij}$ die aan de voorwaarden $(Y_1), (Y_2)$ en $(Y_3)$ van vorige sectie voldoen. Om te beginnen is $V_A$ voortgebracht als moduul door de $w_i$. We definieren nu nieuwe voortbrengers als volgt

$$\begin{cases} \overline{w_1} = & w_1 \\ \overline{w_j} = & w_j - \sum_{i=1}^{j-1} r_{ij} w_i \end{cases}$$

waar de $r_{ij} \in \mathbb{C}[t]$ bepaald worden door $h_{ij} = r_{ij} f_j$. Ga als oefening na dat

$$f_j . \overline{w_j} = 0 \quad 1 \leq j \leq r$$

en dus moet $V_A$ een factormoduul zijn van $\oplus \mathbb{C}[t]/(f_i)$. Omdat beide modulen van dimensie $n$ zijn moet dit dus een isomorfisme van modulen zijn. De $f_i$ zijn monische polynomen met de gewenste deelbaarheids-eigenschappen en dus volgt uit de canonieke vorm van modulen dat de $f_i$ de invariante factoren van $A$ zijn en dus volgt dat $A \in S(p)$.

$X(p) \cap S(p) \subset Y(p)$ : Zij $A \in X(p) \cap S(p)$ met invariante factoren $q_1, ..., q_r$ en noteer met $N_i$ het deelmoduul van $V_A$ voortgebracht door de elementen $w_1, w_2, ..., w_i$. We gaan nu nagaan dat $A$ voldoet aan de voorwaarden $(Y_i)$.

$A$ voldoet aan $(Y_1)$ : Gebruik de blok-vorm van $A \in X(p)$ om (inductief) af te leiden dat $dim(N_i) \leq \sum_{j=1}^{i} p_j$ enkel kan gelden als de $h_{ij}$ met $i > j$ nul zijn. Dus $A$ is een blok- boven driehoeksmatrix waaruit men volgende exacte rij deduceert

$$0 \to N_{i-1} \to N_i \to \mathbb{C}[t]/(f_i) \to 0$$

$A$ voldoet aan $(Y_2)$ : Vervolgens ga je na dat uit de vorm van $A$ moet gelden dat $dim(N_i) = \sum p_j$ en dus wegens voorgaande stelling

$$N_i \simeq \oplus \mathbb{C}[t]/(q_i)$$

Voor $i = 1$ geldt $N_1 = \mathbb{C}[t]/(f_1)$, dus $f_1 = q_1$. Stel nu dat we reeds weten dat $f_j = q_j$ voor $j < i$ en zij $g$ de karacteristieke polynoom voor $N_i$, dan volgt enerzijds uit bovenstaand isomorfisme dat $g = q_1 q_2 ... q_i$ en anderzijds uit bovenstaande exacte rij dat $g = q_1 q_2 ... q_{i-1} f_i$ waaruit volgt $f_i = q_i$. Bijgevolg zijn de $f_i$ de invariante factoren an $A$ en hieruit volgen de deelbaarheids-eisen.
Ga eerst na dat uit de specifieke vorm van $A \in X(k)$ volgt dat voor alle $i \geq 2$

$$f_i w_i = \sum_{j=1}^{i-1} h_{ji} w_j$$

(matrixen uitrekenen). Uit de unieke decompositie van een moduul als directe som van indecomposabele deelmodulen en dat voor alle $i$ : $N_i = \oplus_{j=1}^{i} \mathbb{C}[t]/(f_i)$ volgt dat de exacte rij split. Dat betekent dat we een $w \in N_{i-1}$ kunnen vinden zodat $f_i(w_i + w) = 0$ of dus met het gebruiken van bovenstaande

$$f_i(w_i) = \sum_{j=1}^{i-1} h_{ji} w_j = f_i(-w) \in f_i N_{i-1}$$

Het gevraagde zal dus volgen als we volgende bewering aantonen :
**bewering :** Zij $i \geq 2$ en stel dat $\sum_{j=1}^{i-1} g_j w_j \in f_i N_{i-1}$ voor bepaalde $g_j \in \mathbb{C}[t]$ dan hebben we voor alle $1 \leq j \leq i-1$ : $f_i \mid g_j$.
Wegens $(Y_2)$ kunnen we $f_j = r_{j+1} f_{j+1}$ stellen. Bewijs nu eerst de bewering voor $i = 2$. Gegeven is : $g_1.w_1 \in f_2 N_1$, dan wordt $r_2 g_1.w_1 \in r_2 f_2 N_1 = f_1.N_1 = 0$. Dus is $r_2 g_1 \in Ann(N_1) = \mathbb{C}[t]f_1 = \mathbb{C}[t]r_2 f_2$ en dus $f_2 \mid g_1$.
Zij nu gegeven $\sum_{j=1}^{i-1} g_j.w_j \in f_i N_{i-1}$, dan

$$\sum_{j=1}^{i-1} r_i g_j.w_j \in r_i f_i N_{i-1} = f_{i-1} N_{i-1} \subset f_{i-1} N_{i-2}$$

waar de inclusie volgt uit $f_{i-1} w_{i-1} \in f_{i-1} N_{i-2}$ (splitten van de exacte rij).
Nu is $Ann(\overline{w_i})$ in $N_{i-1}/N_{i-2}$ gelijk aan $\mathbb{C}[t]f_{i-1}$ en $r_i g_{i-1} \overline{w_i} = 0$ dus deelt $f_{i-1} = r_i f_i$ $r_i g_{i-1}$ en dus $f_i \mid g_{i-1}$.
Maar dan $\sum_{j=1}^{i-2} r_i g_j w_j \in f_{i-1} N_{i-2}$ en door de inductie mogen we besluiten dat $f_{i-1} = r_i f_i$ deelt $r_i g_j$ en dus $f_i \mid g_j$,klaar. $\square$

$A \in Z(p) \Rightarrow T(p,A) = I_n$

 $w_1 = e_1$ $w_2 = e_{p_1+1}$ $w_3 = e_{p_1+p_2+1}$ ...  $w_r = e_{p_1+\cdots+p_{r-1}+1}$

**Definitie 2.5.1** *Zij $A \in M_n(\mathbb{C})$ dan definieren we de matrix $T(p,A) \in M_{(}\mathbb{C})$ bestaande uit volgende kolommen*

$$(w_1, Aw_1, ..., A^{p_1-1}w_1, w_2, Aw_2, ..., A^{p_2-1}w_2, ..., w_r, Aw_r, ..., A^{p_r}w_r)$$

*Met $U(p)$ noteren we de verzameling matrixen $A \in M_n(\mathbb{C})$ zodat $T(p,A) \in GL_n(\mathbb{C})$. Merk op dat $det(T(p,A))$ een reguliere functie is in de entries van $A$ en dus is $U(p)$ een open deel-varieteit van $M_n(\mathbb{C})$.*
*Met $GL(p)$ noteren we de deelgroep van matrixen $A \in GL_n(\mathbb{C})$ met de eigenschap dat $Aw_i = w_i$ voor $1 \leq i \leq r$.*

Merk op dat $GL(p)$ een open deel is van de lineaire deelruimte $\mathbb{A}^{n(n-r)}$ van $M_n(\mathbb{C})$ bestaande uit matrixen waarvan de kolommen $1, p_1+1, ..., p_1+...+p_{r-1}+1$ gelijk zijn aan $w_1, w_2, ..., w_r$.

**Stelling 2.5.3** *De actie van $GL_n(\mathbb{C})$ op $M_n(\mathbb{C})$ door conjugatie induceert een isomorfisme van varieteiten*

$$\Phi : G(p) \times X(p) \to U(p)$$

**Bewijs :** Zij $C \in GL(p)$ en $D \in X(p)$. Ga als oefening na dat uit de vorm van deze matrixen onmiddellijk volgt dat

$$T(p, CDC^{-1}) = C$$

en bijgevolg ligt het beeld van $\Phi$ in $U(p)$.
Omgekeerd, zij $A \in U(p)$ ga dan na dat

$$(T(p,A), T(p,A)^{-1}AT(p,A)) \in GL(p) \times X(p)$$

en beide reguliere afbeeldingen zijn elkaars inverse, klaar. □

**Stelling 2.5.4** *De actie van $GL_n(\mathbb{C})$ op $M_n(\mathbb{C})$ door conjugatie induceert een isomorfisme van varieteiten*

$$GL(p) \times Y(p) \to U(p) \cap S(p)$$

**Bewijs :** Volgt uit voorgaande stelling en $Y(p) = X(p) \cap S(p)$. □

**Definitie 2.5.2** *Een irreduciebele varieteit $X$ noemen we rationaal als het functie-lichaam $\mathbb{C}(X)$ een zuiver trancendente lichaamsuitbreiding van $\mathbb{C}$ is zeg $\mathbb{C}(f_1, ..., f_k)$. Een voldoende algemeen punt $x \in X$ wordt dus vastgelegd door $k$ complexe getallen, nl. de evaluaties in $x$ van de rationale functies $f_i$.*

**Stelling 2.5.5 (Bongartz)** *De lakens van $M_n(\mathbb{C})$ zijn rationale varieteiten.*

**Bewijs :** Omdat $U(p)$ een open deelvarieteit is van $M_n(\mathbb{C})$ is $U(p) \cap S(p)$ een open deelvarieteit van de irreduciebele varieteit $S(p)$ en heeft bijgevolg hetzelfde functie-lichaam.
Verder weten we reeds dat $GL(p)$ rationaal is (want een open deelvarieteit van $\mathbb{A}^{n(n-r)}$ alsook $Y(p)$ (want isomorf met een $\mathbb{A}^b$). Dus is het product ook rationaal en klaar wegens voorgaande stelling. □

**Definitie 2.5.3** *Zij $Z$ een affiene varieteit beschreven als nulpunts-verzameling van $(f_1, ..., f_d)$ in $\mathbb{A}^n$ met $f_i \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n) = \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$. Een punt $z \in Z$ noemen we glad (of niet-singulier) als*

$$rang \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(z) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(z) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_d}{\partial x_1}(z) & \cdots & \frac{\partial f_d}{\partial x_n}(z) \end{bmatrix} \geq n - dim_z(Z)$$

*Hieruit volgt dat iedere irreduciebele varieteit een open deel van gladde punten bezit. $Z$ noemen we glad als alle punten van $Z$ glad zijn.*

**Stelling 2.5.6 (Peterson)** *De lakens van $M_n(\mathbb{C})$ zijn gladde varieteiten.*

**Bewijs :** $Y(p) \simeq \mathbb{A}^b$ en is dus glad. $GL(p)$ is een open delvarieteit van $\mathbb{A}^{n(n-r)}$ en dus glad. Bijgevolg is ook hun product glad (oefening).
We weten dus reeds dat de open deelvarieteit $U(p) \cap S(p)$ van $S(p)$ bestaat uit gladde punten. Vervolgens merken we op dat als $A \in Z(p)$ dan is $T(p, A) = I_n$ en dus is $Z(p) \subset U(p) \cap S(p)$. Vermits $Z(p)$ dus uit gladde punten bestaat, zijn ook alle punten van $GL_n(C).Z(p) = S(p)$ glad (gebruik de isomorfismen $g(-)g^{-1}$ op $M_n(\mathbb{C})$). □

**Stelling 2.5.7 (cellulaire decompositie)** *Er bestaat een reguliere quotient afbeelding*

$$S(p) \to Z(p)$$

*waarvan de vezels juist de conjugatie-klassen in $S(p)$ zijn. Dus de banen-ruimte $S(p)/GL_n(\mathbb{C})$ bestaat en is isomorf met een affiene ruimte $\mathbb{A}^b$.*

**Bewijs :** De coefficienten van de invariante factoren van een matrix $A \in S(p)$ zijn coordinaat-functies op de deelvarieteit $Y(p)$ dus reguliere functies. Maar dan zijn de coefficienten van de invariante factors ook reguliere functies op $GL(p) \times Y(p)$ en dus op

$$U(p) \cap S(p)$$

In het bewijs van vorige stelling hebben we reeds aangetoond dat $Z(p) \subset U(p) \cap Y(p)$. Omdat de coefficienten van de invariante factors constant blijven op $GL_n(\mathbb{C})$-banen, zijn ze ook reguliere functies op $GL_n(\mathbb{C}).Z(p) = S(p)$.

We kunnen deze reguliere functies bijgevolg gebruiken om een reguliere afbeelding $S(p) \to Z(p)$ te definieren. Uit de Frobenius normaal vorm volgt dat de vezels van deze map juist de conjugatie klassen van $n \times n$ matrixen in $S(p)$ zijn. Rest nog op te merken dat we in vorige sectie bewezen hebben dat $Z(p) \simeq \mathbb{A}^b$ en klaar. $\square$

**Oefening 2.5.1** *Ga na dat* $Z(p) \simeq \mathbb{A}^{p_1}$.

# Hoofdstuk 3

# Lie algebras en quivers

## 3.1 De representatie-ruimte van een quiver

Een quiver is een georienteerde eindige graph $Q$ bestaande uit

- een verzameling $Q_0 = \{v_1, ..., v_n\}$ van hoekpunten
- een verzameling $Q_1 = \{\phi_1, ..., \phi_m\}$ van pijlen
- twee afbeeldingen $k$ en $s$ van $Q_1 \to Q_0$ die aan een pijl $\phi$ zijn kop-punt $k(\phi)$ en staart-punt $s(\phi)$ associeren

We laten lussen en meervoudige pijlen tussen dezelfde hoekpunten toe.

**Definitie 3.1.1** *1. Een representatie $V$ van de quiver $Q$ is een verzameling eindig dimensionale vector-ruimten $V_i$ voor $i \in Q_0$ samen met lineaire afbeeldingen*

$$V(\phi) : V_{s(\phi)} \to V_{k(\phi)}$$

*voor iedere $\phi \in Q_1$.*

*2. De vector $\underline{dim}(V) = (dim(V_1), ..., dim(V_n)) \in \mathbb{N}^n$ noemen we de dimensie-vector van $V$.*

*3. Een morphisme $f : V \to W$ tussen twee representaties va $Q$ is een verzameling lineaire afbeeldingen $f_i : V_i \to W_i$ zodat voor alle $\phi \in Q_1$*

$$\begin{tikzcd} V_{s(\phi)} \arrow[r, "f_{s(\phi)}"] \arrow[d, "V(\phi)"'] & W_{s(\phi)} \arrow[d, "W(\phi)"] \\ V_{k(\phi)} \arrow[r, "f_{k(\phi)}"'] & W_{k(\phi)} \end{tikzcd}$$

*een isomorphisme is een invertiebel morphisme.*

4. *De directe som $V \oplus W$ van twee representaties $V$ en $W$ van $Q$ is gedefinieerd door $(V \oplus W)_i = V_i \oplus W_i$ en*

$$(V \oplus W)(\phi) = \begin{bmatrix} V(\phi) & 0 \\ 0 & W(\phi) \end{bmatrix}$$

*Een representatie noemen we indecomposabel als $V$ niet geschreven kan worden als de directe som van niet-nul deelrepresentaties.*

We geven nu een characterizatie van indecomposabele representaties d.m.v. de endomorfismen-ring $End(V)$ d.i. de ring van morfismen $f : V \to V$. We noemen zo'n $f$ nilpotent als $f^k = f \circ \ldots \circ f = 0$.

**Stelling 3.1.1** *Een quiver-representatie $V$ is indecomposabel asa $End(V)$ een lokale ring is, d.i. het ideaal bestaande uit nilpotente morfismen heeft codimensie 1.*

**Bewijs :** Zij $V$ een willekeurige representatie van $Q$ en zij $f : V \to V$ een morfisme van quiver-representaties, dan zijn $Ker(f)$ en $Coker(f)$ ook quiver-representaties. Bijgevolg is $f$ een automorfisme asa $f$ surjectief asa $f$ injectief is.
We beweren dat er een decompositie bestaat

$$V = P \oplus Q \quad \text{met}$$

1. $f(P) \subset P$ en $f(Q) \subset Q$
2. $f \mid P$ is een automorfisme
3. $f \mid Q$ is nilpotent

Immers omdat $V$ bestaat uit eindig dimensionale vector-ruimten worden de rijen

$$V \supset f(V) \supset f^2(V) \supset \ldots \text{ en } 0 \subset Ker(f) \subset Ker(f^2) \subset ..$$

uiteindelijk stationair. Er bestaat dus een $m \in \mathbb{N}$ met

$$f^m(V) = f^n(V) \text{ en } Ker(f^m) = Ker(f^n) \text{ voor alle } n \geq m$$

Neem nu $P = f^m(V)$ en $Q = Ker(f^m)$ dan volgt uit dat $f \mid P$ een automorfisme is. Verder is $f(Q) \subset Q$ en omdat $f^m(Q) = f^m((f^m)^{-1}(0)) = 0$ is $f \mid Q$ nilpotent. Uit beide feiten volgt dat $P \cap Q = 0$. Tenslotte volgt uit $V = (f^m)^{-1}(f^m(V)) = (f^m)^{-1}(f^{2m}(V)) = (f^m)^{-1}(f^m(f^m(V))) = f^m(V) + Ker(f^m) = P + Q$ en klaar.
Zij nu $V$ indecomposabel dan moet iedere $f$ ofwel nilpotent of omkeerbaar zijn wegens voorgaande. Maar dan is $End(V)/Nilp(V)$ een (scheef) lichaam en omdat we werken over $\mathbb{C}$ en $End(V)$ eindig dimensionaal is, moet dit quotient isomorf met $\mathbb{C}$ zijn.
Omgekeerd, stel $End(V)/Nilp(V) \simeq \mathbb{C}$ en stel dan $V = P \oplus Q$ een decompositie is. Omdat $End(P)/Nilp(P) \oplus End(Q)/Nilp(Q) \subset End(V)/Nilp(V)$ moet $P$ of $Q$ nul zijn. $\square$

**Definitie 3.1.2** *De Tits quadratische vorm op $\mathbb{Q}^n$ geassocieerd aan de quiver $Q$ is*

$$q(x_1, ...., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{\phi \in Q_1} x_{s(\phi)} x_{k(\phi)}$$

Merk op dat de Tits vorm enkel afhangt van de onderliggende graph en niet van de specifieke orientatie van de pijlen. Zoals met elke quadratische vorm kunnen we ook aan de Tits vorm een bilineaire vorm $(-,-)_Q$ associeren via

$$(x, y)_Q = q(x+y) - q(x) - q(y) = x.C_Q.y^t$$

waarbij de symmetrische $n \times n$ matrix $C_Q$ met entries in $\mathbb{Z}$ de Cartan matrix genoemd wordt. De entries van $C$ worden gegeven door

$$c_{ij} = \begin{cases} 2 - 2\#\{ \text{ lussen in } i\} & i = j \\ -\#\{ \text{ pijlen tussen } i \text{ en } j\} & i \neq j \end{cases}$$

Vervolgens gaan we de studie van de representaties van $Q$ meetkundig formuleren.

**Definitie 3.1.3** *Zij $Q$ een quiver en $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ een dimensie-vector. De representatie-ruimte van $Q$ voor dimensie-vector $\alpha$ is de verzameling representaties*

$$R(Q, \alpha) = \{V \mid V_i = \mathbb{C}^{\alpha_i}, 1 \leq i \leq n\}$$

*Vermits $V \in R(Q, \alpha)$ bepaald wordt door de lineaire afbeeldingen $V(\phi)$ hebben we*

$$R(Q, \alpha) = \prod_{\phi \in Q_1} M_\phi(\mathbb{C})$$

*waarbij $M_\phi(\mathbb{C})$ de verzameling van alle $\alpha_{k(\phi)} \times \alpha_{s(\phi)}$ matrixen met entries in $\mathbb{C}$ is. Merk op dat $R(Q, \alpha)$ een affiene ruimte $\mathbb{A}^r$ is met*

$$r = \sum_{\phi \in Q_1} \alpha_{k(\phi)} \alpha_{s(\phi)}$$

We willen nu alle representaties beschrijven op isomorfie na. Wederom zullen de isomorfie-klassen gegeven worden door de banen in $R(Q, \alpha)$ onder de actie van een algebraische groep.

**Definitie 3.1.4** *De algebraische groep*

$$GL_\alpha(C) = \prod_{i=1}^{n} GL_{\alpha_i}(\mathbb{C})$$

*werkt op $R(Q, \alpha)$ via*

$$(g.V)(\phi) = g_{k(\phi)}.V(\phi).g_{s(\phi)}^{-1}$$

*waarby $g = (g_1, ..., g_n) \in GL_\alpha(\mathbb{C})$. Men gaat na dat de $GL_\alpha(\mathbb{C})$ banen in $R(Q, \alpha)$ juist de isomorphie klassen zijn van representaties van dimensie-vector $\alpha$.*

Een andere beschrijving van $GL_\alpha(\mathbb{C})$ is als de groep van eenheden van de deel-algebra

$$M_\alpha(\mathbb{C}) = \begin{bmatrix} M_{\alpha_1}(\mathbb{C}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_{\alpha_2}(\mathbb{C}) & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M_{\alpha_n}(\mathbb{C}) \end{bmatrix} \subset M_{\sum \alpha_i}(\mathbb{C})$$

Merk ook op dat $\mathbb{C}^*$ diagonaal ingebed in $GL_\alpha(\mathbb{C})$ triviaal werkt op $R(Q,\alpha)$ en dat de dimensie gelijk is aan

$$dim(GL_\alpha(\mathbb{C}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2$$

en we krijgen een interpretatie voor de Tits quadratische vorm

**Lemma 3.1.1** *Zij $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ een dimensie-vector van de quiver $Q$ dan is*

$$q(\alpha) = q(\alpha_1, ..., \alpha_n) = dim(GL_\alpha(\mathbb{C})) - dim(R(Q,\alpha))$$

**Bewijs :** Volgt uit de berekening va de dimensies van $GL_\alpha(\mathbb{C})$ en van $R(Q,\alpha)$. $\square$

We zullen zien dat de representatie theorie van quivers in drie grote deelklassen uiteenvalt. We geven van elk van hen de eenvoudigste voorbeelden.

**Voorbeeld 3.1.1**
- *(eindig type) : de quiver $Q_e$ : $\bullet$. Er bestaan maar eindig veel dimensie vectoren van indecomposabele representaties en van elke dimensie zij er slechts eindig veel isomorfie klassen. In dit geval is dit enkel de dimensie* $(1)$.

- *(tam type) : de quiver $Q_t$ : $\overset{\bullet}{\circlearrowleft}$. Er bestaan oneindig veel dimensie vectore van indecomposabele representaties maar van iedere dimensie zijn er tenhoogste 1-dimensionale families van isomorfieklassen van indecomposabelen. In dit geval is voor dimensie $(n)$ de representatie-ruimte $R(Q_t,(n)) = M_n(\mathbb{C})$ en de actie van $GL_{(n)}(\mathbb{C}) = GL_n(\mathbb{C})$ is gegeven door conjugatie. Dus weten we dat er voor elke $n$ een 1-dimensionale familie van indecomposabelen bestaat nl. de Jordan matrixen $J_n(\lambda)$ met $\lambda \in \mathbb{C}$.*

- *(wild type) : de quiver $Q_w$ : $\circlearrowleft\bullet\circlearrowright$. Hier bestaan er oneindig veel dimensie-vectoren van indecomposabelen en er bestaan dimensies waarvoor er de isomorfieklassen hogere dimensies hebben. In dit geval is $R(Q_w,(n)) = M_n(\mathbb{C}) \oplus M_n(\mathbb{C})$ en de actie wordt gegeven door gelijktijdige comjugatie.*

## 3.2 Eindig type en Dynkin diagrammen

In deze sectie sullen we aantonen dat eindig representatie type ernstige beperkingen oplegt aan de quiver, nl. dat de quiver een Dynkin diagram moet zijn. Verderop zullen we ook de omgekeerde stelling bewijzen. We beginnen met wat notatie

**Definitie 3.2.1** *Zij $V$ een representatie van dimensie $\alpha$ van de quiver $Q$. Met $\mathcal{O}_V$ zullen we de baan $GL_\alpha(\mathbb{C}).V$ in $R(Q,\alpha)$ noteren. De isotropie groep $C_V$ is de deelgroep*

$$\{g \in GL_\alpha(\mathbb{C}) : g.V = V\}$$

*is de groep van eenheden in $End(V)$ en bijgevolg irreduciebel(als open deel va de affiene varieteit $End(V)$).*

**Stelling 3.2.1** *Als $Q$ eindig representatie-type heeft dan is de Tits quadratische vorm $q_Q$ positief definiet. D.w.z. dat voor alle $(r_1,...,r_n) \in \mathbb{R}^n - \{(0,...,0)\}$ geldt dat*

$$q(r_1,...,r_n) > 0$$

**Bewijs :** Zoals voorheen weten we dat de afbeelding

$$GL_\alpha(\mathbb{C}) \to R(Q,\alpha) \quad g \to g.V$$

een isomorfisme induceert

$$\mathcal{O}_V \simeq GL_\alpha(\mathbb{C})/C_V$$

en we weten dat $dim(C_V) = dim(End(V))$. Dus

$$dim(\mathcal{O}_V) + dim(End(V)) = dim(GL_\alpha(\mathbb{C}))$$

Verder weten we dat $\mathbb{C}^*$ diagonaal ingebed in $GL_\alpha(\mathbb{C})$ triviaal werkt op $V$ of m.a.w. dat $\mathbb{C} \subset End(V)$. Bijgevolg geldt steeds

$$dim(\mathcal{O}_V) \leq dim(GL_\alpha(\mathbb{C})) - 1$$

Veronderstel nu dat $Q$ een quiver is van eindig represetatie-type en bekijk $R(Q,\alpha)$ voor $\alpha \in \mathbb{N}^n - \{(0,...,0)\}$. Omdat iedere $\alpha$-dimensionale representatie op unieke manier een directe som is van indecomposabele representaties en er zo maar eindig veel zijn bestaat $R(Q,\alpha)$ uit eindig veel banen.
Bijgevolg moet 1 van deze banen zeg $\mathcal{O}_V$ open zijn in $R(Q,\alpha)$ en dus dezelfde dimensie hebben. Bijgevolg,

$$dim(R(Q,\alpha)) = dim(\mathcal{O}_V) \leq dim(GL_\alpha(\mathbb{C})) - 1$$

of ook,

$$q(\alpha) \geq 1 > 0$$

Omdat alle niet-diagonaal entries van de Cartan matrix van $q$ negatief zijn kunnen we deze ongelijkheid ook bewjzen voor alle $\alpha \in \mathbb{Z}^n - \{(0, ..., 0)\}$ (schrijf zo'n vector als $u - v$ met $u, v \in \mathbb{N}^n$ en gebruik bilineariteit). Omdat $q$ positief definiet is op $\mathbb{Z}^n$ geldt hetzelfde voor $\mathbb{Q}^n$ en dus ook voor $\mathbb{R}^n$, klaar. $\square$

**Definitie 3.2.2** *Een representatie $V$ van $Q$ noemen we star in het hoekpunt $v_k$ indien indien de $k$-de component van de automorfisme groep $C_V \subset GL_\alpha(\mathbb{C})$ gelijk is aan $\mathbb{C}^*.id_{V_k}$.*

**Lemma 3.2.1** *Zij $Q$ de volgende quiver*

$$\begin{tikzcd}
& & & & & \bullet_{r+1} \arrow[dl] \\
\bullet_{r+3} \arrow[r] & \bullet_1 \arrow[r] & \bullet_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \bullet_r & \\
& & & & & \bullet_{r+2} \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

*met $r \geq 1$. Neem $V$ de representatie met dimensie $(2, ..., 2, 1, 1, 1)$ waarbij $V_i = \mathbb{C}u_1 + \mathbb{C}u_2$ voor $i \leq r$, $V_{r+1} = \mathbb{C}u_1$, $V_{r+2} = \mathbb{C}u_2$ en $V_{r+3} = \mathbb{C}(u_1 + u_2)$ en alle lineaire afbeeldingen zijn de natuurlijke inclusies.*
*Dan is $V$ star in alle hoekpunten.*

**Bewijs :** Ga na dat uit de definitie van $f = (f_1, ..., f_{r+3}) \in End(V)$ volgt dat $f_1 = ... = f_r = \phi$ en dat $f_j = \phi \mid V_j$ voor $r + 1 \leq j \leq r + 3$. Concludeer hieruit dat $f$ een veelvoud is van de identiteit. $\square$

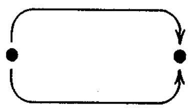
**Lemma 3.2.2** *Voor iedere $r \geq 1$ heeft de quiver $Q'$*

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[dr] & & & & & \bullet \arrow[dl] \\
& \bullet_1 \arrow[r] & \bullet_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \bullet_r & \\
\bullet \arrow[ur] & & & & & \bullet \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

*oneindig representatie type.*

**Bewijs :** Breid de representatie $V$ van de quiver $Q$ uit voorgaand lemma uit met $V_{r+4} = \mathbb{C}$ en $\psi : V_{r+4} \to V_1 = \mathbb{C}^2$ een willekeurige lineaire afbeelding en noem deze representatie van $Q'$ $V_\psi$. Ga nu na dat $V_\psi \simeq V_\phi$ asa $\psi = c.\phi$ voor een $c \in \mathbb{C}^*$.
Bijgevolg zijn er oneindig veel isomorfie klassen van representaties van $Q'$ van dimensie type $(2, ..., 2, 1, 1, 1, 1)$ en kan $Q'$ dus niet van eindig type zijn. $\square$

**Lemma 3.2.3** *Zij Q" de quiver*



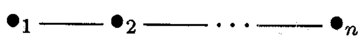
*dan is Q" van oneindig representatie type.*

**Bewijs :** Beschouw representaties $(I_n, A)$ van dimensie $(n, n)$ en toon aan dat isomorfie klassen juist conjugatie-klassen van $A$ zijn. Klaar. □

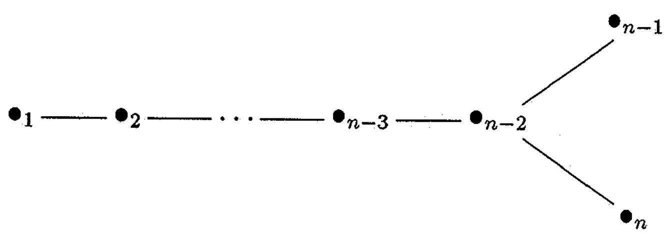
Later zullen we aantonen dat het representatie-type van een quiver niet afhangt van de orientatie van de pijlen. Als we dit even aannemen dan kunnen we nu de quivers van eindig representatie type beperken tot enkele klassen. Later zal volgen dat al deze quivers inderdaad eindig representatie type hebben.

**Stelling 3.2.2** *Zij Q een quiver van eindig representatie-type. Dan moet de onderliggende grapf van Q (d.i. vergeet de orientatie) één van volgende zgn. Dynkin diagrammen zijn.*

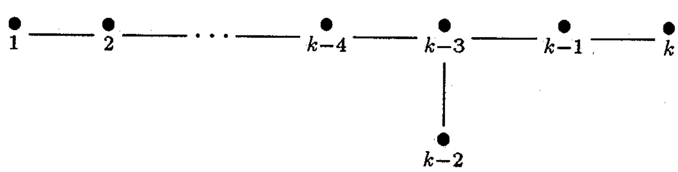
1. *Type $A_n$ voor $n \geq 1$ :*



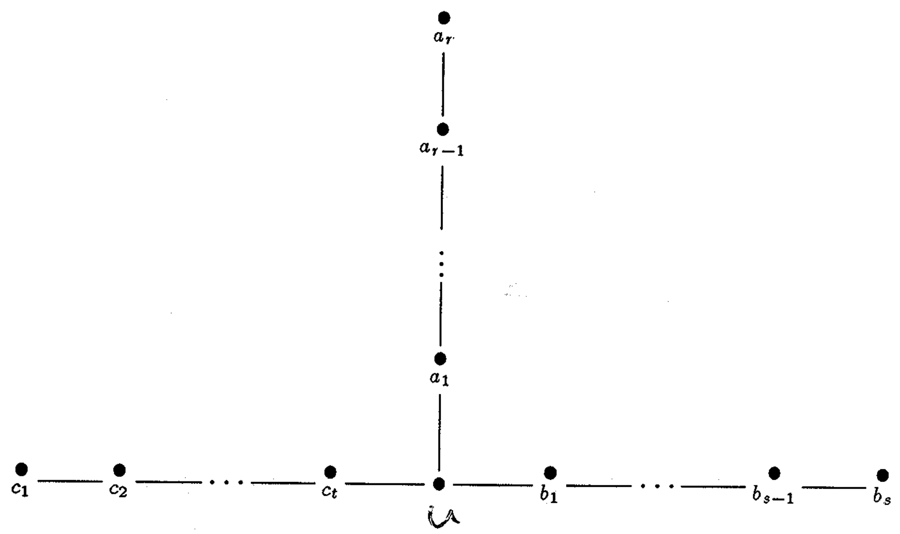
2. *Type $D_n$ met $n \geq 4$ :*



3. *Type $E_k$ voor $6 \leq k \leq 8$ :*



**Bewijs :** Als $Q$ eindig representatie-type heeft dan geldt hetzelfde voor iedere deel-quiver (met de voor de hand liggende definitie). Uit voorgaande lemmas volgt dus dat er tussen elke twee hoekpunten tenhoogste 1 pijl kan zijn en dat er tenhoogste 3 pijlen een hoekpunt aandoen. Verder kan er slechts 1 hoekpunt zijn waar er 3 pijlen aankomen of vertrekken. Dus is de algemene mogelijke vorm van een quiver van eindig type $Q(r,s,t)$ waarbij we steeds mogen onderstellen dat $r \leq s \leq t$




Beschouw de volgende quadratische vorm

$$\begin{aligned}\Psi_m(z_1,...,z_m) =& z_1^2 + \ldots + z_{m-1}^2 + \frac{m-1}{2m} z_m^2 \\ & - z_1 z_2 - z_2 z_3 - \ldots - z_{m-1} z_m \\ =& \sum_{k=1}^{m-1} \frac{k(k+1)}{2} \left(\frac{1}{k+1} z_{k+1} - \frac{1}{k} z_k\right)^2\end{aligned}$$

dan is $\Psi_m$ duidelijk positief semi-definiet en $\Psi_m(a_1,...,a_m) = 0$ enkel als

$$a_1 = \frac{a_2}{2} = \frac{a_3}{3} = \ldots = \frac{a_m}{m}$$

Bekijk nu de Tits quadratische vorm van $Q(r,s,t)$ en ga na dat deze geschreven kan worden als

$$\begin{aligned}q(x_1,...,x_r,y_1,...,y_s,z_1,...,z_t,u) =& \Psi_{r+1}(x_1,...,x_r,u) + \Psi_{s+1}(y_1,...,y_s,u) \\ & + \Psi_{t+1}(z_1,...,z_t,u) + \underbrace{\left(1 - \frac{r}{2(r+1)} - \frac{s}{2(s+1)} - \frac{t}{2(t+1)}\right)}_{*} u^2\end{aligned}$$

Ga tenslotte na dat de Tits quadratische vorm enkel positief definiet kan zijn in volgende gevallen

- $r = 0$
- $r = s = 1$
- $r = 1, s = 2$ en $2 \leq t \leq 4$

als $* > 0$ (= Q la niet)

dus moet $r < 2$ i.e. $r=0$ of $r=1$

als $r=1 \Rightarrow (s=1)$

$1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - (< \frac{1}{2})$

$s=2$

$1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{t}{2(t+1)} > 0$

i.e. $1 > \frac{7}{12} + \frac{t}{2(t+1)}$

$\frac{5}{12} > \frac{t}{2(t+1)}$ $\quad 10(t+1) > 12t$

$10 > 2t$ $\quad (t < 5)$

waaruit de stelling volgt. □

Als we een quiver van eindig representatie type hebben kunnen we dan ook alle indecomposabele representaties classificeren. Volgend resultaat zal ook volgen uit de algemene stellingen die we later zullen aantonen.

**Stelling 3.2.3 (Gabriel)** *Zij $Q$ een quiver van eindig representatie type met Tits vorm $q$. Een vector $\alpha \in \mathbb{N}^n$ wordt een positieve wortel genoemd indien $q(\alpha) = 1$.*
*De dimensie-afbeelding geeft een bijectie tussen de isomorfie klassen van indecomposabele representaties van $Q$ en de positieve wortels.*

**Oefening 3.2.1** *Bereken alle wortels van $A_1$ en $A_2$, d.i. alle $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ met $q(\alpha) = 1$.*

## 3.3 Lie algebras

Wortel-systemen en Dynkin diagrammen ontstonden uit de studie van simpele Lie algebras. In deze sectie zullen we een korte inleiding geven tot Lie algebras en hun belangrijkste eigenschappen. In volgende secties zullen we dan de representatie-theorie bekijken van simpele Lie algebras, tenminste de voor de fysica belangrijkste gevallen $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ en $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$. Deze speciale gevallen bevatten alle kenmerken van het algemene geval.

**Definitie 3.3.1** *Een Lie algebra $\mathfrak{g}$ is een eindig dimensionale $\mathbb{C}$-vectorruimte met een Lie-haakje*

$$[-,-] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

*dat bilineair en anti-symmetrisch is en voldoet aan de Jacobi identiteit*

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$$

*voor alle $x, y, z \in \mathfrak{g}$.*
*Voor iedere $x \in \mathfrak{g}$ kunnen we de 'adjoint'-map bekijken*

$$ad(x) = [x,-] : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

*Dit is een lineaire map en dus bepaald door een matrix in $End(\mathfrak{g})$.*

We beperken ons tot Lie-algebras $\mathfrak{g}$ die deel-vectorruimten zijn van een matrixring $M_n(\mathbb{C}) = End(V)$ met als Lie-haakje de commutator van twee matrixen, d.i.

$$[X,Y] = X.Y - Y.X$$

Men kan door basis-verandering in $V$ de Lie-algebra soms in een speciale vorn krijgen.

**Definitie 3.3.2** *1.* $\mathfrak{g} \subset M_n(\mathbb{C})$ *noemen we nilpotent indien* $\mathfrak{g}$ *geconjugeerd wordt tot een deel Lie algebra van de Lie-algebra der strikt opper triangulaire matrixen*

$$\mathfrak{n}_n = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{C} & \mathbb{C} & \dots & \mathbb{C} \\ 0 & 0 & \mathbb{C} & \dots & \mathbb{C} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

*2.* $\mathfrak{g} \subset M_n(\mathbb{C})$ *noemen we oplsbaar indien* $\mathfrak{g}$ *geconjugeerd wordt tot een deel Lie algebra van de Lie-algebra der opper triangulaire matrixen*

$$\mathfrak{b}_n = \begin{bmatrix} \mathbb{C} & \mathbb{C} & \mathbb{C} & \dots & \mathbb{C} \\ 0 & \mathbb{C} & \mathbb{C} & \dots & \mathbb{C} \\ \vdots & & \ddots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbb{C} \end{bmatrix}$$

Meestal worden nilpotente Lie-algebras gedefinieerd als deze waarvoor voor alle $x \in \mathfrak{g}$ geldt dat $ad(x) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ een nilpotente lineaire map is. De stelling van Engel stelt dat deze definitie overeenkomt met de hierboven gegeven. In het bijzonder is het nilpotent zijn een eigenschap van $\mathfrak{g}$ en onafhankelijk van de concrete inbedding $\mathfrak{g} \subset M_n(\mathbb{C})$.
Oplosbare Lie-algebras worden meestal gedefinieerd als Lie-algebras $\mathfrak{g}$ waarvoor de rij deel-idealen

$$\dots \subset \mathcal{D}^k(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{D}^{k-1}(\mathfrak{g}) \subset \dots \subset \mathcal{D}^1(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$$

waarbij $\mathcal{D}^i(\mathfrak{g}) = [\mathcal{D}^{i-1}(\mathfrak{g}), \mathcal{D}^{i-1}(\mathfrak{g})]$ uiteindelijk 0 wordt. De stelling van Lie zegt dan dat deze definitie overeenkomt met de onze. Wederom is oplosbaarheid een eigenschap van de Lie algebra $\mathfrak{g}$ en niet van de speciale inbedding $\mathfrak{g} \subset M_n(\mathbb{C})$.
Een Lie-ideaal $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ is een deel Lie-algebra waarvoor $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$. Een Lie-algebra zonder niet-triviale Lie-idealen noemen we simpel. Een directe som van simpele Lie-algebras noemen we semi-simpel. De Lie-algebra

$$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) = M_n(\mathbb{C})$$

is niet simpel want bevat een Lie-ideaal

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid sp(A) = 0\}$$

maar dit Lie-ideaal is wel simpel.
We kunnen de eigenschappen van een Lie-algebra $\mathfrak{g}$ afleiden uit een bepaalde bilineaire vorm : de Killing vorm. Definieer voor een $n$-dimensionale vectorruimte $V$ een symmetrische bilineaire vorm op $End(V) = M_n(\mathbb{C})$ door

$$B_V(X,Y) : End(V) \times End(V) \to \mathbb{C} \quad B_V(X,Y) = sp(X.Y)$$

Door te kijken naar de adjoint-afbeeldingen $ad(x) \in End(\mathfrak{g})$ definieren we de Killing vorm

$$B(x,y) = B_{\mathfrak{g}}(ad(x), ad(y)) \quad \text{voor alle } x, y \in \mathfrak{g}$$

Met behulp van deze vorm hebben we volgende characterizatie

**Stelling 3.3.1 (Cartan)** *1. $\mathfrak{g}$ is oplosbaar asa $B(\mathfrak{g}, \mathcal{D}(\mathfrak{g})) = 0$.*

*2. $\mathfrak{g}$ is semi-simpel asa de Killing vorm niet-ontaard is, d.i. als $B(x, \mathfrak{g}) = 0$ dan is $x = 0$.*

**Definitie 3.3.3** *Zij $\mathfrak{g}$ een Lie-algebra en $V$ een eindig dimensionale vector ruimte. We noemen $V$ een $\mathfrak{g}$-moduul of een $\mathfrak{g}$-representatie als er een lineaire map is*

$$\phi : \mathfrak{g} \to End(V)$$

*die het Lie-haakje bewaart.*

Men kan $\mathfrak{g}$-representaties ook opvatten als eindig dimensionale modulen over een bepaalde algebra : de omhullende algebra $U(\mathfrak{g})$. Zij $\mathfrak{g} = \mathbb{C}x_1 + \ldots + x_n$ met haakjes

$$[x_i, x_j] = \sum_{k=1}^{n} a_{ij,k} x_k$$

dan defineren we $U(\mathfrak{g})$ als de algebra voortgebracht door $n$ elementen $X_1, \ldots, X_n$ met definierende relaties

$$X_i X_j - X_j X_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ij,k} X_k$$

De Jacobi-identiteit impliceert dat deze algebra associatief is. Men gaat gemakkelijk na dat $\mathfrak{g}$-representaties juist eindig dimensionale modulen van $U(\mathfrak{g})$ zijn. We weten reeds dat de studie van alle eindig dimensionale modulen van een algemene algebra i.h.a. een lastig probleem is voornamelijk door het bestaan van niet semi-simpele modulen die leiden tot niet-gesloten banen in de moduul varieteit. Voor zeer bepaalde algebras komen deze problemen echter niet voor en kunnen we bijgevolg een elegante oplossing van het representatie probleem verwachten.

**Stelling 3.3.2** *Zij $\mathfrak{g}$ een semi-simpele Lie algebra dan is ieder $\mathfrak{g}$-moduul semi-simpel.*

**Bewijs :** (schets) Het beeld $\phi(\mathfrak{g})$ in $End(V)$ is opieuw semi-simpel, dus we mogen veronderstellen dat $g \subset End(V)$. Neem een basis $u_1, \ldots, u_r$ van $\mathfrak{g}$ en een duale basis $u'_1, \ldots, u'_r$ t.o.v. de Killing vorm $B_V$ (d.i. $B_V(u_i, u'_j) = \delta_{ij}$). Dit kan omdat $B_V \mid \mathfrak{g}$ niet ontaard is wegens Cartan.

Definieer nu de Casimir operator

$$C_V : V \to V \quad v \to \sum_i u_i.(u_i'.v)$$

en ga na dat $C_V \in End(V)$ commuteert met de actie van $\mathfrak{g}$ en als spoor heeft

$$sp(C_V) = \sum_i sp(u_i.u_i') = \sum_i B_V(u_i, u_i') = dim(\mathfrak{g})$$

Verder mapt $C_V$ ieder $\mathfrak{g}$ deelmoduul in zichzelf en $Ker(C_V)$ en $Im(C_V)$ zijn $\mathfrak{g}$-deelmodulen.

uitleggen.

Het enige 1-dimensionale $\mathfrak{g}$-moduul is het triviaal moduul (i.e. met triviale $\mathfrak{g}$-actie). Immers $\mathcal{D}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ werkt triviaal op alle 1-dimensionale modulen en omdat $\mathfrak{g}$ semi-simpel is is $\mathfrak{g} = \mathcal{D}(\mathfrak{g})$.

Veronderstel nu dat er een simpel deel $\mathfrak{g}$-moduul $W \subset V$ is van codimensie 1. $C_V$ mapt $W$ in zichzelf en werkt triviaal op $V/W$ (1-dim moduul). Omdat $W$ simpel is en $C_V$ commuteert met $\mathfrak{g}$ volgt uit het lemma van Schur dat $C_V$ werkt op $W$ als vermenigvuldiging met een scalair die niet nul kan zijn wegens de spoor-formule. (toegepast op $W$)
Maar dan is $V = W \oplus Ker(C_V)$ en klaar.

Hetzelfde geldt nog indien $W$ niet langer simpel is maar nog steeds van codimensie 1. Als $W$ niet simpel is bestaat er een niet-nul deelmoduul $Z$ maar dan hebben we per inductie op $dim(V)$ dat $V/Z$ semi-simpel is en $V/Z = W/Z \oplus Y/Z$ maar omdat $W$ codim 1 heeft moet $dim(Y/Z) = 1$ en dus wegens iductie $Y = Z \oplus U$, maar dan ook $V = W \oplus U$.

Stel tenslotte $W$ enkel simpel en beschouw de restrictie afbeelding

$$\rho : Hom(V, W) \to Hom(W, W)$$

dat een homomorphisme van $\mathfrak{g}$-modulen is. Het tweede bevat het 1-dimensionale $\mathfrak{g}$-deelmoduul $Hom_{\mathfrak{g}}(W, W)$ (Schur) en dus bestaat er een 1-dimensionaal $\mathfrak{g}$-deelmoduul $\mathbb{C}\psi$ van $Hom(V, W)$ dat onder $\rho$ op $Hom_{\mathfrak{g}}(W, W)$ gemapt wordt. Nu zijn alle 1-dim $\mathfrak{g}$-modulen triviaal dus is $\psi$ $\mathfrak{g}$-invariante map $V \to W$ zodat $\rho(\psi) = 1_W$, bijgevolg geeft $\psi$ een $\mathfrak{g}$-invariante projectie op $W$ en is $V = W \oplus Ker(\psi)$. $\square$

Als $\mathfrak{g}$ semi-simpel is kunnen we $\mathfrak{g}$ opvatten als een deel-Lie algebra van $End(\mathfrak{g})$ via de adjoint actie. Zij nu $x \in \mathfrak{g}$ dan kunnen we op unieke wijze

$$ad(x) = X_s + X_n$$

schrijven waarbij $X_s$ een semi-simpele matrix in $End(\mathfrak{g})$ is en $X_n$ een nilpotente (gebruik Jordan normaal vorm). Voorgaande stelling kan worden gebruikt om te bewijzen dat $X_s = ad(x_s)$ en $X_n = ad(x_n)$ voor elementen $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$. We noemen $x = x_s + x_n$ de absolute Jordan decompositie van het element $x \in \mathfrak{g}$. Het belang hiervan voor de representatie theorie het volgende resultaat dat wederom uit de stelling bewezen kan worden.

**Lemma 3.3.1** *Zij $\phi : \mathfrak{g} \to End(V)$ de actie horend bij een $\mathfrak{g}$-moduul $V$ en $x \in \mathfrak{g}$ met Jordan decompositie $x = x_s + x_n$. Dan zijn $\phi(x_s)$ resp. $\phi(x_n)$ het semi-simpele resp. nilpotente stuk van de matrix $\phi(x)$.*

In het bijzonder zal een semi-simpel element van $\mathfrak{g}$ ageren op ieder eindig dimensionale $\mathfrak{g}$-representatie als een diagonalizeerbare matrix.

## 3.4 Representaties van $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ en $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$.

In deze sectie zullen we als voorbeeld van de representatie theorie van semi-simpele Lie algebras de eindig dimensionale simpele modulen bepalen voor $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ en $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$. Deze zijn belangrijk in fysica omdat ze de elementaire deeltjes bepalen voor de zwakke interactie ($\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$) en de sterke wisselwerking ($\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$).
$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ is de Lie algebra der $2 \times 2$ matrixen met spoor nul. Als basiselementen kunnen we nemen

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

De Lie-haakjes (commutatoren) van deze matrixen zijn gemakkelijk uit te rekenen

$$[H, X] = 2X \quad [H, Y] = -2Y \quad [X, Y] = H$$

en we zien i.h.b. dat $H$ een semi-simpel element van $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ is want

$$ad(H) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Zij nu $V$ een simpel eindig dimensionaal $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-moduul met actie

$$\phi : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \to End(V)$$

dan weten we dat de actie van $H$ op $V$ diagonalizeerbaar is. M.a.w.

$$V = \oplus V_\alpha$$

waar $\alpha \in \mathbb{C}$ de eigenwaarden van $\phi(H)$ zijn en voor elke $v \in V_\alpha$ hebben we $H.v = \alpha v$. Hoe werken nu $X$ en $Y$ op deze ontbinding ?

**Lemma 3.4.1** *Zij $V = \oplus_\alpha V_\alpha$ de gewichts-ontbinding van $V$ t.o.v. $H$ dan geldt*

- $X : V_\alpha \to V_{\alpha+2}$
- $Y : V_\alpha \to V_{\alpha-2}$

**Bewijs :** Neem $v \in V_\alpha$ dan moet

$$(H.X - X.H - [H,X]).v = 0$$

en bijgevolg krijgen we

$$\begin{aligned} H(X.v) =& X(H.v) + [H,X].v \\ =& X.(\alpha v) + 2X.v \\ =& (\alpha+2)X.v \end{aligned}$$

en dus zit $X.v \in V_{\alpha+2}$. Analoog voor $Y$. □

**Lemma 3.4.2** *Als $V = \oplus V_\alpha$ een simpel $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-moduul is, dan vormen de $\alpha$ zodat $V_\alpha \neq 0$ een ononderbroken string*

$$\{\beta, \beta+2, \beta+4, ..., \beta+2k\}$$

**Bewijs :** Neem een $\alpha$ met $V_\alpha \neq 0$ dan vormt wegens vorig lemma

$$W = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} V_{\alpha+2n}$$

een $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-deelmoduul van $V$ en wegens simpel moet het dus $V$ zijn. Natuurlijk zijn er slechts eindig veel van deze niet nul en die moeten een ononderbroken string vormen (anders vinden we wederom een deelmoduul). □

**Stelling 3.4.1** *Zij $V$ een eindig dimensionaal simpel $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-moduul met decompositie $\oplus V_\alpha$. Zij $n$ zodat $V_n \neq 0$ maar $V_{n+2} = 0$ en $0 \neq v \in V_n$. Dan*

1. *De vectoren $\{v, Y.v, Y^2.v, ...\}$ brengen $V$ als vectorruimte voort*
2. *Iedere $V_\alpha$ heeft dimensie* 1
3. *$n \in \mathbb{N}$ en $V$ heeft dimensie $n+1$*
4. *Voor iedere $n \in \mathbb{N}$ bestaat er een uniek simpel $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-moduul van dimensie $n+1$*

**Bewijs :** (1) : Het is voldoende aan te tonen dat $V' = \sum \mathbb{C}Y^m.v$ een $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-deelmoduul is. Het is duidelijk dat $Y.V' \subset V'$ verder geldt voor iedere $m$ dat $Y^m.v \in V_{n-2m}$ en bijgevolg is $H.Y^m.v = (n-2m)Y^m.v \in V'$ dus ook $H.V' \subset V'$. Blijft nog aan te tonen dat $X.V' \subset V'$. We doen dit per induktie op $m$. Duidelijk is $X.v = 0$ want $\in V_{n+2}$. Bijgevolg,

$$\begin{aligned} X.Y.v =& [X,Y].v + Y.X.v \\ =& H.v + Y.0 \\ =& nv \in V' \end{aligned}$$

maar dan ook

$$\begin{aligned} X.Y^2.v =& [X,Y].Y.v + Y.X.Y.v \\ =& H.Y.v + Y.(nv) \\ =& (n-2)Y.v + nY.v \in V' \end{aligned}$$

en als we zo nog effe doorborduren zien we dat de algemene regel is

$$\begin{aligned} X.Y^m.v =& (n + (n-2) + (n-4) + ... + (n-2m+2))Y^{m-1}.v \\ =& m(n-m+1)Y^{m-1}.v \in V' \end{aligned}$$

(2) : $V_n = \mathbb{C}v$ (want anders is $V'$ een echt deelmoduul) maar dan is ook $V_{n-2k} = \mathbb{C}Y^m.v$ (of nul).
(3) : Wegens eindig dimensionaiteit bestaat er een minimale $m$ zodat $Y^m.v = 0$ maar dan is wegens (1)

$$0 = X.Y^m.v = m(n-m+1)Y^{m-1}.v$$

en omdat $Y^{m-1}.v \neq 0$ volgt $m = n+1$. Bijgevolg is $n \in \mathbb{N}$ en de enige $\alpha$ met $V_\alpha \neq 0$ zijn

$$\{-n, -n+2, -n+4, ..., n-2, n\}$$

en uit (2) volgt dan dat $dim(V) = n+1$.
(4) : Neem gelijk welke hoogste gewichts-vector $v \in V_n$ dan kunnen de overige basis-vectoren $Y^k.v$ genomen worden en de actie van $X, Y$ en $H$ liggen vast, dus elk simpel $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-moduul voortgebracht door een hoogste gewichts-vector $v \in V_n$ zijn isomorf. Verder is zo'n moduul noodzakelijkerwijs simpel (oefening). Blijft nog aan te tonen dat er zulk $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-moduul bestaat. Bekijk hiervoor de natuurlijke actie van $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ op $\mathbb{C}^2$ en bekijk de geinduceerde actie op de symmetrische producten van $\mathbb{C}^2$. □

We kennen dus alle simpele eindig dimensionale $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-modulen. Ze zijn voortgebracht door een hoogste gewichts-vector $v$ met $H.v = nv$ en $X.v = 0$ en zulk moduul is simpel van dimensie $n+1$. Schematisch ziet dit $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-moduul er als volgt uit

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, leftrightarrow, "Y"'] \arrow[r, bend left, "X"] & V_{n-4} \arrow[loop below, "H"] \arrow[r, leftrightarrow, "Y"'] \arrow[r, bend left, "X"] & V_{n-2} \arrow[loop below, "H"] \arrow[r, leftrightarrow, "Y"'] \arrow[r, bend left, "X"] & V_n \arrow[loop below, "H"] \end{tikzcd}$$

**Oefening 3.4.1** *Als $S_n$ en $S_m$ de simpele $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-modulen zijn van dimensie $n+1$ en $m+1$ hoe kan je dan $S_n \otimes S_m$ decomposeren in simpele componenten ?*

Nu gaan we het analoge probleem schetsen voor

$$\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) = \{A \in M_3(\mathbb{C}) \mid sp(A) = 0\}$$

In plaats van 1 semi-simpel element $H$ als in $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ hebben we nu een deel-Lie algebra (de Cartan deelalgebra)

$$\mathfrak{h} = \{ \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix} \mid a_1 + a_2 + a_3 = 0 \}$$

van $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ bestaande uit semi-simpele commuterende elementen die bijgevolg allen semi-simpel werken op ieder eindig dimensionaal $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$-moduul. We kunnen dus starten met een gewichtsdecompositie $V = \sum V_n$ voor een $H \in \mathfrak{h}$. Neem nu een andere $H' \in \mathfrak{h}$ dan weten we dat $H.H' = H'H$ en bijgevolg zal $H'$ iedere $V_n$ in zichzelf sturen, zij immers $v \in V_n$ dan

$$\begin{aligned} H.(H'.v) &= H'.(H.v) \\ &= nH'.v \end{aligned}$$

en dus ook $H'.v \in V_n$. Dus kunnen we iedere $V_n$ verder ontbinden via de gewichten voor $H'$. We hebben dus bewezen

**Lemma 3.4.3** *Ieder eindig dimensionaal $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$-moduul $V$ heeft een decompositie*

$$V = \oplus V_\alpha$$

*waar $V_\alpha$ een eingenruimte voor $\mathfrak{h}$ is bepaald door $\alpha \in \mathfrak{h}^* = Hom(\mathfrak{h}, \mathbb{C})$, m.a.w.*

$$V_\alpha = \{ v \in V \mid H.v = \alpha(H)v \forall H \in hL \}$$

Een concrete beschrijving van $\mathfrak{h}^*$ is

$$\mathfrak{h}^* = \mathbb{C}L_1 + \mathbb{C}L_2 + \mathbb{C}L_3 / \mathbb{C}(L_1 + L_2 + L_3)$$

waarbij

$$L_i \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix} = a_i$$

I.h.b. is via de adjoint representatie $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ een $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$-moduul en heeft bijgevolg een gewichtsdecompositie

$$\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) = \mathfrak{h} \oplus (\oplus_\alpha \mathfrak{g}_\alpha)$$

waar de som loopt over eindig veel $\alpha \in \mathfrak{h}^*$.

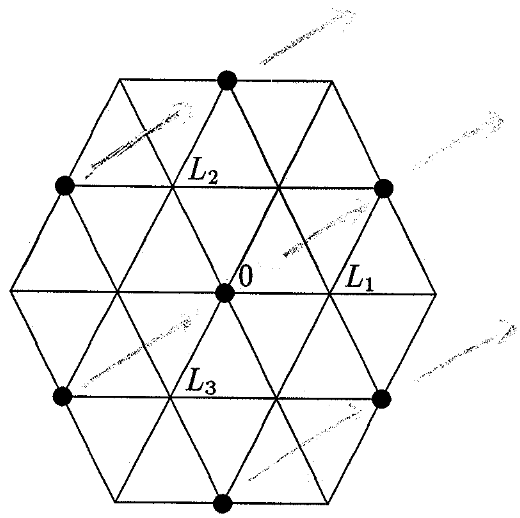
**Oefening 3.4.2** *Ga na dat de matrixen $E_{ij} = (\delta_{ij})_{i,j}$ met $i \neq j$ eigenvectoren zijn voor $\mathfrak{h}$ met gewicht $L_i - L_j$ en dat bijgevolg de $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ met niet-triviale gewichtsruimte zijn*

$$\{0(\text{ 2-}dim\text{ }), L_1 - L_2, L_2 - L_3, L_3 - L_1, L_2 - L_1, L_1 - L_3, L_3 - L_2(\text{ }allen\text{ 1-}dim\text{ }\}$$

*Ga verder na dat via de adjoint-actie de elementen van* $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) - \mathfrak{h}$ *als volgt werken op de gewichts-componenten*

$$ad(\mathfrak{g}_\alpha) : \mathfrak{g}_\beta \to \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$$

*Of in een tekening*




*en teken de actie van* $\mathfrak{g}_{L_1 - L_3}$ *op de gewichts-decompositie.*

Op analoge wijze bereken je dat de actie van $\mathfrak{g}_\alpha$ op een gewichtscomponent $V_\beta$ deze in $V_{\alpha+\beta}$ zal sturen en we hebben bijgevolg

**Lemma 3.4.4** *De eigenvectoren* $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ *met niet-triviale gewichtsruimte in de decompositie*

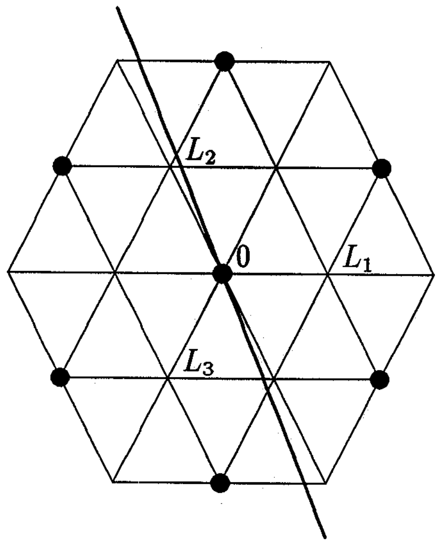
$$V = \oplus V_\alpha$$

*van een simpel* $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$*-moduul verschillen van elkaar door gehele lineaire combinaties van de vectoren* $L_i - L_j \in \mathfrak{h}^*$.

De $\alpha$ met $\mathfrak{g}_\alpha$ noemen we de wortels van $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$, de gewichts-ruimten $\mathfrak{g}_\alpha$ noemen we de wortel-ruimten en het rooster $\Lambda \subset \mathfrak{h}^*$ voortgebracht door de wortels noemen we het wortel-rooster.
We willen nu een analogon voor de hoogste-gewichts vector van een $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-moduul $V$ die $V$ voortbrengt en van het feit dat de bijhorende eigenwaarde een natuurlijk getal is. Hiervoor gebruiken we een lineaire afbeelding

$$l : \mathfrak{h}^* \to \mathbb{R}$$

zodat $Ker(l) \cap \Lambda = \emptyset$ en $l$ verdeelt $\Lambda$ in positieve en negatieve wortels met bvb. $L_1 - L_2, L_1 - L_3$ en $L_2 - L_3$ positive wortels. We kunnen $l$ bvb volgende lijn nemen $l(a_1L_1 + a_2L_2 + a_3L_3) = aa_1 + bb_1 + cc_1$ met $a + b + c = 0$ en $a > b > c$. Of in een tekening

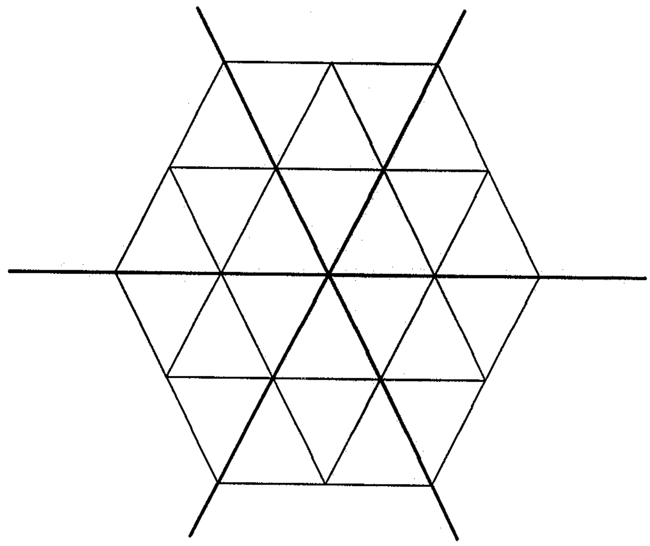



M.b.v. deze functionaal kunnen we een $\beta \in \mathfrak{h}^*$ vinden met maximale $l(\beta)$ zodat $V_\beta \neq 0$. Ga na dat een vector $v \in V_\beta$ doodgeslagen wordt door de positieve wortel-ruimten. Zulke $v$ noemen we dan een hoogste gewichts-vector voor $V$ en analoog met de berekening voor $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ bewijst men

**Lemma 3.4.5** *Zij $V$ een eindig dimensionaal simpel $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$-moduul met hoogste gewichts-vector $v$ dan wordt $V$ voortgebracht door de beelden van $v$ onder opeenvolgende acties van de Lie-algebra elementen $E_{2,1}, E_{3,1}$ en $E_{3,2}$.*

Wederom is $V$ dus voortgebracht door een hoogste gewichts-vector. Om een analogon te verkrijgen voor de integraliteit van het hoogste gewicht $\alpha$ voor $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ moeten we de restrictie bekijken van het $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$-moduul $V$ als $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-moduul voor verschillende inbeddingen van $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ in $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$.

**Oefening 3.4.3 (moeilijk !)** *Noteer met $H_{i,j} = E_{i,i} - E_{j,j}$ dan zijn $\mathfrak{g}_{ij} = \mathbb{C}H_{i,j} + \mathbb{C}E_{i,j} + \mathbb{C}E_{j,i}$ deel Lie-algebras van $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ isomorf met $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Gebruik de restricties van $V$ tot $\mathfrak{g}_{12}, \mathfrak{g}_{13}$ en $\mathfrak{g}_{23}$ om aan te tonen dat als $\alpha$ een niet-nul eigenruimte heeft dan geldt hetzelfde voor de spiegelpunten van $\alpha$ t.o.v. een der drie assen*



*Duid op deze tekening ook de kegel aan waar de hoogste gewichts vectoren moeten liggen.*

Nu kunnen we het feit gebruiken dat de gewichten van $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-modulen integraal zijn om te besluiten dat alle gewichten $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ moeten liggen in het rooster $\Lambda_W$ voortgebracht door de $L_i$. En uiteindelijk verkrijgen we de volgende characterizatie van simpele $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$-modulen.

**Stelling 3.4.2** *Zij $V$ een simpel eindig-dimensionaal $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$-moduul. Dan bestaat er een $\alpha \in \Lambda_W \subset \mathfrak{h}^*$ zodat de niet-triviale eigenwaarden van $V$ juist de verzameling vectoren in $\Lambda_W$ is congruent met $\alpha$ modulo het deelrooster $\Lambda$ en liggend in de zeshoek met hoekpunten de beelden van $\alpha$ onder de reflecties t.o.v. bovenvermelde assen.*

Men gaat na dat voor elke verzameling gewichten die voldoet aan de voorwaarden van de stelling er ook inderdaad een simpel $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$-moduul bestaat.

## 3.5 Lie algebras en Dynkin diagrammen