85-17

Bijdrage tot het onderzoek naar de regulariteit van spoorringen van generieke matrixen.

L. Le Bruyn

Hoofdstuk 1

Spoorringen van generieke matrixen.

1. enkele definities

Doorheen dit werk zal F steeds een kommutatief lichaam voorstellen, algebraïsch gesloten en van karakteristiek nul. We merken reeds hier op dat geen van deze voorwaarden echt onontbeerlijk is. In het geval van spooringen van generieke 2 bij 2 matrixen, bijvoorbeeld, volstaat het om onze resultaten te bewijzen dat $\sqrt{-1} \in F$ en dat de karakteristiek van F verschillend is van 2 of 3. Met

$$\mathcal{F}_m = F < x_1, \cdots, x_m >$$

noteren we de vrije associatieve F-algebra in m variabelen. Of, met andere woorden, $\mathcal{F}_m$ is de tensoralgebra van een m-dimensionale vectorruimte over F. Zij nu $I_{m,n}$ het tweezijdige ideaal van $\mathcal{F}_m$ bestaande uit alle identiteiten waaraan een willekeurig stel van m n bij n matrixen voldoen. De ring van m generieke n bij n matrixen wordt dan

$$\mathbb{G}_{m,n} \simeq \mathcal{F}_m / I_{m,n}$$

Een meer handelbare definitie van deze generieke matrixring kan als volgt bekomen worden. Zij $\mathcal{P}_{m,n}$ de kommutatieve veeltermring

$$\mathcal{P}_{m,n} = F[x_{ij}(l) : 1 \leq i, j \leq n; 1 \leq l \leq m]$$

en beschouw de n bij n matrixen bestaande uit variabelen :

$$X_l = (x_{ij}(l))_{i,j} \in M_n(\mathcal{P}_{m,n})$$

De ring van m generieke n bij n matrixen is nu de F-deelalgebra van $M_n(\mathcal{P}_{m,n})$ voortgebracht door de zogenaamde generieke matrixen

$$\{X_i : 1 \leq i \leq m\}$$

Met $\mathcal{R}_{m,n}$ zullen we steeds de F-deelalgebra van $\mathcal{P}_{m,n}$ noteren die wordt voortgebracht door de elementen

$$\{Tr(\alpha_1 \cdots \alpha_j) : j \in \mathbb{N}; \alpha_i \in \mathbb{G}_{m,n}\}$$

Het kompositum van deze twee ringen $\mathbb{G}_{m,n}$ en $\mathcal{R}_{m,n}$ in $M_n(\mathcal{P}_{m,n})$ noemt men de spoorring van m generieke n bij n matrixen en wordt genoteerd met $\mathbb{T}_{m,n}$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G}_{m,n} \arrow[r, hook] & \mathbb{T}_{m,n} \arrow[r, hook] & M_n(\mathcal{P}_{m,n}) \\
& \mathcal{R}_{m,n} \arrow[u] \arrow[r, hook] & \mathcal{P}_{m,n} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Als $m \geq 2$ dan kan men vrij eenvoudig nagaan dat $\mathcal{R}_{m,n}$ het centrum is van de spoorring van m generieke n bij n matrixen, $\mathbb{T}_{m,n}$.

Verder is het welbekend , zie bvb. [Pr,III.I.3] dat $\mathbb{G}_{m,n}$ een domein is. Wegens de stelling van Posner volgt hieruit dat $\mathbb{G}_{m,n}$ een klassieke breukenring heeft, $\Delta_{m,n}$, die een delingsalgebra is van dimensie n^2 over zijn centrum $\mathcal{K}_{m,n}$. Verder is het duidelijk dat $\mathcal{K}_{m,n}$ het breukenlichaam is van $\mathcal{R}_{m,n}$, we hebben dus de situatie :

$$\begin{tikzcd}
 & & \Delta_{m,n} \arrow[rr] & & M_n(Q_{m,n}) \\
\mathbb{G}_{m,n} \arrow[r] & \mathbb{T}_{m,n} \arrow[ur] \arrow[rr] & & M_n(P_{m,n}) \arrow[ur] & \\
 & & \mathcal{K}_{m,n} \arrow[uu] \arrow[rr] & & Q_{m,n} \arrow[uu] \\
Z_{m,n} \arrow[uu] \arrow[r] & \mathcal{R}_{m,n} \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[rr] & & P_{m,n} \arrow[uu] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

waarbij $Z_{m,n}$ het centrum is van $\mathbb{G}_{m,n}$ en $Q_{m,n}$ het breukenlichaam is van de veeltermring $P_{m,n}$. Voor meer informatie over ringen die voldoen aan velterm-identiteiten verwijzen we de lezer naar [Pr].
In devolgende twee sekties zullen we de twee hoofdmotivaties herhalen om spoorringen te bestuderen, te weten : de studie van de eindig dimensionale representaties van de vrije algebra $\mathcal{F}_m$ en de studie van de invarianten-theorie van n bij n matrixen.

2. Representatietheorie.

Onder een n-dimensionale representatie van de vrije algebra $\mathcal{F}_m = F < x_1, ..., x_m >$ verstaan we een F-algebra morfisme

$$\phi : \mathcal{F} \to M_n(F)$$

Dit morfisme wordt natuurlijk eenduidig bepaald door het m-stel n bij n matrixen $\phi(x_1), ..., \phi(x_m)$. Aldus verkrijgen we dat de verzameling van alle n-dimensionale representaties van $\mathcal{F}_m$, $Rep_n(\mathcal{F}_m)$, in een natuurlijke één-één korrespondentie staat met de punten van de affiene variëtiet die korrespondeert met $P_{m,n}$, dat is de affiene ruimte $\mathring{A}^{mn^2}$.

Twee n-dimensionale representaties ϕ_1 en ϕ_2 noemen we equivalent als ze slechts verschillen op een F-automorfisme ψ van $M_n(F)$ na

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\phi_1} & M_n(F) \\ & & \downarrow \psi \\ & & M_n(F) \end{array}$$

Bijgevolg bestaat er een natuurlijke aktie van

$$Aut_F(M_n(F)) = PGL_n(F) = GL_n(F)/F^*$$

op de verzameling van alle n-dimensionale representaties. De orbitalen onder deze aktie zijn precies de equivalentieklassen van representaties. De klassificatie van alle n-dimensionale representatiwes op equivalentie na bestaat dus in de studie van de orbitaal-ruimte van $\mathring{A}^{mn^2}$ onder aktie van de projektieve lineaire group $PGL_n(F)$.

Zij nu $\phi : \mathcal{F}_m \to M_n(F)$ een representatie, dan is de standaard n-dimensionale F-vektorruimte $F^{(n)}$ een $\mathcal{F}_m$-moduul via het morfisme ϕ. Als $F^{(n)}$ volledig ontbonden kan worden in en direkte som van enkelvoudige $\mathcal{F}_m$-modulen dan noemen we de representatie ϕ half-enkelvoudig. In het algemene geval hebben we een ontbindingsrij

$$0 = V_t \subset V_{t-1} \subset ... \subset V_1 \subset V_0 = F^{(n)}$$

voor $F^{(n)}$ als links $\mathcal{F}_m$-moduul. Maar dan wordt

$$W = \oplus_{i=0}^{t-1}(V_i/V_{i+1})$$

een volledig ontbindbaar $\mathcal{F}_m$-moduul met $dim_F(W) = n$. Laat ons nu een basis voor de F-vektorruimte W als volgt kiezen. De eerste $dim_F(V_{t-1})$-basisvektoren vormen een basis voor V_{t-1}, devolgende $dim_F(V_{t-1}/V_{t-2})$-basisvektoren vormen een basis voor V_{t-1}/V_{t-2} enzovoort. Ten opzichte van deze basis kan men de representatie ϕ in de volgende matrixvorm noteren :

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 & & & \underline{N} \\ & \phi_2 & & \\ & & \ddots & \\ & \underline{O} & & \phi_t \end{bmatrix}$$

waarbij $\phi_j : \mathcal{F}_m \to M_{n_j}(F)$ met $n_j = dim_F(V_{j-1}/V_j)$ de onontbindbare komponenten van ϕ zijn, dus i.h.b. zijn de ϕ_j epimorfismen, $n = \sum_{j=1}^{t} n_j$ en N is het nilradikaal van ϕ. Bijgevolg kunnen we aan ϕ een halfenkelvoudige (semi-simpele) representatie toevoegen

$$\phi^{ss} = \phi_1 \oplus \ldots \oplus \phi_t$$

M. Artin heeft aangetoond in [Ar] dat de representatie ϕ^{ss} in de afsluiting ligt van de orbitaal van ϕ onder de aktie van $PGL_n(F)$. Hieruit volgt dat er geen enkele kwotiënt-variëteit bestaat van $\mathring{A}^{mn^2}$ door $PGL_n(F)$ waarin ϕ en ϕ^{ss} verschillend zullen zijn.

Deze opmerking motiveert ons om een affiene variëteit te zoeken waarvan de punten in een een-een korrespondentie staan met de equivalentieklassen van half-enkelvoudige n-dimensionale representaties van $\mathcal{F}_m$.

Procesi [P2] heeft bewezen dat de F-algebra $\mathcal{R}_{m,n}$ affien is, d.i. eindig voortgebracht, en dus kunnen we hiermede een affiene variëteit X associëren.

Het inklusiemorfisme $\mathcal{R}_{m,n} \subset \mathcal{P}_{m,n}$ geeft ons een kontinue afbeelding tussen de variëteiten

$$p : \mathring{A}^{mn^2} \to X$$

die surjektief is en de bijkomende eigenschap heeft dat $p(\phi_1) = p(\phi_2)$ als en slechts als $\phi_1^{ss} = \phi_2^{ss}$. Aldus bekomt men hetvolgende resultaat

Stelling 2.1 : (Artin-Procesi) [Ar],[P3]

De punten van de affiene variëteit X die korrespondeert met het centrum $\mathcal{R}_{m,n}$ van de spoorring van m generieke n bij n matrixen, staan in een natuurlijke een-een korrespondentie met de equivalentieklassen van half-enkelvoudige n -dimensionale representaties van de vrije algebra $\mathcal{F}_m$.

Verder weten we door het werk van C. Procesi [P3] dat de spoorring zelf ook een affiene F-algebra is. Als in het werk van F. Van Oystaeyen en A. Verschoren [VV] kunnen we met de spoorring een affiene variëteit Y associëren bestaande uit alle maximale tweezijdige idealen van $\mathbb{T}_{m,n}$ met de geinfduceerde Zariski-topologie. Daar de spoorring van m generieke n bij n matrixen, $\mathbb{T}_{m,n}$, een eindig voortgebracht moduul is over zijn centrum $\mathcal{R}_{m,n}$ bekomen we dat de natuurlijke kontinue afbeelding $\delta : Y \to X$ surjektief is. Verder kan men de vezels van deze afbeelding vrij eenvoudig beschrijven. Zij namelijk x een punt in X, dat is : x korrespondeert met de equivalentieklasse van een half-enkelvoudige representatie

$$\phi = \phi_1 \oplus ... \oplus \phi_t$$

dan bestaat de vezel $\delta^{-1}(\phi)$ uit maximale idealen van $\mathbb{T}_{m,n}$ die korresponderen met irreduciebele komponenten van ϕ. Aldus bekomt men

Stelling 2.2. : (Artin-Schelter) [AS]

De punten van de affiene variëteit Y, die korrespondeert met de spoorring van m generieke n bij n matrixen, staan in een natuurlijke een-een korrespondentie met bepaalde koppels (ϕ, ϕ_j) waarbij ϕ de representant is van een equivalentieklasse van half-enkelvoudige n -dimensionale representaties en ϕ_j een onontbindbare komponent is van ϕ. De natuurlijke afbeelding $\delta : Y \to X$ stuurt het koppel (ϕ, ϕ_j) naar ϕ.

Tenslotte willen we aantonen dat de equivalentieklassen van onontbindbare n-dimensionale representaties een open deelvariëteit U bepalen van X.
Beschouw daarvoor de verzameling van aller elementen van $\mathbb{T}_{m,n}$ die bekomen worden door evaluatie van centrale veeltermen voor n bij n matrixen,[P]. Het Formanek-centrum $F(\mathbb{T}_{m,n})$ is nu het centrale ideaal voortgebracht door deze elementen. Dit Formanek centrum heeft devolgende belangwekkende eigenschap. Zij S een multiplikatief gesloten verzameling bestaande uit centrale elementen van $\mathbb{T}_{m,n}$ dan is de lokalizatie $(\mathbb{T}_{m,n})_S$ juist dan een Azumaya-algebra indien $S \cap F(\mathbb{T}_{m,n}) \neq$.
Zij nu U de open deelvariëteit van X bepaald door het Formanek-centrum, d.i. $U = X(F(\mathbb{T}_{m,n}))$ dan bekomen we

Stelling 2.3. : (Procesi) [P]

(1) : De punten van U staan in een natuurlijke een-een korrespondentie met de equivalentieklassen van onontbndbare n-dimensionale representaties van de vrije F-algebra in m-variabelen.

(2) : De varieteit U is glad en van dimensie $(m-1)n^2 + 1$.

3. Invarianten theorie.

In de voorgaande sektie hebben we aangetoond dat er een groep aktie van $GL_n(F)$, of van $PGL_n(F)$, bestaat op de veeltermring $P_{m,n}$. Deze aktie wordt als volgt gegeven : zij $P \in GL_n(F)$ en zij $X_l = (x_{ij}(l))$ de l-de generieke matrix en zij

$$P.X_l.P^{-1} = (\psi_{ij}(l))_{i,j}$$

dan zijn alle $\psi_{ij}(l)$ F-lineaire kombinaties van de variabelen $x_{ij}(l)$. Wanneer we nu $x_{ij}(l)$ zenden naar $\psi_{ij}(l)$ dan bekomen we een F-algebra automorfisme of $P_{m,n}$ en op het breukenlichaam $Q_{m,n}$.Dit automorfisme zullen we met α_P noteren.
Een veelterm $f \in P_{m,n}$ noemen we nu een invariant van m kopieën van n bij n matrixen wanneer $\alpha_P(f) = f$ voor alle $P \in GL_n(F)$.
Een rationale funktie $g \in Q_{m,n}$ noemen we een rationale invariant van m kopieën van n bij n matrixen indien $\alpha_P(g) = g$ voor alle $P \in GL_n(F)$.
De verzameling van alle invarianten (resp. rationale invarianten) noemen we de ring (resp. het lichaam) van invarianten van m kopieën n bij n matrixen. Ze worden, respektievelijk,genoteerd met

$$P_{m,n}^{GL_n(F)} \text{ en } Q_{m,n}^{GL_n(F)}$$

Men kan vrij eenvoudig nagaan dat het lichaam van invarianten het breukenlichaam is van de ring van invarianten. In [Ar] uitte M. Artin het vermoeden dat iedere invariant een veelterm zou zijn in de elementen

$$\{Tr(X_{i_1}...X_{i_r}) : r \in \mathbb{N}\}$$

of m.a.w. dat $P_{m,n}^{GL_n} = R_{m,n}$. Voor het speciale geval van 2 bij 2 matrixen werd dit reeds in 1903 bewezen door J.H. Grace en A. Young [GY].
Voor algemene n bij n matrixen werd Artins vermoeden onafhankelijk bewezen door Gurevich [Gu;Th.16.2], Siberskii [Si;Th.1] en C. Procesi [P3,Th.1.3]. Het bewijs van hun resultaat steunt op de zogenaamde eerste fundamentele stelling van vektor-invarianten. Deze stelling geeft ons een voort brengend stel voor de invarianten van m vektoren en m covektoren, of meer ringtheoretisch, voortbrengers voor de invariant gelaten ring onder de aktie van $GL_n(F)$ op de symmetrische algebra van

$$(V^{\otimes m}) \otimes (V^*)^{\otimes m}$$

waarbij V een n-dimensionale vektorruimte is over F en $V^* = Hom_F(V, F)$, de duale vektorruimte.
Het vermoeden van Artin wordt nu bewezen door deze fundamentele stelling te vertalen in spoor-informatie door gebruik te maken van devolgende identifikaties

$$V \otimes V^* \simeq M_n(F)$$

$$\text{vektor invariant} = \text{spoor}$$

voor het volledige bewijs verwijzen we de lezer naar [P3,p.310-313]. Men heeft dus

Stelling 3.1. : (Gurevich-Siberskii-Procesi)
(1) : De ring van invarianten van m kopieën n bij n matrixen onder komponentsgewijze aktie door toevoeging van $GL_n(F)$,$\mathcal{P}_{m,n}^{GL_n}$, is isomorf met het centrum $\mathcal{R}_{m,n}$ van de spoorring van m generieke n bij n matrixen.

(2) : Het lichaam van invarianten van m kopieën van n bij n matrixen als in (1),$\mathcal{Q}_{m,n}^{GL_n}$, is isomorf met $\mathcal{K}_{m,n}$.

Vervolgens willen we de ringen van zogenaamde matrixkonkomitanten beschrijven.Dit is de ring van alle veeltermafbeeldingen

$$f : M_n(F) \oplus ... \oplus M_n(F) \to M_n(F)$$

van m kopieën van n bij n matrixen naar $M_n(F)$ zodat voor alle $\alpha \in GL_n(F)$ en $m_i \in M_n(F)$ geldt

$$f(\alpha^{-1}.m_1.\alpha, ..., \alpha^{-1}.m_m.\alpha) = \alpha^{-1}.f(m_1, ..., m_m).\alpha$$

Laat ons daartoe een aktie definiëren van de algebraische groep $GL_n(F)$ op $M_n(\mathcal{P}_{m,n})$ en $M_n(\mathcal{Q}_{m,n})$.
Zij $P \in GL_n(F)$ en $(a_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathcal{P}_{m,n})$, dan is er een eerste aktie van $GL_n(F)$ door toevoeging

$$(a_{ij})_{i,j} \to P^{-1}.(a_{ij})_{i,j}.P$$

en een tweede aktie die de aktie $\alpha_P : \mathcal{P}_{m,n} \to \mathcal{P}_{m,n}$ komponentsgewijs uitbreidt,d.i.

$$(a_{ij})_{i,j} \to (\alpha_P(a_{ij}))_{i,j}$$

Wanneer we de ring $M_n(\mathcal{P}_{m,n})$ opvatten als $M_n(F) \otimes \mathcal{P}_{m,n}$ dan werkt de eerste aktie op de eerste faktor en laat de tweede faktor invariant en de tweede aktie laat de eerste faktor invariant en werkt op de tweede faktor. Bijgevolg kommuteren beide akties met elkaar. Laat ons nu een F-algebra automorfisme definiëren

$$\beta_P : M_n(\mathcal{P}_{m,n}) \to M_n(\mathcal{P}_{m,n})$$

dat een n bij n matrix $(a_{ij})_{i,j}$ stuurt naar $P^{-1}.(a_{ij})_{i,j}.P$. Dit legt een aktie van $GL_n(F)$ vast op $M_n(\mathcal{P}_{m,n}$ en men kan deze aktie op voor de hand liggende wijze uitbreiden tot een aktie op $M_n(\mathcal{Q}_{m,n})$.
De ring van alle matrix-konkomitanten (resp. van alle rationale matrix-konkomitanten) is nu de F-deelalgebra van $M_n(\mathcal{P}_{m,n})$ (resp. van $M_n(\mathcal{Q}_{m,n})$) die elementsgewijs invariant gelaten wordt onder deze aktie van de algemene lineaire groep $GL_n(F)$.
De hoofdstelling in de theorie van de matrix-konkomitanten, of de invarianten-theorie van n bij n matrixen is nu

Stelling 3.2. : (Procesi) [P3]
(1) : De ring van alle matrix-konkomitanten van m kopieën van n bij n matrixen onder aktie van de algemene lineaire groep $GL_n(F)$ is isomorf met de spoorring van m generieke n bij n matrixen, $\mathbb{T}_{m,n}$.

(2) : De ring van alle rationale matrix-konkomitanten als in (1) is isomorf met de generieke delingsalgebra $\Delta_{m,n}$.

4. Faktorialiteit van het centrum $\mathcal{R}_{m,n}$

In deze sektie wensen we aan te tonen dat het centrum van de spoorring van m generieke n bij n matrixen een uniek faktorizatiedomein is, d.w.z. dat elk element ervan op een eenduidige wijze ontbonden kan worden als een produkt van priem-elementen. Verder zullen we aantonen dat er in de uitbreiding

$$\mathcal{R}_{m,n} \subset \mathcal{P}_{m,n}$$

niets ogeblazen kan worden. Hiermede bedoelen we dat de hoogte van de doorsnede van een hoogte-een-priemideaal van $\mathcal{P}_{m,n}$ met $\mathcal{R}_{m,n}$ ten hogste een is. Laat ons beginnen met een algemene stelling

Hulpstelling 4.1. :
Laat B een uniek faktorizatiedomein zijn en zij G een groep van automorfismen van B zodanig dat de eerste kohomologiegroep $H^1(G, B^*)$ triviaal is. Laat A de ring van invarianten van B onder G zijn, dan geldt
(1) : In de uitbreiding $A \subset B$ kan niets opgeblazen worden
(2) : A is een uniek faktorizatiedomein

Bewijs :
(1) : Zij $P = B.p$ een hoogte-een priemideaal van B zijn en laat ons veronderstellen dat $P \cap A \neq$. WE beweren eerst dat P een eindige orbitaal heeft onder de aktie van G. Neem immers een element $a \in P \cap A$ verschillend van 0 en schrijf het als een (uniek) produkt van priemelementen in B

$$a = p^{l_0}.p_1^{l_1}...p_m^{l_m}$$

dan is het duidelijk dat voor elke $\sigma \in G$ we moeten hebben dat $\sigma(B.p)$ behoort tot de eindige verzameling

$$\{Bp, Bp_1, ..., Bp_m\}$$

Laat nu $\{Bp, Bp_1, ..., Bp_k\}$ met $k \leq m$ de orbitaal zijn van Bp dan bestaat er voor elke $\sigma \in G$ een eenheid $f_\sigma \in B^*$ zodat

$$\sigma(p.p_1...p_k) = f_\sigma.p.p_1...p_k$$

Nu is het duidelijk dat de verzameling $\{f_\sigma; \sigma \in G\}$ een 1-cocycle is en wegens de trivialiteit van de cohomologiegroep $H^1(G, B^*)$ volgt hieruit dat er een eenheid $\alpha \in B^*$ bestaat zodat

$$f_\sigma = \sigma(\alpha).\alpha^{-1}$$

voor alle $\sigma \in G$. Vervang nu p door $p' = \alpha^{-1}.p$ dan is het duidelijk dat $p'.p_1...p_k$ een element is van de invariantenring A. Bijgevolg kunnen we ieder niet-nul element van $P \cap A$ schrijven als

$$a = (p'.p_1...p_k)^l q_1^{m_1}...q_z^{m_l}$$

of m.a.w. $a \in (p'.p_1...p_k).A$ omdat we natuurlijk ook hebben dat $q_1^{m_1}...q_z^{m_z}$ invariant is onder G. Bijgevolg hebben we aangetoond dat

$$P \cap A = (p'...p_k)A$$

en dus dat $ht(P \cap A) \leq 1$.
(2) : Wegens het eerste deel van de stelling weten we dat de natuurlijke afbeelding tussen de divisoren klasgroepen

$$Cl(A) \to Cl(B)$$

een groep-morfisme is. Laat nu Q een hoogte-een priemideaal zijn van A dan krijgen we

$$(BQ)^{**} = Bp_1^{l_1}...p_m^{l_m}$$

voor priemelementen $p_i \in B$. Natuurlijk hebben we dan dat $Q = Bp_i \cap A$. Maar het bewijs van (1) leert ons dat zulke intersektie een hoofdideaal is. Bijgevolg is elk hoogte een priemideaal van A een hoofdideaal, of, equivalent hiermede, A is een uniek faktorizatie domein.

Stelling 4.2. :
Het centrum $\mathcal{R}_{m,n}$ van de spoorring van m generieke n bij n matrixen is een uniek faktorizartie domein. Verder kan er niets opgeblazen worden in de uitbreiding $\mathcal{R}_{m,n} \subset \mathcal{P}_{m,n}$.

Bewijs :
In de voorgaande sektie hebben we aangetoond dat er een aktie van $PGL_n(F)$ bestaat op $\mathcal{P}_{m,n}$ zodat de ring van invarianten juist $\mathcal{R}_{m,n}$ is. Verder is de aktie van $PGL_n(F)$ op F^* triviaal en bijgevolg

$$H^1(PGL_n(F), \mathcal{R}_{m,n}^*) = H^1(PGL_n(F), F^*) = Hom(PGL_n(F), F^*)$$

Nu is $PGL_n(F)$ een enkelvoudige algebraïsche groep en bijgevolg kan enkel de identiteit optreden als een homomorfisme van $PGL_n(F)$ naar F^*. Het gestelde volgt nu uit de hulpstelling 4.1.

Als uniek faktorizatie domein is $\mathcal{R}_{m,n}$ duidelijk normaal. Omdat $\mathcal{R}_{m,n}$ een affiene positief gegradeerde F-algebra is, bestaat er een gradatie bewarend epimorfisme

$$\omega : S = F[y_1, ..., y_t] \to \mathcal{R}_{m,n}$$

voor een zekere veeltermring S. Natuurlijk wordt de gradatie op $\mathcal{R}_{m,n}$ gegeven door te stellen dat de graad van alle $x_{ij}(l)$ een is, voor alle mogelijke waarden van i, j en l.
Voor de meetkundige eigenschappen van $\mathcal{R}_{m,n}$, i.h.b. de dualiteitstheorie is het wenselijk dat $\mathcal{R}_{m,n}$ goede homologische eigenschappen bezit.

$\mathcal{R}_{m,n}$ zal Gorenstein genoemd worden indien men devolgende eigenschappen kan bewijzen :
(1) : Cohen-Macauley eigenschap : $Ext^i_S(\mathcal{R}_{m,n};S) = 0$ voor alle waarden $0 < i < Kdim(S) - Kdim(\mathcal{R}_{m,n})$
(2) : $Ext^j_S(\mathcal{R}_{m,n};S) \simeq \mathcal{R}_{m,n}$ als S-moduul voor $j = Kdim(S) - Kdim(\mathcal{R}_{m,n})$

Stelling 4.3. :
$\mathcal{R}_{m,n}$ is een Gorenstein domein.

Bewijs :
Omdat $\mathcal{R}_{m,n}$ de invariantenring is voor de aktie van de reduktieve algebraïsche groep $GL_n(F)$ op een regulier domein $\mathcal{P}_{m,n}$, volgt uit de beroemde Hochster-Roberts stelling [HR] dat $\mathcal{R}_{m,n}$ aan de Cohen-Macaulay eigenschap voldoet.
Verder leert stelling 4.2 ons dat $\mathcal{R}_{m,n}$ een uniek faktorizatiedomein is. De stelling van Murthy , zie bijvoorbeeld het boek van R. Fossum [F] , geeft ons bijgevolg dat $\mathcal{R}_{m,n}$ Gorenstein is. Deze stelling geeft reeds aan dat de singulariteiten van de affiene variëteit X niet al te wild kunnen zijn. Men kan zich bijgevolg de voor de hand liggende vraag stellen of er wel degelijk singulariteiten zijn in X.
In hetvolgende hoofdstuk zullen we hiervan verscheidene voorbeelden geven.

5. Faktorialiteit van de spoorring.

In deze sektie willen we eerst bewijzen dat de spoorring van m generieke n bij n matrixen "normaal" is. Dit is een uitwerking van een bewijs-schets dat ik ontving van M. Artin die ik hiervoor wil danken. Verder hebben Chatters en Jordan een niet-kommutatieve veralgemening voor faktorialiteit gegeven. We zullen bewijzen dat spoorringen aan deze definitie voldoen.

Laat ons beginnen met de normaliteit. Een affiene kommutatieve ring R is normaal (of integraal gesloten) indien voor elk ideaal $I, (I : I) = \{x \in K : Ix \subset I\} = R$, waarbij K het breukenlichaam van R is.

Daarom noemen we een niet-kommutatieve affiene prime ring Λ, die voldoet aan een veelterm-identiteit, normaal indien voor ieder tweezijdig ideaal I van Λ

$$
\begin{aligned}
(I :_e I) &= \{x \in \Sigma : Ix \subset I\} = \Lambda \\
(I :_r I) &= \{x \in \Sigma : xI \subset I\} = \Lambda
\end{aligned}
$$

waarbij Σ de klassieke ring van quotienten is van Λ. Men kan aantonen dat deze definitie equivalent is met de notie van maximaal order als ingevoerd door M. Auslander en O. Goldman in [AG]. Zij noemen een order over een normaal domein R een deelring Λ van een centraal simpele algebra Σ over het breukenlichaam K van R zodat Λ een eindig voortgebracht R-moduul is met $\Lambda.K = \Sigma$. Een order Λ is een centraal enkelvoudige algebra Σ noemen we maximaal indien Λ niet echt bevat is in een order van Σ.

Eén van de vele karakterizaties van maximale orders (en dus van normaliteit) is de volgende : een R-order Λ in Σ is maximaal als en slechts als

(1) : Λ_p is een maximaal R_p-order voor ieder hoogte één priemideaal p van R.

(2) : Λ is een reflexief R-moduul, dit is $\Lambda = \Lambda^{**}$ waarbij $(-)^{**}$ de biduaal noteert.

We zullen beginnen met (2) te bewijzen voor de spoorring $\mathbb{T}_{m,n}$ over zijn centrum $R_{m,n}$. Merk op dat een eindig voortgebracht torsievrij R-moduul M reflexief is als en slechts als de secties $\Gamma(U, \Theta_M)$ van de struktuurschoof van M over $\mathrm{Spec}(R)$ beperkt tot ieder open deel U alle hoogte één priemen bevat juist M is

Stelling 5.1. : $\mathbb{T}_{m,n}$ is een reflexief $R_{m,n}$-moduul.

Bewijs :

Zij U een willekeurig open deel van het affiene spectrum $\mathrm{Spec}(R_{m,n})$ dat alle hoogte één priemen bevat en bekijk $\pi^{-1}(U) \subset \mathrm{Spec}(P_{m,n})$ onder het natuurlijk morfisme

$$\pi : \mathrm{Spec}(P_{m,n}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(R_{m,n})$$

dan volgt uit deel (2) van stelling 4.2. dat $\pi^{-1}(U)$ een open deel is dat alle hoogte één priemidealen van $P_{m,n}$ bevat. Uit het inklusie-diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}_{m,n} & \hookrightarrow & M_n(P_{m,n}) \\ \cup & & \cup \\ R_{m,n} & \hookrightarrow & P_{m,n} \end{array}$$

kunnen we afleiden dat er ook een inklusie bestaat tussen de secties

$$(*): \qquad \Gamma(U, \underline{\Theta}_{\mathbb{T}_{m,n}}) \hookrightarrow \Gamma(\pi^{-1}(U), \underline{(\Theta)}_{M_n(P_{n,m})})$$

Als vrij $P_{m,n}$-moduul is $M_n(P_{M,N})$ reflexief en bijgevolg is het rechterlid van (*) gelijk aan $M_n(P_{m,n})$. Verder bestaat $\Gamma(U, \Theta_{\mathbb{T}_{m,n}})$ als deel van $\Delta_{m,n}$ uit $GL_n(F)$-invariante elementen van $M_n(Q_{m,n})$. Aldus,

$$\Gamma(U, \underline{\Theta}_{\mathbb{T}_{m,n}}) \subset M_n(P_{m,n})^{GL_n(F)} = \mathbb{T}_{m,n}$$

en omdat de andere inklusie triviaal is besluit dit onze bewijsvoering. ∎

Stelling 5.2. : (Artin-Schofield)

De spoorring van m generieke n bij n matrixen is normaal, dit is, $\mathbb{T}_{m,n}$ is een maximaal order over het centrum $R_{m,n}$.

Bewijs :
Er rest ons te bewijzen dat de lokalizatie $(\mathbb{T}_{m,n})_p$ voor een hoogte één priemideaal p van $R_{m,n}$ een maximaal order is over de diskrete valuatiering $(R_{m,n})_p$. Omdat $R_{m,n}$ een normaal domein is, is dit voldaan telkens als $(\mathbb{T}_{m,n})_p$ een Azumaya algebra is, of equivalent is hiermee wanneer $(\mathbb{T}_{m,n})/\text{rad}(p\mathbb{T}_{m,n})$ een F-algebra is die niet voldoet aan alle identiteiten van $n-1$ bij $n-1$-matrixen.
Laat ons dus veronderstellen dat p.i. $\deg(\mathbb{T}_{m,n})/\text{rad}(p\mathbb{T}_{m,n})) = r < n$. We kunnen p opvatten als een gesloten deelvarieteit van kodimensie één in X (de affiene variëteit van $R_{m,n}$). De punten op p moeten evenwel korresponderen met ontbindbare half-enkelvoudige n-dimensionale representaties van de vrij-algebra. Een open deelverzameling van p bestaat uit punten die korresponderen met equivalentieklassen van $n$dimensionale half-enkelvoudige representaties van de vorm

$$\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$$

waarbij $\dim(\varphi_1) = r$ en $\dim(\varphi_2) = n-r$ en beide zijn onontbindbaar. Bijgevolg is de dimensie van de algebraische varieteit p kleiner of gelijk aan de som der dimensies van de varieteiten die equivalentieklassen van onontbindbare r (resp. $n-r$)-dimensionale representaties klassificeren. Deze dimensies hebben we bepaald in stelling 2.3.(2). Dus hebben we :

$$\dim(p) \leq (m-1).r^2 + 1 + (m-1)(n-r)^2 + 1$$

Anderzijds kennen we natuurlijk de dimensie van p daar p van kodimensie één is in een varieteit van dimensie $(m-1)n^2+1$ en verkrijgen we de ongelijkheid

$$(m-1)n^2 \leq (m-1)\big(r^2+(n-r)^2\big)+2$$

of

$$0 \leq (r-n)-r+(m-1)^{-1}$$

en omdat $r < n$ kan deze ongelijkheid enkel voldaan worden indien $m=2$ en $(n-r).r \leq 1$. Dit kan slechts voldaan worden voor $r=1$ en $n=2$. Bijgevolg hebben we aangetoond dat $\mathbb{T}_{m,n}$ steeds een maximaal order is behalve misschien in het speciale geval $\mathbb{T}_{2,2}$. In het volgende hoofdstuk zullen we echter aantonen dat deze spoorring een geïtereerde Öre-uitbreiding is en dus een maximaal order. ∎

Chatters en Jordan noemen in [CJ] een Noetherse priemring Λ een faktoriële ring indien ieder niet-nul priemideaal van Λ een niet-nul priemideaal bevat dat als links en rechts ideaal voortgebracht is door één element. Merk op dat dit een natuurlijke veralgemening is van kommutatieve faktorële domainen.
Een reflexief order Λ over een noemaal domein R wordt een reflexieve Azumaya algebra geheten indien de natuurlijke map

$$\delta.(\Lambda \otimes_R \Lambda^{opp})^{**} \longrightarrow \mathrm{End}_R(\Lambda)$$

waarbij Λ^{opp} het R-module Λ voorstelt met de omgekeerde vermenigvuldiging, een isomorphisme van R-algebras is. Men gaat eenvoudig na dat een reflexieve Azumaya algebra een maximaal order is indien Λ eindig voortgebracht is en verder dat ieder divisorieel Λ-ideaal I (dit is een tweezijdig gebroken ideaal van Λ dat reflexief is als R-moduul) van de vorm is $I = (\Lambda(I \cap R))^{**}$.

Stelling 5.3. : De spoorring van m generieke n bij n matrixen is faktorieel.

Bewijs : Omdat $\mathbb{T}_{m,n}$ een affiene F-algebra is die als moduul eindig voortgebracht is over zijn affien centrum $R_{m,n}$, volstaat het voor ons te bewijzen dat ieder hoogte één priemideaal van $\mathbb{T}_{m,n}$ zowel een links als rechts hoofdideaal is.
Uit het bewijs van de voorgaande stelling weten we dat de lokalizatie van $\mathbb{T}_{m,n}$ aan een centraal hoogte één priemideaal p een Azumaya algebra is (behalve in het geval dat $m=n=2$). Dit toont aan dat δ_p, waarbij

$$\delta : (\mathbb{T}_{m,n} \otimes \mathbb{T}_{m,n}^{opp})^{**} \longrightarrow \mathrm{End}_{R_{m,n}}(\mathbb{T}_{m,n})$$

een isomorphisme
Omdat $\mathbb{T}_{m,n}$ een reflexief $R_{m,n}$-moduul is volgt hieruit dat $\mathbb{T}_{m,n}$ een reflexieve Azumaya algebra is. Bijgevolg weten we dat ieder hoogte één priemgetal P, dat automatisch divisorieel moet zijn omdat $\mathbb{T}_{m,n}$ normaal is, van de vorm is :

$$P = \big(\mathbb{T}_{m,n}(P \cap R_{m,n})\big)^{**} = \mathbb{T}_{m,n}.r$$

voor een centraal priem-element r omdat het centrum $R_{m,n}$ een faktorieel domain is. In het uitzonderingsgeval dat $m = n = 2$ kunnen we aantonen dat het enige niet-centraal voortgebracht hoogte één priemideaal gelijk is aan

$$\mathbb{T}_{2,2}(X_1X_2 - X_2X_1) = (X_2X_1 - X_1X_2)\mathbb{T}_{2,2}$$

en bijgevolg is ook $\mathbb{T}_{2,2}$ faktorieel. ∎

Hoofdstuk 2. Regulariteit van Spoorringen.

2.1. Poincaré reeksen en regulariteit

2.2. Tweedimensionale representaties

2.3. Driedimensionale representaties

2.4. Het algemene geval

2.5. Beschrijving van de reguliere.

1. Poincaré reeksen en regulariteit.

Zij R een kommutatieve affiene F-algebra die positief gegradeerd is :

$$R = \oplus_{i=0}^{\infty} R_i$$

zodat $R_+ = F$. Zij M een positief gegradeerd moduul over R dat eindig voortgebracht is :

$$M = \oplus_{i=0}^{\infty} M_i$$

dan is het duidelijk dat elke homogene komponent een eindig dimensionale vektorruimte is over F. In het speciale meetkundige geval dat R als algebra voortgebracht is door elementen van graad één, heeft M een Hilbert veelterm :

$$H_M(x) = \frac{e(M)}{(n-1)!}.x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \ldots + \alpha_n$$

zodat voor $i >>$ men heeft dat $H_M(i) = \dim_F(M_i)$. Voor een niet-nul R-moduul M zijn $n = d(M)$ en $e(M)$ positieve gehele getallen en belangrijke invarianten van M : $d(M)$ is de dimensie van het moduul M en $e(M)$ de multipliciteit.
Als R daarentegen niet voortgebracht is door elementen van graad één dan bezit een gegradeerd R-moduul M niet noodzakelijk over een Hilbert veelterm.
Nochtans heeft men steeds een goed alternatief, namelijk de Poincaré-reeks van M :

$$P(M;t) = \sum_{i=0}^{\infty} \dim_F(Mi).t^i$$

In het meetkundige geval is er een sterk verband tussen de Hilbert veelterm $H_M(x)$ en de Poincaré-reeks $P(M;t)$. Namelijk, $\deg H_M(x) \leq n-1$ als en slechts als $(1-t)^n.P(M;t) \in \mathbb{Z}[t]$. Als verder $\deg H_M(x) = n-1$ dan kan de multipliciteit bepaald worden als de evaluatie in $t=1$ van de veelterm $(1-t)^n.P(M.t)$. W. Smoke [Sm] toonde aan dat men ook in het algemene gavel een definitie kan geven voor de dimensie en de multipliciteit aan de hand van de Poincaré reeks. Zo is bij voorbeeld de dimensie van een moduul M juist gelijk aan de graad van de pool van $P(M,t)$ in $t=1$. Verder valt op te merken dat onder de hierboven geschetste voorwaarden de Poincaré reeks van een moduul $N, P(M;t)$, steeds een rationale funktie is.
Als nu $M = A$ bovendien een F-algebra is met $A_0 = F$ dan bestaat er een nodige voorwaarde in funktie van de Poincaré reeks opdat A eindige globale dimensies zou hebben :

Stelling 1.1. : Zij A een positief gegradeerde F algebra met $A_0 = F$ en A een eindig moduul over een affiene kommutatieve positief gegradeerde F-algebra R en veronderstel dat $gldim(A) < \infty$ dan krijgen we

$$P(A;t) = \frac{1}{f(t)}$$

voor een zekere veelterm $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$.

Bewijs :
Zij $A_+ = \oplus_{i=1}^{\infty} A_i$ het tweezijdige ideaal bestaande uit de strikt positieve homogene komponenten, dan is F een positief gegradeerd links A-moduul via de voor de hand liggende afbeelding $\pi : A \longrightarrow A/A_+ = F$. Daar $gldim(A) < \infty$ bestaat er een eindige resolutie van F als links A-moduul

$$0 \longrightarrow P_k \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 = A \xrightarrow{\pi} F \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

waarbij alle P_i eindig voortgebrachte projectieve links A-modulen zijn. Daar A links Noethers is en π een gradatie bewarend morfisme is, mogen we veronderstellen dat alle P_i positief gegradeerde projectieve links A-modulen zijn en alle morfismen graadbewarend. Dan kunnen we de exacte rij (*) vertalen in Poincaré reeksen :

$$1 = P(F;t) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i P(P_i;t) \qquad (**)$$

Nu volgt uit een gegradeerde versie van het het lemma van Nakayama, zie bvb [La], dat elk van de P_i gegradeerd vrij is met een homogene basis, reg$\{p_{i1}, \ldots, p_{ik_i}\}$ waarbij deg$p_{ij} = d_{ij}$. Maar dan geldt :

$$P(P_i;t) = (\sum_{j=1}^{k_i} t^{d_{ij}}).P(A;t)$$

en dus wordt de vergelijking (**) herleid tot :

$$1 = \Big(\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \sum_{j=1}^{k_i} t^{d_{ij}}\Big).P(A;t)$$

of, equivalent hiermede, $P(A;t) = \frac{1}{f(t)}$ waarbij $f(t) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \sum_{j=1}^{k_i} t^{d_{ij}} \in \mathbb{Z}[t]$. ∎

In onze toepassingen zal natuurlijk R het centrum van de spoorring van m generieke n bij n matrixen zijn, $R_{m,n}$, en A de spoorring zelf.

In het licht van stelling 1.1. zal ons onderzoek naar de regulariteit van spoorringen van generieke matrixen en dus in eerste instantie uit bestaan die waarden van n en m te bepalen zodat $P(\mathbb{T}_{m,n};t)$ een zuiver invers is.

2. Twee dimensionale representaties :

Alvorens ons te wijden aan de studie van de Poincaré reeksen van spoorringen van generieke 2 bij 2 matrixen, willen we enkele klassieke resultaten opfrissen over de

invarianten theorie van orthogonale groepen. Voor bewijzen en verdere details verwijzen we de lezer naar het standaardwerk van H. Weyl [We] of naar een artikel van C. De Concini en C. Procesi [DP] voor een moderne uiteenzetting.
Een n bij n matrix over een lichaam F noemen we orthogonaal als $A.A^{\tau} = I_n$ waarbij I_n de eenheidsmatrix is en $(-)^{\tau}$ de transpositie aanduidt. Met $O_n(F)$ zullen we de orthogonale groep noteren, dit is de deelgroep van $GL_n(F)$ bestaande uit alle orthogonale n bij n matrixen. Een speciale orthogonale matrix is een element van $O_n(F)$ met determinant 1. De groep van alle speciale orthogonale matrixen noteren we met $SO_n(F)$. De determinant afbeelding levert ons een exacte rij van groepen :

$$1 \longrightarrow SO_n(F) \longrightarrow O_n(F) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{1,-1\} \longrightarrow$$

Er bestaat een natuurlijke aktie van de groep $O_n(F)$ op een n-dimensionale vectorruimte V door links vermenigvuldiging. De invariantentheorie van orthogonale groepen behelst de beschrijving van de ring van alle polynomiale afbeeldingen

$$f : V \oplus \ldots \oplus V \longrightarrow F$$

van m kopies van V naar F die invariant blijven onder de komponentsgewijze aktie van $O_n(F)$ op $V \oplus \ldots \oplus V$. De ring van alle polynomiale afbeeldingen is natuurlijk

$$S = F[u_{ij} : 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n]$$

en de aktie van een orthogonale matrix A in $O_n(F)$ op de ring S wordt gegeven door de variabele n_{ij} te zenden naar de j-de komponent van de kolom vector $A.(u_{i1}, \ldots, u_{in})^{\tau}$.
We willen de invariant ringen

$$S^{O_n}(F) \quad \text{en} \quad S^{SO_n(F)}$$

beschrijven. Laat ons met u_i de rij-vektor $(u_{i1}, \ldots, u_{in})$ noteren en definieer

$$(u_i, u_j) = \sum_{k=1}^{n} u_{ik} u_{jk}$$

De eerste hoofdstelling van de invariantentheorie van orthogonale en speciaal orthogonale groepen kan nu als volgt geformuleerd worden.

Stelling 2.1. : ([DP, th. 5.6.])

(1) : De invariantenring $S^{O_n(F)}$ is de F-deelalgebra van S voortgebrqcht door de elementen (u_i, u_j) waarbij $1 \leq i \leq j \leq n$.

(2) : De invariantenring $S^{SO_n(F)}$ is de F-deelalgebra van S voortgebracht door alle elementen (u_i, u_j) als hierboven en de elementen

$$[u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{in}] = \det \begin{bmatrix} u_{i1,1} & \ldots & u_{in,1} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{in,n} & \ldots & u_{in,n} \end{bmatrix}$$

waarbij $1 \leq i1 < i2 < \ldots in \leq m$.

Verder kan men nagaan dat het produkt van twee zulke elementen

$$[u_{i1}, \ldots, u_{in}].[u_{j1}, \ldots, u_{jn}]$$

gelijk is aan de determinant van de n bij n matrix $((u_{ik}, u_{jl}))_{k,l}$. Om de Poincaré reeksen van deze ringen te bestuderen is het nodig te beschikken over een basis van $S^{O_n(F)}$ en $S_n^{SO}(F)$ als F-vektorruimte. Zulke basis verkrijgt men met behulp van Young schemas. Een dubbel Young schema kan voorgesteld worden als

$$T = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m1} & b_{11} & \ldots & b_{1m1} \\ a_{21} & \ldots & a_{2m2} & b_{21} & \ldots & b_{2m2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \ldots & a_{sms} & b_{s1} & \ldots & b_{sms} \end{bmatrix} = (A|B)$$

waarbij alle a_{ij} en b_{ij} indexen zijn uit de verzameling $\{1, \ldots, m\}$ en verder nemen we aan dat

$$m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_s$$

Met elk dubbel Young schema T als boven kunnen we een element van de invarianten ring $S^{O_n(F)}$ associeren, namelijk het produkt van de s determinanten

$$(a_{i1}, \ldots, a_{im_i}|b_{i1}, \ldots, b_{im_i} = \det\left((u_{a_{ik}}, u_{b_{ie}})\right)_{k,l}$$

Uit T kunnen we ook een gewoon Young schema afleiden, namelijk

$$T' = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m_1} \\ b_{11} & \ldots & b_{1m_1} \\ a_{21} & \ldots & a_{2m_2} \\ b_{21} & \ldots & b_{2m_2} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \ldots & a_{sm_m} \\ b_{s1} & \ldots & b_{sm_s} \end{vmatrix}$$

en we zeggen dat het dubbel Young schema T in standaardvorm is als het Young schema T; in standaardvorm is. We herinneren er de lezer aan dat een Young schema

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1m_1} \\ \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{2m_2} \\ \vdots & & \\ \alpha_{k1} & \ldots & \alpha_{km_k} \end{bmatrix}$$

in standaardvorm is als

$$\alpha_{ij} < \alpha_{ik} \quad \text{voor alle } k > j$$
$$\alpha_{ij} \leq \alpha_{kj} \quad \text{voor alle } k \geq i$$

De gevraagde basis voor de F-vectorruimten $S^{O_n(F)}$ en $S^{SO_n(F)}$ kunnen nu als volgt beschreven worden :

Stelling 2.2. : ([DP, Th. 5.1.])

(1) : Er bestaat een natuurlijke één-één korrespondentie tussen een basis van de F-vektorruimte $S^{O_n(F)}$ en dubbele Young schemas in standaardvorm van lengte $\leq n$ (dat is, $m_1 \leq n$).

(2) : Er bestaat een natuurlijke één-één korrespondentie tussen een basis van F-vektorruimte $S^{SO_m(F)}$ en enerzijds dubbele Young schemas in standaard vorm van lengte $\leq n$ en anderzijds produkten $[u_{i1}, \ldots, u_{in}].T$ waarbij T een dubbel Young schema is van lengte $\leq n$ zodanig dat het Young schema

$$\begin{bmatrix} u_{i_1} & \ldots & u_{i_n} \\ & T' & \end{bmatrix}$$

in standaardvorm is.

Als we elk vorm van de variabelen u_{ij} graad u_{ij} graad 1 geven dan zijn zowel $S, S^{O_n(F)}$ als $S^{SO_n(F)}$ positief gegradeerde F-algebra. Verder dient men op te merken dat de graad van een basis-element dat korrespondeert met een Young schema gelijk is aan het aantal cellen in dit Young schema.

Laat ons overgaan tot een expliciete beschrijving van het centrum $R_{m,2}$ van de spoorring van m generieke 2 bij 2 matrixen, $\mathbb{T}_{m,2}$. De volgende stelling geeft het verband aan tussen $R_{m,2}$ en de invarianten theorie van de groep $SO_3(F)$.

Stelling 2.3. : Het centrum $R_{m,2}$ van de spoorring van m generieke 2 bij 2 matrixen is isomorf met de polynoomring

$$R_m^0[Tr(X_1), \ldots, Tr(X_m)]$$

waarbij $R_m^0 = S^{SO_3(F)}$, de invarianten ring van S onder aktie van de speciale orthogonale groep van 3 bij 3 matrixen.

Bewijs :
In het eerste hoofdstuk hebben we gezien dat $R_{m,2}$ de ring van polynomiale afbeeldingen

$$f : M_2(F) \oplus \ldots \oplus M_2(F) \longrightarrow F$$

van m kopoieën van $M_2(F)$ naar F is die invariant gelaten worden onder de komponentsgewijze aktie door konjugatie van $GL_2(F)$. Nu is het duidelijk dat elk van de komponenten $M_2(F)$ als $GL_2(F)$-moduul ontbonden kan worden in een direkte som

$$M_2(F) = F \oplus M^0$$

waarbij M^0 de drie-dimensionale vektorruimte is van alle 2 bij 2 matrixen met spoor nul. Deze ontbinding bestaat ook op de matrix-variabelen

$$X_i = X_i^0 + \frac{1}{2}Tr(X_i)$$

waarbij X_i^0 ge generieke 2 bij 2 spoor nul matrix is

$$X_i^0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_{11} - \frac{1}{2}x_{22} & x_{12} \\ x_{21} & \frac{1}{2}x_{22} - \frac{1}{2}x_{11} \end{pmatrix}$$

Deze opmerking leert ons dat $R_{m,2}$ de polynoom ring is in de variabelen

$$Tr(X_1), \ldots, Tr(X_m)$$

over de ring van alle polynomiale afbeeldingen

$$f^0 : M^0 \oplus \ldots \oplus M^0 \longrightarrow F$$

van m kopieën van M^0 naar F die invariant gelaten worden onder de komponentsgewijze aktie door konjugatie van $GL_2(F)$. We zullen nu deze aktie van $GL_2(F)$ op M^0 in detail bestuderen. Omdat $i = \sqrt{-1}$ bevat is in F, kunnen we een algeen element m van M^0 beschrijven als een spinor-matrix :

$$m = \begin{pmatrix} x & y - iZ \\ y + iZ & -x \end{pmatrix}$$

Zij nu $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ een algemeen element van $GL_2(F)$ dan kunnen we het beeld van m onder aktie van α berekenen :

$$\alpha.m.\alpha^{-1}$$
$$= \frac{1}{det(\alpha)} \begin{bmatrix} (ad+bc)x + (bd-ac)y + i(ac+bd)k & -2abx + (a^2-b^2)y - i(a^2+b^2)k \\ 2cdx + (d^2-c^2)y + i(c^2+d^2)k & -(ad+bc)x - (bd-ac)y - i(ac+bd)k \end{bmatrix}$$

Deze matrix kunnen we wederom als een spinor-matrix voorstellen :

$$\alpha.m.\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} x' & y' - iz' \\ y' + iz' & -x' \end{pmatrix}$$

waarbij

$$\begin{cases} x' = (ad+bc)x + (bd-ac)y + i(bd+ac)z \\ y' = (cd-ab)x + \frac{1}{2}(a^2 - b^2 - c^2 + d^2)y + \frac{i}{2}(c^2 + d^2 - a^2 - b^2)z \\ z' = -i(ab+cd)x - \frac{1}{2}(b^2 + d^2 - a^2 - c^2)y + \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)z \end{cases}$$

Nu, als we de matrix m representeren door de driedimensionale kolom-vektor $(x, y, z)^\tau$ dan kan de aktie van α op deze vektor voorgesteld worden door links-vermenigvuldiging met de 3 bij 3 matrix

$$S_\alpha = \frac{1}{det(\alpha)} \cdot \begin{bmatrix} ad+bc & bd-ac & i(ac+bd) \\ cd-ab & \frac{1}{2}(a^2-b^2-c^2+d^2) & -\frac{i}{2}(a^2+b^2-c^2-d^2) \\ -i(ab+cd) & \frac{i}{2}(a^2-b^2+c^2-d^2) & \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2) \end{bmatrix}$$

Het is eenvoudig na te gaan dat $S_\alpha \in SO_3(F)$. Dit toont aan dat de ring van invariante polynomiale afbeeldingen f° is met de ring van invariante polynomiale afbeeldingen

$$\tilde{f}^0 : F^{(3)} \oplus \ldots \oplus F^{(3)} \longrightarrow F$$

vam m kopieën van de standaard drie-dimensionale vektorruimte $F^{(3)}$ naar F die invariant gelaten worden onder de komponentsgewijze aktie door konjugatie van $SO_3(F)$, i.e. $S^{SO_3(F)} = R_m^0$. ∎

Nu hebben we gezien dat R_m^0 voortgebracht is als F-algebra door de elementen

$$(u_i, u_j) + u_{i1}u_{j1} + u_{i2}u_{j2} + u_{i3}u_{j3}$$

$$[u_i, u_j, u_k] = \det \begin{bmatrix} u_{i1} & u_{j1} & u_{k1} \\ u_{i2} & u_{j2} & u_{k2} \\ u_{i3} & u_{j3} & u_{k3} \end{bmatrix}$$

We willen nu deze elementen interpreteren in termen van de generieke spoor-nul matrixen X_i^0. We merken op dat

$$X_i^0 = \begin{bmatrix} u_{i1} & u_{i2} - iu_{i3} \\ u_{i2} + iu_{i3} & -u_{i1} \end{bmatrix}$$

waaruit volgt dat

$$\begin{cases} u_{i1} = \frac{1}{2}x_{11}(i) - \frac{1}{2}x_{22}(i) \\ u_{i2} = \frac{1}{2}x_{12}(i) + \frac{1}{2}x_{21}(i) \\ u_{i3} = \frac{1}{2}x_{12}(i) - \frac{1}{2}x_{21}(i) \end{cases}$$

Gebruikmakend van deze relaties kan men nu vrij gemakkelijk aantonen dat

$$\begin{cases} (u_i, u_j) = \frac{1}{2}Tr(X_i^0 X_j^0) \\ [u_i, u_j, u_k] = Tr(X_i^0 X_j^0 X_k^0) \end{cases}$$

We zeggen dat een Young-schema de vorm $\sigma = 3^a 2^b 1^c$ heeft indien het schema bestaat uit a rijen van lengte drie, b rijen van lengte 2 en c rijen van lengte één. Gebruikmakend van stelling 2.2. kunnen we nu aantonen dat er een natuurlijke één-één korrespondentie bestaat tussen een basis van R_m^0 als vectorruimte en Young schemas in standaardvorm $\sigma = 3^a 2^{2b} 1^{2c}$ voor alle $(a, b, c) \in \mathbb{N}^{(3)}$. Deze korrespondentie kan expliciet gegeven worden door gebruik te maken van de interpretatie-regels :

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline i & j & k \\ \hline \end{array} \quad \vdash \quad Tr(X_i^0 X_j^0 X_k^0)$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline i & j \\ \hline l & k \\ \hline \end{array} \quad \vdash \quad \det \begin{bmatrix} Tr(X_i^0 X_k^0) & Tr(X_i^0 X_l^0) \\ Tr(X_j^0 X_k^0) & Tr(X_j^0 X_l^0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline j \\ \hline \end{array} \quad \vdash \quad Tr(X_i^0 X_j^0)$$

Bijgevolg kennen we de Poincaré-reeks van $R_{m,2}$:

$$P(R_{m,2};t) = \frac{1}{(1-t)^m} \sum_{a,b,c} \mathcal{L}_{3^a 2^{2b} 1^{2c}}.t^{3a+4b+2c}$$

waarbij $\mathcal{L}_{3^a 2^b 1^c}$ het aantal Young schemas in standaardvorm $\sigma = 3^a 2^b 1^c$ aanduidt. We zullen verderop zien dat dit aantal kan berekend worden aan de hand van een formule van H. Weyl.
Na dit inleidend maar noodzakelijk werk kunnen we nu de beschrijving aanvatten van de Poincaré reeks van de spoorring van m generieke 2 bij 2 matrixen, $\mathbb{T}_{m,2}$.

Stelling 2.4. :

(1) : De spoorring van m generiek 2 bij 2 matrixen is isomorf met de polynoomring $\mathbb{T}^0_m[Tr(x_1),\ldots,Tr(x_m)]$ waar $\mathbb{T}^0_m$ de F-deelalgebra is van $\mathbb{T}_{m,2}$ voortgebracht door de generieke spoor-nul matrixen $X^0_1,\ldots,X^0_m$.

(2) : Er bestaat een natuurlijke één-één korrespondentie tussen een basis voor $\mathbb{T}^0_m$ als F-vektorruimte en Young-schemas in standaardvorm $\sigma = 3^a2^b1^c$ voor alle $(a,b,c) \in \mathbb{N}^{(3)}$.

Bewijs :
Met $\mathbb{T}^0_m$ zullen we de ring aanduiden van alle polynomiale concomitanten

$$f : M^0 \oplus \ldots \oplus M^0 \longleftarrow M_2(F)$$

van m kopieën van M^0 naar $M_2(F)$. Omdat de spoorring voortgebracht is door (niet-kommutatieve) polynomen in de generieke matrixen X_i en door elementen van de vorm $Tr(X_{i_1}\ldots X_{i_k})$, kunnen we evenals in het bewijs van de vorige stelling de sporen afsplitsen en verkrijgen :

$$\mathbb{T}_{m,2} = \mathbb{T}^0_m[Tr(X_1),\ldots,Tr(X_m)]$$

Verder kunnen we elke polynomiale concomitant f als boven ontbinden als $f = f^0 + \frac{1}{2}Tr(f)$ wat overeenkomt met het spoort te nemen in de ring $\mathbb{T}^0_m$. Aldus ontbinden we $\mathbb{T}^0_m$ als gegradeerde vectorruimte in een direkte som $\mathbb{T}^0 \oplus R^0_m$ waarbij $\mathbb{T}^0$ de ruimte is van alle polynomiale comcomitanten

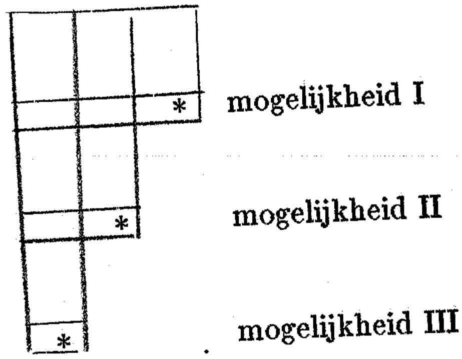
$$f^0 : M^0 \oplus \ldots \oplus M^0 \longrightarrow M^0$$

van m kopieën van M^0 naar M^0. Een beschrijving van de ruimte $\mathbb{T}^0$ kunnen we op devolgende wijze bekomen :
De afbeelding

$$Tr(-X_{m+1}) : \mathbb{T}_{m,2} \longrightarrow R_{m+1,2}$$

is een lineaire injectie. Het beeld bestaat juist uit deze elementen van $R_{m+1,2}$ die lineair zijn in de matrix-variable X_{m+1}. Met alle identificaties en notaties als voorheen kan men gemakkelijk aantonen dat voor iedere $f^0 \in \mathbb{T}^0$ het beeld $Tr(f^0X^0_{m+1})$ gelegen is in de deelruimte van R^0_{m+1} die bestaat uit juist die invarianten die lineair zijn in de matrix-variabele X^0_{m+1}. Gebruikmakend van de voorgaande resultaten betekent dit dat $Tr(f^0X^0_{m+1})$ geschreven kan worden (op unieke wijze !) als een lineaire kombinatie van Young schemas in standaardvorm $\sigma = 3^q2^{2b}1^{2c}$ die gevuld zijn met indices uit de verzameling $\{1,\ldots,m+1\}$ en zodanig dat in ieder van deze Young schemas de index $m+1$ juist één maal voorkomt.

Nu kan $m+1$ maar op drie mogelijke plaatsen (aangeduid door een *) voorkomen in een Young schema in standaardvorm $\sigma = 3^a 2^{2b} 1^{2c}$:



In geval I hebben we :

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline i & j & m+1 \\\hline\end{array} = Tr(X_i^0 X_j^0 X_{m+1}^0) = Tr\big((X_i^0 X_j^0) X_{m+1}^0\big)$$

In het tweede geval krijgen we :

$$\begin{array}{|c|c|}\hline i & j \\\hline k & m+1 \\\hline\end{array} = Tr(X_i^0 X_k^0) Tr(X_j^0 X_{m+1}^0) - Tr(X_j^0 X_k^0) Tr(X_i^0 X_{m+1}^0) = Tr\big[(Tr(X_i^0 X_k^0) X_j^0 - Tr(X_j^0 X_k^0) X_i^0) - X_{m+1}^0\big]$$

En ten slotte in het laatste geval :

$$\begin{array}{|c|}\hline i \\\hline m+1 \\\hline\end{array} = Tr(X_i^0 X_{m+1}^0) = Tr\big((X_i^0) X_{m+1}^0\big)$$

Deze regels maken het ons nu mogelijk om f^0 terug te verkrijgen uit de lineaire kombinaties van Young schemas in standaardvorm die $Tr(f^0 X_{m+1}^0)$ voorstellen. Door het schrappen van de cel waarin de index $m+1$ voorkomt krijgen we een natuurlijke één-één korrespondentie tussen een basis voor $\mathbb{T}^0$ als F-vektor-ruimte en Young schemas in standaardvorm :

$$\begin{cases} \text{mogelijkheid I} & : \ \sigma = 3^{a-1}.2^{2b+1}.1^{2c} \\ \text{mogelijkheid II} & : \ \sigma = 3^{a}.2^{2b-1}.1^{2c+1} \\ \text{mogelijkheid III} & : \ \sigma = 3^{a}.2^{2b}.1^{2c-1} \end{cases}$$

Dit, te samen met de dekompositie $\mathbb{T}_m^0 = \mathbb{T}^0 \oplus R_m^0$ en stelling 2.3. bwijst reeds deel (2).

Om het resterende deel van (1) te bewijzen merken we op dat uit de beschrijving in termen van Young schemas volgt dat $\mathbb{T}_m^0$ als F-algebra wordt voortgebracht door de X_i^0 en de elementen $Tr(X_i^0 X_j^0)$ en $Tr(X_i^0 X_j^0 X_k^0)$. Nu kan men betrekkelijk eenvoudig aantonen dat

$$\begin{cases} Tr(X_i^0 X_j^0) & = X_i^0 X_j^0 + X_i^0 X_j^0 \\ Tr(X_i^0 X_j^0 X_k^0) & = \frac{1}{3} S_3(X_i^0, X_j^0, X_k^0) \end{cases}$$

waar S_3 de alternerende symmetrische veelterm is. ∎

Wederom laat dit resultaat ons toe de Poincaré reeks voor de spoorring van m generieke 2 bij 2 matrixen te bepalen :

$$P(\mathbb{T}_{m,2};t) = \frac{1}{(1-t)^m}\cdot\sum_{a,b,c} \mathcal{L}_{3^a2^b1^c}.t^{3a+2b+c}$$

waarbij als voorheen $\mathcal{L}_{3^a2^b1^c}$ het aantal Young schemas is in standaardvorm $\sigma = 3^a2^b1^c$ gevuld met indexen uit de verzameling $\{1,\ldots,m\}$.
Zoals we reeds eerder vermeld hebben heeft H. Weyl een gesloten formule gevonden voor dit aantal als $m \geq 4$:

$$\mathcal{L}_{3^a2^b1^c} =$$

$$(1+b)(1+c)(1+\frac{b+c}{2}\cdot\prod_{j=3}^{m-1}(1+\frac{a+b+c}{j})\cdot\prod_{j=2}^{m-2}(1+\frac{a+b}{j})\cdot\prod_{j=1}^{m-3}(1+\frac{a}{j})$$

Hiervan gebruik makend is het eenvoudig om de eerste termen te berekenen in de Poincaré reeks van $\mathbb{T}^0_m$.

$\sigma = 1$	$\mathcal{L}_1 = m$
$\sigma = 2$	$\mathcal{L}_2 = \frac{m(m-1)}{2}$
$\sigma = 1^2$	$\mathcal{L}_{1^2} = \frac{m(m+1)}{2}$
$\sigma = 3$	$\mathcal{L}_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{6}$
$\sigma = 21$	$\mathcal{L}_{21} = \frac{m(m+1)(m-1)}{3}$
$\sigma = 1^3$	$\mathcal{L}_{1^3} = \frac{m(m+1)(m+2)}{6}$

en bijgevolg krijgen we :

$$P(\mathbb{T}^0_m; = 1 + mt + m^2t^2 + \frac{m(2m^2+1)}{3}t^3 + \frac{m(m+1)(3m^2-m+2)}{8}t^4 + \ldots$$

Om regulariteit te testen van spoorringen van generieke matrixen (of equivalent van de spoorringen van generieke spoor-nul matrixen, $\mathbb{T}^0_m$) dienen we echter te beschikken over een rationele uitdrukking voor $P(\mathbb{T}_{m,2};t)$ (of $P(\mathbb{T}^0_m;t)$. Hiervoor voeren we de zogenaamde generieke Clifford-algebra in. Zij i.h.a. Λ een F-algebra en zij σ een F-automorphisme van Λ. Een lineaire afbeelding $\delta : \Lambda \to \Lambda$ noemen we een σ-differentiaal indien we voor alle $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ devolgende betrekking hebben

$$\delta(\lambda,\lambda') = \delta(\lambda).\delta(\lambda')$$

Voor zulk koppel (σ,δ) kunnen we de Öre-uitbreiding $\Lambda[x,\sigma,\delta]$ van Λ definiëren als de verzameling van alle veeltermen met koëfficiënten in Λ en met de vermenigvuldigingsregel :

$$x.\lambda = \sigma(\lambda).x + \delta(\lambda)$$

voor alle $\lambda \in \Lambda$. Als we onszelf een rekursieve definitie toelaten dan zeggen we dat geïtereerde Öre-uitbreidingen Öre-uitbreidingen zijn of Öre-uitbreidingen van geïtereerde Öre-uitbreidingen.
Beschouw nu de F-algebra

$$Cl_m = F[a_{ij} : 1 \leq i \leq j \leq m][a_1][a_2, \sigma_2, \delta_2] \dots [a_m, \sigma_m.\delta_m]$$

waarvoor we voor alle $i < j$ stellen dat $\sigma_j(a_i) = -a_i$ en op de andere variabelen hebben zowel σ_j als δ_j een triviale aktie, d.i. $\sigma_j(x) = x$ en $\delta_j(x) = 0$. Om na te gaan dat de algebra Cl_m een geïtereerde Öre-uitbreiding is dienen we te bewijzen dat σ_k een automorphisme is (dit is triviaal) en dat δ_k een σ_k-differentiaal is op de deelalgebra

$$Cl_{m,k} = F[a_{ij} : 1 \leq i \leq j \leq m][a_1][a_2, \sigma_2, \delta_2] \dots [a_{k-1}, \sigma_{k-1}, \delta_{k-1}]$$

Omdat we δ_k op een voortbrengend stel hebben gedefinieerd kan men δ_k uitbreiden tot heel $Cl_{m,k}$. We dienen er echter over te waken dat de kommutatie-relaties bewaard blijven. Dus dienen we te bewijzen dat voor alle $i < j < k$

$$\delta_k(a_i a_j + a_j a_i) = \delta_k(2a_{ij}) = 0$$

Nu is $\delta_k(a_i a_j) = +2a_{ik}a_j - 2a_i A_{jk}$ en $\delta_k(a_j a_i) = 2a_{jk}a_i - 2a_j a_{ik}$ en omdat alle a_{ik} centrale elementen zijn volgt het gestelde.
De algebra Cl_m noemen we de generieke Clifford algebra omdat de Clifford algebra (zie bvb. [La]) van elke quadratische vorm over F van rang m kan verkregen worden als epomorf beeld van Cl_m. De ringtheoretische structuur van deze generieke Clifford algebras is zeer mooi :

Eigenschap 2.5. Van de generieke Clifford algebra Cl_m zijn zowel de globale dimensie als de Krull dimensie eindig en gelijk aan $\frac{m(m+1)}{2}$.

Bewijs : Fields [Fi] heeft bewezen dat in een Öre-uitbreiding de globale dimensie ten hoogste met 1 vermeerdert en dus is $gldim(Cl_m) \leq \frac{m(m+1)}{2}$.
Als we nu met S_m de commutatieve deelring

$$F[A_{ij} : 1 \leq i < j \leq m][a_1^2, a_2^2, \dots, a_m^2]$$

van het centrum van Cl_m noteren dan gaat men eenvoudig na dat Cl_m een vrij S_m-moduul is van rang 2^m en met basis $\{a_1^{\epsilon_1} \dots a_m^{\epsilon_m}; \epsilon_i = 0 \text{of} 1\}$. Gebruikmakend van een resultaat van McConnell [Mc] verkrijgen we hieruit dat

$$gldim(Cl_m) \leq gldim(S_m) = \frac{m(m+1)}{2}$$

waaruit het gestelde volgt. Tenslotte hebben we tevens $Kdim(Cl_m) = Kdim(S_m) = \frac{m(m+1)}{2}$ omdat Cl_m een torsievrij eindig voortgebracht S_m-moduul is. ∎

Bovendien is Cl_m een positief gegradeerde F-algebra als we de variabelen a_{ij} graad twee en de variabelen a_i graad één geven. Dit volgt uit het feit dat dan alle kommutatie-relaties

$$a_i a_j + a_j a_i = 2a_{ij}$$

homogeen zijn van graad twee. Omdat de generieke Clifford algebra Cl_m als gegradeerde vektorruimte isomorf is met de kommutatieve polynoomring

$$F[a_{ij} : 1 \leq i < j \leq m][a_1, \ldots, a_m]$$

volgt dat de Poincaré reeks devolgende vorm heeft

$$P(Cl_m; t) = \frac{1}{(1-t)^m (1-t^2)^{\frac{m(m-1)}{2}}}$$

Maar laat ons nu terugkeren tot de studie van de Poincaré reeks van de spoorring van m generieke 2 bij 2 matrixen. Voor elke 2 bij 2 matrixen A en B met spoor nul geldt de relatie :

$$A.B + B.A = Tr(A.B)$$

Hieruit volgt dat er een F-algebra morfisme bestaat

$$\varphi_m : Cl_m \to \mathbb{T}^0_m$$

door a_i te zenden naar de generieke spoor-nul matrix X_i^0 en a_{ij} naar $\frac{1}{2}Tr(X_i^0 X_j^0)$. Wegens stelling 2.4. weten we dat $\mathbb{T}^0_m$ als F-algebra voortgebracht is door de elementen X_i^0 en bijgevolg is φ_m een epimorfisme.

Omdat Cl_m eindige globale dimensie heeft bestaat er een eidige resolutie van $\mathbb{T}^0_m$ als links Cl_m-moduul :

$$0 \to P_\alpha \to \ldots \to P_1 \to P_0 = Cl_m \to \mathbb{T}^0_m \to 0$$

met alle P_i gegradeerd vrije Cl_m-modulen van eindige rang en alle morfisme graadbewarend. Door een redenering als in §1 bestaat er dus een polynoom $f_m(t) \in \mathbb{Z}[t]$ zodat

$$P(\mathbb{T}^0_m; t) = f_m(t).P(Cl_m; t) = \frac{f_m(t)}{(1-t)^m (1-t^2)^{\frac{m(m-1)}{2}}}$$

Nu zijn we in staat onze eerste hoofdstelling te bewijzen.

Hoofdstelling 2.6. :

De spoorring van m generieke 2 bij 2 matrixen, $\mathbb{T}_{m,2}$, heeft eindige globale dimensie als en slechts dan als $m \leq 3$.

Bewijs : Daar $\mathbb{T}_{m,2} \cong \mathbb{T}^0_m[Tr(X_1), \ldots, Tr(X_m)]$ volstaat het natuurlijk de stelling te bewijzen voor de spoorring van m generieke spoor-nul matrixen $\mathbb{T}^0_m$. We weten dat :

$$P(\mathbb{T}^0_m; t) = \frac{f_m(t)}{(1-t)^m (1-t^2)^{\frac{m(m-1)}{2}}}$$

voor een zekere veelterm $f_m(t) \in \mathbb{Z}[t]$. Laat ons nu veronderstellen dat $\mathbb{T}^0_m$ eindige globale dimensie heeft, dan is het duidelijk dat de Poincaré-reeks devolgende vorm dient te hebben :

$$P(\mathbb{T}^0_m;t) = \frac{1}{(1-t)^\alpha.(1+t)^\beta}$$

voor zekere α en β in $\mathbb{N}$. Van deze rationale vorm kan men de machtreeksontwikkeling bepalen :

$$1+(\beta-\alpha)t+\left(\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}-\alpha\beta+\frac{\beta(\beta+1)}{2}\right)t^2+\dots$$

Verder hebben we reeds bewezen, aan de hand van de formule van H. Weyl dat de eerste termen in de machtreeksontwikkeling van $P(\mathbb{T}^0_m;t)$ de volgende zijn

$$P(\mathbb{T}^0_m;t) = 1+mt+m^2t^2+\dots$$

Bijgevolg dienen α en β oplossingen te zijn van de vergelijkingen :

$$\begin{cases} \beta-\alpha = m \\ \alpha(\alpha+1)-2\alpha\beta+\beta(\beta+1) = 2m^2 \end{cases}$$

en men gaat na dat dit impliceert dat $\alpha = \frac{m(m-1)}{2}$ en $\beta = \frac{m(m+1)}{2}$. Dus, steeds in de veronderstelling dat $\mathbb{T}^0_m$ eidige globale dimensie heeft, moet de Poiuncaré-reeks van $\mathbb{T}^0_m$ de vorm hebben

$$P(\mathbb{T}^0_m,t) = \frac{1}{(1-t)^m.(1-t^2)^{\frac{m(m-1)}{2}}} = P(Cl_m,t)$$

Maar anderzijds hebben we het natuurlijk epimorfisme φ_m en bijgevolg de exakte rij van gegrageerde Cl_m modulen :

$$0 \to \mathrm{Ker}\varphi_m \to Cl_m \overset{\varphi_m}{\to} \mathbb{T}^0_m \to 0$$

Nu volgt uit de gelijkheid $P(Cl_m,t) = P(\mathbb{T}^0_m,t)$ dat de Poincaré reeks voor $\mathrm{Ker}\varphi_m$ nul moet zijn, of met andere woorden, $\mathrm{Ker}\varphi_m = 0$ en dus $Cl_m \cong \mathbb{T}^0_m$. Maar laat ons nu de Krull dimensies berekenen van beide F-algebras :

$$\begin{cases} K\dim Cl_m = \dfrac{m(m+1)}{2} \\ K\dim \mathbb{T}^0_m = 3m-3 \end{cases}$$

want uit het eerste hoofdstuk onthouden we dat $K\dim\mathbb{T}_{m,2} = K\dim\mathbb{T}^0_m + m = 4m-3$. Bijgevolg moet m een oplossing zijn van de kwadratische vergelijking

$$m^2-5m+6=0$$

en aldus $m = 2$ of $m = 3$.
Omgekeerd, nu, zij $m = 2$ of $m = 3$ dan hebben we een epimorfisme $\varphi_m : Cl_m \to \mathbb{T}^0_m$ tussen twee affiene F-algebras van dezelfde Krull dimensie.Nu kunnen we een resultaat van W. Schelter aanwenden dat stelt dat de lengte van alle maximale rijen van priemidealen gelijk zijn voor affiene F-algebras die voldoen aan een veelterm-identiteit, [Sch], om te kunnen besluiten dat φ_2 en φ_3 isomorfismen zijn. De bewering volgt dan uit eigenschap 2.5. ∎

op gelijkaardige wijze kunnen we bepalen wanneer het centrum $R_{m,2}$ van de spoorring van de generieke 2 bij 2 matrixen eindige globale dimensie heeft :

Stelling 2.7. : Het centrum $R_{m,2}$ heeft eindige globale dimensie als en slechts dan als $m \leq 2$.

Bewijs :
Daar $R_{m,2} = R^0_m[Tr(X_1), \ldots, Tr(X_m)]$ volstaat het natuurlijk de stelling te bewijzen voor R^0_m. Nu hebben we gezien dat R^0_m de invarianten-ring is voor de speciale orthogonale groep $SO_3(F)$. Bijgevolg is er een $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-aktie of R^0_m waarvan de invariant-gelaten ring juist de ring van invariabelen is van de volle orthogonale groep $O_3(F)$. Hieruit en uit de beschrijving van $S^{O_3(F)}$ als in stelling 2.1.(1) volgt dat R^0_m een eindig voortgebracht moduul is over de commutatieve veeltermring $F[a_{ij} : 1 \leq i \leq j \leq m]$ via het morfisme :

$$\begin{array}{ccc} F[a_{ij}] & \xrightarrow{\pi} & S^{O_3(F)} \\ & & \downarrow \\ & & R^0_m \end{array}$$

waarbij $\pi(a_{ij}) = (u_i, u_j)$. Alle morfismen zijn gegradeerd indien we elk van de variabelen a_{ij} graad 2 geven. Bijgevolg bestaat er een veelterm $g_m(t) \in \mathbb{Z}[t]$ zodat

$$P(R^0_m, t) = \frac{g_m(t)}{(1-t^2)^{\frac{m(m+1)}{2}}} .$$

Veronderstel nu dat R^0_m eindige globale dimensie heeft dan moet de Poincaré-reeks de natuurlijke vorm hebben

$$P(R^0_m, t) = \frac{1}{(1-t)^\alpha (1-t^2)^\beta}$$

daar elke kommutatieve affiene gegradeerde F-algebra van eindige globale dimensie een veelterm-ring is. De eerste termen in de nachtreeksontwikkeling van deze uitdrukking zijn :

$$1 + \alpha t + \left[\beta + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\right] t^2 + \left[\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{6} + \beta\alpha\right] t^3 + \ldots$$

Anderzijds beschikken we ook over de machtreeksontwikkeling van $P(R^0_m, t)$. Inderdaad,

$$\begin{aligned} P(R^0_m, t) &= 1 + \mathcal{L}_{12}.t^2 + \mathcal{L}_3 t^3 + \ldots \\ &= 1 + \frac{m(m+1)}{2}t^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{6}t^3 + \ldots \end{aligned}$$

en bijgevolg krijgen we dat $\alpha = 0, \beta = \frac{m(m+1)}{2}$ en m moet een oplossing zijn van de vergelijking

$$m(m-1)(m-2) = 0$$

waaruit natuurlijk $m \leq 2$. Omgekeerd nu, als $m = 0$ dan is $R^0_m = F$ en voor $m = 1$ is $R^0_m = F[x]$ en beide zijn natuurlijk regulier. Voor $m = 2$ weten we dat $\mathbb{T}^0_2 \cong Cl_2$ en het centrum van Cl_2 kan men betrekkelijk eenvoudig bepalen : $Z(Cl_2) = F[a_{12}, a_1^2, a_2^2]$ waaruit het gestelde volgt. ∎

In het bewijs van de laatste twee stellingen hebben we aangetoond dat de rationale vorm van de Poincaré-reeks van $\mathbb{T}_{m,2}$ (resp. $R_{m,2}$) nooit van de vorm $\frac{1}{f(t)}$ is voor een veelterm $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ wanneer $m \leq 4$ (resp. $m \leq 3$).

Vooraleer deze sektie te beëidigen willen we evenwel de rationale vorm van deze Poincaré reeksen bepalen. Beide ringen $R_{m,2}$ en $\mathbb{T}_{m,2}$ kunnen ook gegradeerd worden door $\mathbb{N}^{(m)}$ door iedere variabele $x_{ij}(l)$ van de generieke matrix X_l graad $(0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ te geven waar de 1 op plaats 2 staat. De bijhorende Poincaré-reeksen worden dan als volgt gedefiniëerd :

$$\begin{cases} P(R_{m,2}; t_1, \ldots, t_m) = \sum\limits_{(i_1, \ldots, i_m)} \dim_F\left((R_{m,2})_{(i_1, \ldots, i_m)}\right).t_1^{i_1} \ldots t_m^{i_m} \\ P(\mathbb{T}_{m,2}; t_1, \ldots, t_m) = \sum\limits_{(i_1, \ldots, i_m)} \dim_F\left((\mathbb{T}_{m,2})_{(i_1, \ldots, i_m)}\right).t_1^{i_1} \ldots t_m^{i_m} \end{cases}$$

Laat ons beginnen met de rationale uitdrukking voor $P(R_{m,2}; t_1, \ldots, t_m)$. Daar $R_{m,2} \cong R^0_m\left[Tr(X_1), \ldots, Tr(X_m)\right]$ hebben we

$$P(R_{m,2}; t_1, \ldots, t_m) = \frac{1}{\prod_{i=1}^m (1 - t_i)}.P(R^0_m; t_1, \ldots, t_m)$$

Verder werden de rationale uitdrukkingen van de Poincaré reeksen van invarianten ringen van speciale orthogonale groepen ruim zestig jaar geleden bepaald door H. Weyl [We, p. 17] en I. Schur [Sc]. In het speciale geval van $SO_3(F)$ krijgen we :

$$P(R^0_m; t_1, \ldots, t_m) = \frac{\left[1 + t^{2m-3}, \ldots, t^{m-3} + t^m; t^{m-2}, t^{m-1}\right]}{\prod_{i<k}^m (t_k - t_i).\prod_{i\leq k}^m (1 - t_i t_k)}$$

waarbij de uitdrukking in de teller staat voor de determinant van devolgende m bij m matrix :

$$\begin{bmatrix} 1+t_1^{2m-3} & 1+t_2^{2m-3} & \cdots & 1+t_m^{2m-3} \\ t_1+t_1^{2m-4} & t_2+t_2^{2m-4} & \cdots & t_m+t_m^{2m-4} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_1^{m-3}+t_1^m & t_2^{m-3}+t_2^m & \cdots & t_m^{m-3}+t_m^m \\ t_1^{m-2} & t_1^{m-2} & \cdots & t_m^{m-2} \\ t_1^{m-1} & t_2^{m-1} & \cdots & t_m^{m-1} \end{bmatrix}$$

Bijgevolg hebben we hetvolgende resultaat bewezen :

Stelling 2.8. : De Poincaré-reeks van het centrum $R_{m,2}$ van de spoorring van m generieke 2 bij 2 matrixen heeft devolgende rationele vorm :

$$P(R_{m,2};t_1,\ldots,t_m) = \frac{[1+t^{2m-3},\ldots,t^{m-3}+t^m;t^{m-2},t^{m-1}]}{\prod_i^m(1-t_i).\prod_{i<k}^m(t_k-t_i).\prod_{i\leq k}^m(1-t_it_k)}$$

Na vereenvoudiging van deze uitdrukking, waarbij alle termen $t_k - t_i$ in de noemer verdwijnen, kan men de rationale vorm voor de Poincaré reeks in één variabele verkrijgen door alle t_i gelijk te stellen aan t.
Hierboven hebben we reeds opgemerkt dat de lineaire afbeelding

$$Tr(-X_{m+1}) : \mathbb{T}_{m,2} \longrightarrow R_{m+1,2}$$

een inclusie is waarvan het beeld juist bestaat uit die elementen van $R_{m+1,2}$ die homogeen zijn van graad één in de matrix-variabele X_{m+1}, of met andere woorden, het beeld is de ruimte

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_m)} (R_{m+1,2})(i_1,\ldots,i_m,1)$$

Wanneer we deze informatie nu vertalen in termen van Poincaré-reeksen dan verkrijgen we dat $P(\mathbb{T}_{m,2};t_1,\ldots,t_m)$ de koëfficiënt is van t_{m+1} in de machtreeksontwikkeling van $P(R_{m+1,2};t_1,\ldots,t_{m+1})$ of equivalent hiermede :

$$P(\mathbb{T}_{m,2};t_1,\ldots,t_m) = \frac{\partial}{\partial t_{m+1}} P(R_{m+1,2};t_1,\ldots,t_{m+1})\Big|_{t_{m+1}=0}$$

Of, gebruikmakend van stelling 2.8. waarin we natuurlijk m door $m+1$ dienen te vervangen krijgen we dat $P(\mathbb{T}_{m,2};t_1,\ldots,t_m)$ gelijk is aan

$$\frac{\partial}{\partial t_{m+1}} \frac{[1+t^{2m-1},\ldots,t^{m-2}+t^{m+1};t^{m-1},t^m]}{\prod_{j=1}^{m+1}(1-t_j)\prod^{m+1;i<k}(t_k-t_i)\prod_{i\leq k}^{m+1}(1-t_it_k)}\Bigg|_{t_{m+1}=0}$$

Als we de teller van deze uitdrukking berekenen dan bekomen we :

$$\prod_{j=1}^{m}(1-t_j).\prod_{i<k}^{m}(t_k-t_i).(-1)^m.\prod_{j=1}^{m}t_j.\prod_{i\leq k}^{m}(1-t_it_k).M_1-$$
$$\{-\prod_{j=1}^{m}(1-t_j).\prod_{i<k}^{m}(t_k-t_i).(-1)^m.\prod_{j=1}^{m}t_j.\prod_{i\leq h}^{m}(1-t_it_k)$$
$$+\prod_{j=1}^{m}(1-t_j).\prod_{i<k}^{m}(t_k-t_i).(\sum_{j=1}^{m}(-1)^{m-1}t_1\ldots\check{t}_j\ldots t_m).\prod_{i\leq k}^{m}(1-t_it_k)$$
$$+\prod_{j=1}^{m}(1-t_j).\prod^{m_{i,k}}(t_k-t_i).(-1)^m.\prod_{j=1}^{m}t_j.\prod_{i\leq k}^{m}(1-t_it_k).(\sum_{j=1}^{m}t_j)\}.M_2$$

Waarbij M_1 (resp M_2) de determinant is van de $m+1$ bij $m+1$-matrix bestaande uit de eerste m kolommen van de matrix $[1+t^{2m-1},\ldots,t^{m-2}+t^{m+1};t^{m-1},t_m]$ en als $m+1$ de kolom $(o,1,0,\ldots,0)^{\tau}$ (resp. $(1,0,\ldots,o)^{\tau}$). Als we met e_i de $i$de elementaire symmetrische funktie aanduiden dan kunnen we de teller als volgt beschrijven :

$$\prod_{j=1}^{m}(1-t_j)\prod_{i<k}^{m}(t_k-t_i).\prod_{i\leq k}^{m}(1-t_it_k).[e_m.\Delta_1-(e_m+e_{m-1}+e_1.e_m).\Delta_2]$$

waarbij

$$\Delta_1=\det\begin{bmatrix} 1+t^{2m-1} & \ldots & t_m+t_m^{2m-1} \\ t_1^2+t_1^{2m-3} & \ldots & t^{2m-3} \\ t_1^3+t_1^{2m-4} & \ldots & t_m^3+t^{2m-4} \\ \vdots & & \\ t_1^{m-2}+t_1^{m+1} & \ldots & t_m^{m-2}+t_m^{m+1} \\ t_1^{m-1} & & t_m^{m-1} \\ t_1^m & & t_m^m \end{bmatrix}$$

$$\Delta_2=\det\begin{bmatrix} t_1+t_1^{2m-2} & \ldots & t_m+t_m^{2m-2} \\ t_2^2+t_1^{2m-3} & \ldots & t_m^2 t_m^{2m-3} \\ \vdots & & \vdots \\ t_1^{m-2}+t_1^{m+1} & & t_m^{m-2}+t_m^{t+1} \\ t_m^{m-1} & t_1^{m-1} & \\ t_1^m & & t_1^m \end{bmatrix}$$

Bijgevolg hebben we devolgende stelling bewezen.

~~**Stelling 2.9. : De Poincaré-reeks van de spoorring van m generieke 2 bij 2 matrixen**~~ matrixen heeft de volgende rationale vorm

$$P(\mathbb{T}_{m,2};t_1,\ldots.t_m)=\frac{e_m.\Delta_1-(e_m+e_1e_m+e_{m-1}).\Delta_2}{e_m^2.\prod_{j=1}^{m}(1-t_j).\prod_{i<k}^{m}(t_k-t_i).\prod_{i\leq k}^{m}(1-t_it_k)}$$

en wederom kunnen we hieruit $P(\mathbb{T}_{m,2};t)$ bekomen door eerst te vereenvoudigen en daarna alle t_i gelijk te stellen aan t.

In het speciale geval dat $m = 4$ verkrijgen we

$$P(\mathbb{T}_{4,2}; t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{1 - t_1 t_2 t_3 t_4}{\prod_{i=1}^{4}(1 - t_i)^2 \prod_{i<j}^{4}(1 - t_i t_j)}$$

Tevens kunnen we deze stelling gebruiken om de funktionaalvergelijking voor de Poincaré reeks te bewijzen :

Stelling 2.10. : (Functionaalvergelijking) De Poincaré-reeks van de spoorring van n generieke 2 bij 2 matrixen voldoet aan de functionaalvergelijking

$$P(\mathbb{T}_{m,2}; \frac{1}{t}) = -t^{4m}.P(\mathbb{T}_{m,2}; t)$$

Bewijs :
Een eenvoudige verificatie leert ons dat

$$\begin{aligned}
e_m^{2m-1}.\Delta_1(\frac{1}{t_1}, \ldots, \frac{1}{t_m}) &= -\Delta_1(t_1, \ldots, t_m) \\
e_m^{2m-1}.\Delta_2(\frac{1}{t_1}, \ldots, \frac{1}{t_m}) &= -\Delta_2(t_1, \ldots, t_m) \\
e_m^2(e_m + e, e_m + e_{m-1})(\frac{1}{t_1}, \ldots, \frac{1}{t_m}) &= e_m + e_1 e_m + e_{m-1}
\end{aligned}$$

Wanneer we deze informatie substitueren in de rationale uitdrukking voor de Poincaré reeks, dan bekomen we

$$\begin{aligned}
&P(\mathbb{T}_{m,2}; \frac{1}{t_1}, \ldots, \frac{1}{t_m}) = \\
&\frac{-e_m^{-2-1}.(e_m \Delta_1 - (e_m + e_1 e_m + e_{m-1}).\Delta_2)}{e_m^{-2m-5}.(\prod_{j=1}^{m}(t_j - 1)\prod_{i<k}^{m}(t_i - t_k).\prod_{i\leq k}^{m}(t_i t_k - 1))} = \\
&- e_m^4.(-1)^{m^2+m}.P(\mathbb{T}_{m,2}; t_1, \ldots, t_m)
\end{aligned}$$

Ten slotte stellen we alle t_i gelijk aan t en bekomen de funktioneelvergelijking. ∎

Hoewel stelling 2.9. een gesloten vorm geeft voor voor de Poincaré reeks van de spoorring van m generieke 2 bij 2 matrixen is dit resultaat meer van theoretisch dan van praktisch belang. In de praktijk is het namelijk uitermate moeilijk deze rationale vorm expliciet uit te rekenen. Tot besluit van deze sektie wil ik enkele suggesties uitwerken van C. Procesi teneinde een kombinatorische methode voor de beschrijving van de rationale vorm van de Poincaré reeks te hebben.
Laat ons aanvangen met het opfrissen van de definitie van de homogene koördinaatring van de Grassmann variëteit van alle twee-dimensionale deelruimten van een m-dimensionale ruimte : $Grass(2, m)$. Voor bewijzen en meer details verwijzen we de lezer naar [HP], [Kl] of [GH].

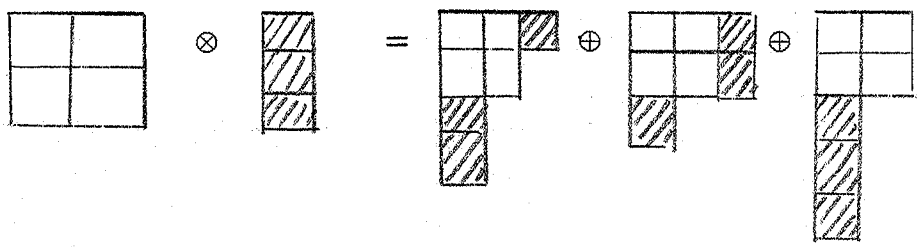
Zij $Z = (Z_{ij})_{i,j}$ een 2 bij m matrix bestaande uit variabelen. De Grassmann-algebra $Grass(2, m)$ kan dan opgevat worden als de F-deelalgebra van $F[Z] = F[Z_{1j}, Z_{2j} : 1 \leq j \leq m]$ voortgebracht door alle 2 bij 2 minoren van de matrix Z.
De Grassmann-variëteit kan ingebed worden in een projectieve ruimte door gebruikte maken van de zogenaamde Plücker=koördinaten λ_{ij} voor alle alle $1 \leq i < j \leq m$ waarbij

$$\lambda_{ij} = \det \begin{pmatrix} Z_{1i} & Z_{ij} \\ Z_{2i} & Z_{2j} \end{pmatrix}$$

Het is reeds lang bekend, zie bijvoorbeeld [D2; Th. 2.1.] voor een moderne behandeling, dat er een natuurlijke één-één korrespondentie bestaat tussen een basis voor $Grass(2, m)$ als F-vektorruimte en Young schemas in standaardvorm $\sigma = 2^b$ voor alle $b \in \mathbb{N}$. Deze korrespondentie wordt gegeven door aan zulk Young schema het produkt te associëren van de b rijen i j die elk geïnterpreteerd worden als de Plücker-koördinaat λ_{ij}.
Bijgevolg is de machtreeksontwikkeling voor de Poincaré reeks van de Grassmann-algebra :

$$P(Grass(2, m), t) = \sum_{b=0}^{\infty} \mathcal{L}_{2^b}.t^{2b}$$

Nu kan man gebruikmaken van de bekende Pieri-formule, zie bvb. [S3], die een dekompositie geeft in irreduciebele representaties voor het tensorprodukt van een reptresentatie van $GL_m(F)$ bepaald door een Young schema σ en een kolom. Ruwweg gesproken komt dir erop neer de cellen van de kolom te verdelen over de rijen van σ zodat men nog een Young schema heeft. Bijvoorbeeld :



Hierdoor bekomen we :

$$\sum_{(a,b,c)} \mathcal{L}_{3^a 2^b 1^c} = \frac{1}{(1-t)^m} \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}_{2^i}.t^{2i}$$

en wanneer we dit kombineren met reeds eerder bewezen resultaten verkrijgen we :

$$P(\mathbb{T}_{m,2}; t) = \frac{1}{(1-t)^{2m}}.P(Grass(2, m), t)$$

en bijgevolg zal het volstaan de poincaré-reeks voor de Grassmann-algebra te beschrijven. De algebra $Grass(2, m)$ kan men realizeren als een invarianten-ring op de nu volgende wijze. Laat de groep $GL_2(F)$ werken op de veeltermring $F[Z]$ door voor een element $\alpha \in GL_2(F)$ de variabele Z_{ij} te zenden naar het (i,j)-de matrix element van $\alpha.Z$. Dan is

$$Grass(2,m) = F[Z]^{Gl_2(F)}$$

De beroemde Hochster-Roberts stelling, [HR], stelt dat de invarianten-ring van een veeltermring onder aktie van een reduktive groep steeds een Cohen-Macaulay domain is. Hiermee bedoelen we dat de invariantenring een gegradeerd vrij moduul is van eindige rang over een veelterm deelring.
In het speciale geval van de Grassmann-algebra kan men deze deelring en een basis expliciet aangeven. Zij H_m de verzameling van alle $\frac{m(m-1)}{2}$ Plücker koördinaten λ_{ij} voor $1 \leq i < j \leq m$. We kunnen op H_m een partiële ordening definiëren als volgt :

$$\lambda_{ij} \leq \lambda_{kl} \qquad \text{asa} \qquad i \leq k \qquad \text{en} \qquad \text{en} \qquad j \leq l$$

Laat ons, bij wijze van voorbeeld, het geval $m = 5$ behandelen. Het Hasse diagram van H_5 is

$$\begin{array}{lcccc}
\text{rang } 7: & \lambda_{45} & & & \\
\text{rang } 6: & & \lambda_{35} & & \\
\text{rang } 5: & \lambda_{34} & & \lambda_{25} & \\
\text{rang } 4: & & \lambda_{24} & & \lambda_{15} \\
\text{rang } 3: & \lambda_{23} & & \lambda_{14} & \\
\text{rang } 2: & & \lambda_{13} & & \\
\text{rang } 1: & \lambda_{12} & & &
\end{array}$$

In het algemaan kan men op H_m een rang-funktie definiëren met maximale rang $2m-3$. Uit Th. 8.1. en Th. 11.1. van [D2] kan men bewijzen dat $Grass_{(2,m)}$ een gegradeerd vrij moduul is van eindige rang over de veelterm deelring

$$\mathcal{F}_m = F[\Theta_1, \ldots, \Theta_{2m-3}]$$

waarbij

$$\Theta_i = \sum_{rang \lambda_{jk} = i} \lambda_{jk}$$

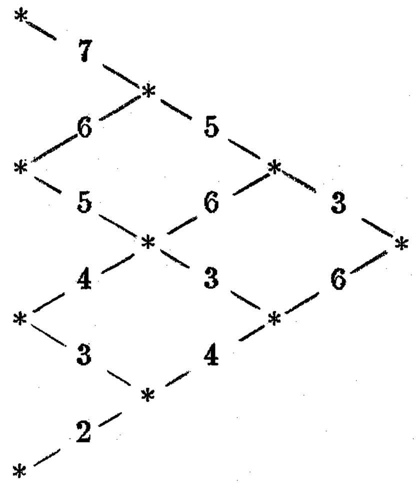
Verder is het mogelijk om aan ieder lijnstuk $\lambda_{ij} < \lambda_{kl}$ een natuurlijk getal te associëren $\mu(\lambda_{ij}, \lambda_{kl})$ zodanig dat er voor ieder interval $[\lambda_{ij}, \lambda_{kl}]$ één en slechts één weg gevonden kan worden :

$$\lambda_{ij} = \lambda_{i_0 j_0} < \lambda_{i_1 j_1} < \ldots < \lambda_{i_n j_n} = \lambda_{kl}$$

zodat de getallen van de lijnstukken stijgend zijn. Of m.a.w.

$$\mu(\lambda_{i_0 j_0}, \lambda_{i_1 j_1}) \leq \mu(\lambda_{i_1 j_1} \leq \mu(\lambda_{i_1 j_1}, \lambda_{i_2 j_2}) \leq \ldots \leq \mu(\lambda_{i_{m-1} j_{n-1}}, \lambda_{i_n j_n})$$

Hoe bereikt men dit resultaat ? Wel, aan een lijnstuk in de n-de hoofddiagonaal associeert men het getal $2n$ en en aan een lijnstuk in de n-de nevendiagonaal het getal $2n+1$. In ons voorbeeld, $m = 5$, krijgen we :



Nu kan men een één korrespondentie opzetten tussen de maximale ketens in H_m en een stel basisvektoren voor $Grass(2,m)$ over $\mathcal{F}_m$ door gebruik te maken van algemene theorieën ontwikkeld door A. Björner [Bj] en A. Garsia [Ga]. Met een maximale keten

$$\lambda_{12} = \lambda_{i_0 j_0} < \lambda_{i_1 j_1} < \ldots < \lambda_{i_{2m-4} j_{2m-4}} = \lambda_{m-1m}$$

associëren we hetvolgende element in $Grass(2,m)$

$$\prod_{k \in S} \lambda_{i_k j_k}$$

waarbij S de deelverzameling is van $\{0,1,\ldots,2m-4\}$ die bestaat uit juist die indexen k zodanig dat

$$\mu(\lambda_{i_{k-1} j_{k-1}}) > \mu(\lambda_{i_k j_k}, \lambda_{i_{k+1} j_{k+1}})$$

In ons voorbeeld, $m = 5$, krijgen we hetvolgende

ketens	**elementen**
$2-3-4-5-6-7$	1
$2-3-4-6-5-7$	λ_{25}
$2-4-3-5-6-7$	λ_{14}
$2-4-3-6-5-7$	$\lambda_{14}.\lambda_{25}$
$2-4-6-3-5-7$	λ_{15}

Uit deze informatie is het nu eenvoudig is het nu eemvoudig de Poincaré reeks voor $Grass(2,5)$ en dus voor $\mathbb{T}_{5,2}$ te bepalen :

$$P(Grass(2.5),t) = \frac{1+3t^2+t^4}{(1-t^2)^7}$$

$$P(\mathbb{T}_{5,2};t) = \frac{1+3t^2+t^4}{(1-t)^{10}(1-t^2)^7}$$

In het algemeen krijgen we hetvolgende resultaat :

Stelling 2.11. : De Poincaré-reeks van de spoorring van m generieke 2 bij 2 matrixen heeft de rationale vorm :

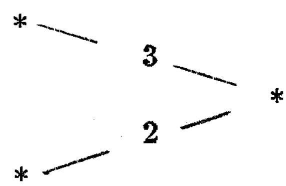
$$P(\mathbb{T}_{m,2},t) = \frac{g_m(t^2)}{(1-t)^{2m}.(1-t^2)^{2m-3}}$$

waarbij $g_m(t^2)$ een veelterm is in $\mathbb{N}[t^2]$ zodat de koëfficiënt van t^{2j} het aantal maximale ketens in
H_m is waarin juist je hoekpunten voorkomen waarin de getallen van de lijnstukken daalt.

Laat ons nu $P(\mathbb{T}_{m,2};t)$ berekenen voor kleine waarden van m

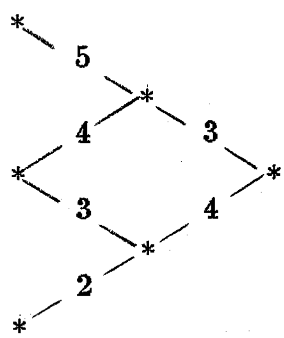
$\underline{m=2}$: In dit geval bestaat het Hasse diagram maar uit één punt en bijgevolg is $P(\mathbb{T}_{2,2};t) = \frac{1}{(1-t)^4(1-t^2)}$

$\underline{m=3}$: Nu is het Hasse diagram : H_3 :



De enige maximale keten is stijgend en dus $P(\mathbb{T}_{3,2};t) = \frac{1}{(1-t)^6(1-t^2)^3}$

$\underline{m=4}$: Het Hasse diagram heeft de vorm



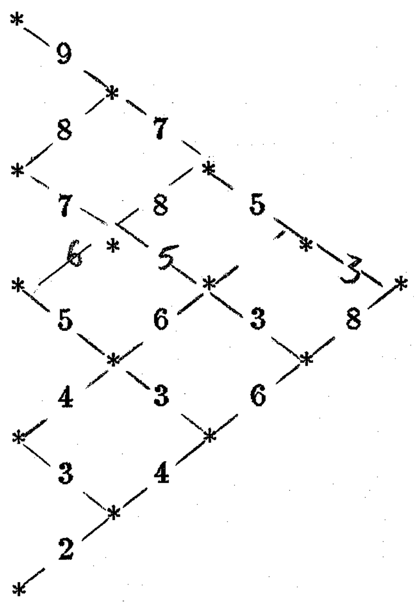
Als maximale ketens krijgen we

2 3 4 5	geen knikpunt
2 4 3 5	één knikpunt

En bijgevolg krijgen we de Poincaré reeks :

$$P(\mathbb{T}_{4,2};t)\frac{1+t^2}{(1-t)^8(1-t^2)^5}$$

$\underline{m=6}$: Het Hasse diagram H_6 is

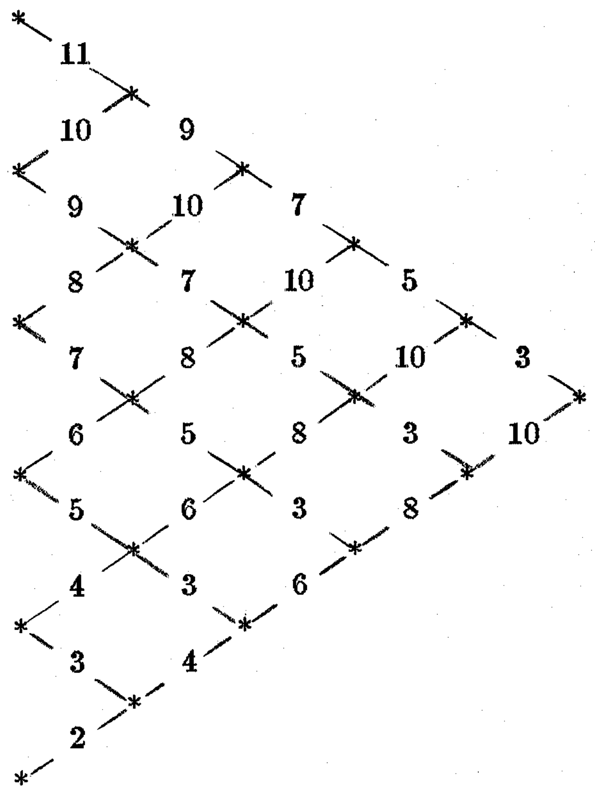


maximale ketens	knikpunten
2 3 4 5 6 7 8 9	0
2 3 4 5 6 8 7 9	1
2 3 4 6 5 7 8 9	1
2 3 4 6 5 8 7 9	2
2 3 4 6 8 5 7 9	1
2 4 3 5 6 7 8 9	1
2 4 3 5 6 7 8 9	2
2 4 3 6 5 7 8 9	2
2 4 3 6 5 8 7 9	3
2 4 3 6 8 5 7 9	2
2 4 6 3 5 7 8 9	1
2 4 6 3 5 8 7 9	2
2 4 6 3 8 5 7 9	2
2 4 6 8 3 5 7 9	1

en dus krijgen we voor de Poincaré reeks

$$P(\mathbb{T}_{6,2};t)=\frac{1+6t^2+6t^4+t^6}{(1-t)^{12}.(1-t^2)^9}$$

$\underline{m=7}$: Het Hasse diagram is



In dit Hasse-diagram hebben we reeds 42 maximale ketens waarvan er 10 één knikpunt hebben, 20 twee en 10 drie. Bijgevolg krijgen we als Poincaré reeks

$$P(\mathbb{T}_{7,2};t) = \frac{1+10t^2+20t^2+20t^4+10t^6+t^8}{(1-t)^{14}.(1.t^2)^{11}}$$

3. Driedimensionale representaties.

Vooraleer we kunnen bepalen wanneer de spoorring van m generieke 3 bij 3 matrixen eindige globale dimensie heeft dienen we de beschrijving van Formanek [Fo] van de machtreeksontwikkeling van $R_{m,m}$ en $\mathbb{T}_{m,m}$ in een multigradatie teherhalen.
We hebben vroeger (1.3.) opgemerkt dat $R_{m,n}$ (respectievelijk $\mathbb{T}_{m,n}$) de ring van invarianten is voor een aktie van de algemene lineaire groep $GL_n(F)$ op $P_{m,n}$ (respectievelijk $M_n(P_{m,n})$. Gebruikmakend van dit feit heeft Formanek gebruik gemaakt van de algemene theorie die zowat zestig jaar geleden ontwikkeld werd door H. Weyl en I. Schur om een formule af te leiden voor

$$P(R_{m,n}; t_1, \ldots, t_m)$$
$$P(\mathbb{T}_{m,n}; t_1, \ldots, t_m)$$

van het centrum $R_{m,n}$ van de spoorring van m generieke n bij n matrixen $\mathbb{T}_{m,n}$ in de multigradatie die iedere variabele $x_{ij}(l) \in P_{m,n}$ de graad $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ met 1 op plaats l geeft.
Laat ons eerst enkele definities en resultaten herhalen over de ring van symmetrische funkties in n variabelen. Een machtenreeks van lengte n is een reeks

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$$

bestaande uit elementen van $\mathbb{N}$. De graad van α wordt dan gegeven door

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$

Een verdeling van lengte $\leq n$ is een machtenreeks $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ zodat

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$$

Aan iedere verdeling $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ van lengte $\leq n$ kunnen we een element in $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ associëren :

$$a_\lambda = a_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\pi \in S_n} sq(\pi).x_{\pi(1)}^{\lambda_1} \ldots x_{\pi(n)}^{\lambda_n}$$

waarbij S_n als altijd staat voor de groep van alle permutaties op n elementen. In het speciale geval

$$\delta = (n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$$

krijgen we het element

$$a_\delta = \prod_{i<j}(x_i \ldots x_j)$$

In de veeltermring $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ kan men aantonen dat $a_{\delta+\lambda}$ deelbaar is door a_δ voor iedere verdeling λ van lengte $\leq n$ en waarbij $\delta + \lambda = (\lambda_1 + n - 1, \lambda_2 + n - 2, \ldots, \lambda_{n-1} + 1, \lambda_n)$. Het kwotient $a_{\delta+\lambda}/a_\delta$ is invariant onder de voor de hand liggende aktie van de groep S_n op $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$, d.i. deze die ontstaat door de variabelen te permuteren, en wordt de Schurfunktie geheten horend bij de verdeling λ van lengte $\leq n$ en wordt genoteerd door s_λ. De verzameling

$$\{s_\lambda|\lambda \quad \text{een verdeling van lengte } \leq n\}$$

vormt een basis als $\mathbb{Z}$-moduul voor Λ_n, de ring van alle symmetrische funkties in n variabelen, of m.a.w. de invariantenring van de natuurlijke aktie van S_n op $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$.
Men kan van de verzameling van alle Schuz-funkties zelfs een orthonormale basis maken door een inprodukt $< -,- >$ te definiëren op Λ_n en op de uitbreiding

$$\Gamma_n = \mathbb{Z}[x_1,x_1^{-1},x_2,x_2^{-1},\dots,x_n,x_n^{-1}]^{S_n}$$

op de volgende wijze. Zij

$$(-)^* : \mathbb{Z}[x_1,x_1^{-1},\dots,x_n,x_n^{-1}] \to \mathbb{Z}[x_1,x_1^{-1},\dots,x_n,x_n^{-1}]$$

de involutie zijn die gegeven wordt door $(x_1)^* = x_i^{-1}$.Laat ons nu de lineaire funktionaal definiëren

$$\int : \mathbb{Z}[x_1,x_1^{-1},\dots,x_n,x_n^{-1}] \to \mathbb{Z}$$

door de regels $\int 1 = 1$ en $\int_1^{\alpha_1},\dots,x_n^{\alpha_n} = 0$ als niet alle $\alpha_i = 0$. Nu kan men het inprodukt voor alle koppels a,b in Γ_n definiëren door

$$< a,b >= \frac{1}{n!}\int a.(b)^*.a_\delta(a_\delta)^*$$

Dit is een meer algebraïsch georiënteerde vertaling van de methode ontwikkeld door H. Weyl om een inprodukt te definiëren op modulen door te integreren over de unitaire complexe groep $U_n(\mathbb{C})$ die dezelfde moduul struktuur heeft als $GL_n(\mathbb{C})$. Dit inprodukt definieert hij dan als een bepaalde integraal van de vorm

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \sum_\alpha a_\alpha e^{2\pi i(\alpha_1 Z_1+\dots+\alpha_n Z_n)} dZ_1 \dots dZ_n$$

De bovenstaande definitie voldoet natuurlijk aan

$$\int X_1^{\alpha_1}\dots X_n^{\alpha_n} = \int_0^1 \dots \int_0^1 e^{2\pi i(\alpha_1 Z_1+\dots+\alpha_n Z_n)}.dZ_1\dots dZ_n$$

Laat ons nu het eindig dimensionaal $GL_n(F)\times GL_m(F)$-moduul $M_n(F)\otimes U_m$ beschouwen waarbij U_m het standaard $GL_m(F)$-moduul is van dimensie m en de aktie van de algemene lineaire groep $GL_n(F)$ op $M_n(F)$ wordt gegeven door konjugatie.

Met deze aktie is het duidelijk dat $M_n(F) \otimes U_m$ polynomiaal is als $GL_m(F)$-moduul en rationaal als $GL_n(F)$-moduul. Deze aktie van $GL_n(F) \times GL_m(F)$ kan op voor de hand liggende wijze worden uitgebreid tot de symmetrische algebra van $M_n(F) \otimes U_m$ die gelijk is aan

$$P_{m,n} = F[x_{ij}(l) : 1 \leq i,j \leq n; 1 \leq l \leq m]$$

Als we nu, als voorheen, alle variabelen $x_{ij}(l)$ graad één geven, dan wordt $P_{m,n}$ een positief gegradeerde F-algebra

$$P_{m,n} = F \oplus P_1 \oplus P_2 \oplus \dots$$

waarbij de homogene komponent van graad i, P_i, een eindig dimensionaal $GL_n(F) \times GL_m(F)$-moduul is met een rationale aktie van $GL_n(F)$ en een polynomiale aktie van $GL_m(F)$.
Bijgevolg kunnen we de Poincaré reeks van $P_{m,n}$ als $GL_n(F) \times GL_m(F)$-module beschrijven als

$$P(P_{m,n}; x_i, x_i^{-1}, t_j) = 1 + X(P_1) + X(P_2) + \dots$$

waarbij X het natuurlijk isomorphisme is

$$X : K_0(\mathrm{Mod}(n,m)) \longrightarrow \mathbb{Z}[x_1, x_1^{-1}, \dots x_n, x_n^{-1}; t_1, \dots, t_m]^{S_n \times S_m}$$

tussem de Grothendieckring van alle eindig dimensionale $GL_n(F) \times GL_m(F)$-modulen die rationaal zijn in de eerste faktor en polynomiaal in de tweede en de ring van symmetrische funkties $\mathbb{Z}[x_i, x_n^{-1}; t_j]$. Bijgevolg is $P(P_{m,n})$ een formule machtreeks over $\Gamma_n \otimes \Lambda_m$.
Verder kan men vrij eenvoudig nagaan dat $X(P_i)$ de i-de volledig symmetrisch funkties is op de verzameling "variabelen" :

$$\{x_i x_j^{-1}.t_k | 1 \leq i,j \leq n; 1 \leq k \leq m\}$$

Hieronder bedoelen we de koëfficiënt van t^i in de machtreeksontwikkeling naar t van de rationale uitdrukking :

$$\frac{1}{\prod_{i,j,k}(1 - x_i.x_j^{-1}.t_k)}$$

Nu heeft men de fundamentele gelijkheid

$$\frac{1}{\prod_{i,j,k}(1 - x_i x_j^{-1} i_k)} = \sum_\lambda s_\lambda(x_i.x_j^{-1}).s_\lambda(t_k)$$

waarbij de som dient genomen te worden over alle verdelingen λ van lengte $\leq \min(n,m)$, en waarbij we met $s_\lambda(x_i x_j^{-1})$ het beeld bedoelen van $s_\lambda(Z_{ij} : i \leq i,j \leq n)$ onder het homomorphisme :

$$\mathbb{Z}[Z_{ij} : 1 \leq i,j \leq n] \to \mathbb{Z}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}]$$

bepaald door de variabele Z_{ij} te sturen naar $x_i x_j^{-1}$. Bijgevolg krijgen we als Poincaré-reeksen :

$$P(P_{m,n}) = \sum_{\lambda} a_{\lambda}(x_i.x_j^{-1}).s_{\lambda}(t_k)$$

$$X(P_i) = \sum_{|\lambda|=i} s_{\lambda}(x_i.x_j^{-1}).s_{\lambda}(t_k)$$

waarbij alle verdelingen λ een lente $\leq \min(n,m)$ hebben.
Stel nu dat we een $GL_n(F) \times GL_m(F)$-moduul hebben van de vorm $N \otimes M$ waarbij N een rationaal $GL_n(F)$-moduul is en M een polynomiaal $GL_m(F)$-moduul, dan leert ons de theorie van H. Weyl en I. Schur :

$$\begin{aligned} X\left((N \otimes M)^{GL_n(F)}\right) &= X(N^{GL_n(F)} \otimes M) \\ &= < X_n(N), 1 > .X_m(M) \end{aligned}$$

waarin natuurlijk X_n staat voor het natuurlijk isomorfisme tussen de Grothendieck ring van alle eindig dimensionale rationale $GL_n(F)$-modules en de ring

$$\Gamma_n = \mathbb{Z}[x_1, x_1^{-1}, \ldots, x_n, x_n^{-1}]^{S_n}$$

en X_m is het natuurlijk isomorphisme tussen de Grothendieck ring van alle eindig dimensionale polynomiale $GL_m(F)$-modules en de ring

$$\Lambda_m = \mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_m]^{S_m}$$

en het inprodukt $< -, - >$ tenslotte is genomen in de ring Γ_n.
Laat ons deze algemene theorie nu toepassen op $R_{m,n}$, het centrum van de spoorring van M generieke n bij n matrixen. Zoals vroeger aangtoond is $R_{m,n}$ de invariantenring voor de natuurlijke aktie door toevoeging van $GL_n(F)$ op de symmetrische algebra van de eindig dimansionale vektorruimte :

$$M_n(F) \otimes U_m$$

waarbij U_m het standaard m-dimensionaal $GL_m(F)$-moduul is.
Bijgevolg kunnen we de machtreeksontwikkeling van de Poincaréreeks van $R_{m,n}$ in de multigradate (d.i. in de variabelen $t_1, \ldots, t_m$) uitwerken :

Stelling 3.1. : (Formanek) [Fo,Th. 12]

De machtreeksontwikkeling voor de Poincaré-reeks van $R_{m,n}$ in multigradatie is :

$$P(R_{m,n}; t_1, \ldots, t_m) = \sum_{\lambda} < s_{\lambda}(x_i x_j^{-1}), 1 > .s_{\lambda}(t_l)$$

waarbij de som dienst genomen te worden over alle verdelingen van lengte $\leq \min(n,m)$.

Teneinde een analoog resultaat te verkrijgen voor de spoorring van m generieke n bij n matrixen dienen we het verschil te onderzoeken tussen de $GL_n(F)$-aktie op de veeltermring $P_{m,n}$ (die we in I.3. met α_p noteerden) en deze op de matrix-algebra $M_n(P_{m,n})$ (genoteerd met β_p). Als gegradeerde F-algebras kan men beide ringen ontbinden in de homogene komponenten (voor de gradatie naar totale graad) :

$$P_{m,n} = F \oplus P_1 \oplus P_2 \oplus \ldots$$
$$M_n(P_{m,n}) = F \oplus (M_n(F) \otimes P_1) \oplus (M_n(F) \otimes P_2) \oplus \ldots$$

waarbij de aktie van $GL_n(F)$ op P_i gegeven werd door

$$a \vdash \alpha_P(a)$$

en deze op $M_n(F) \otimes P_i$ door

$$b \otimes a \vdash \beta_p(b \otimes a) = (P^{-1}bP) \otimes \alpha_P(a)$$

aldus verkrijgen we voor het beeld onder X in de Grothendieck ring van alle eindig dimensionale $GL_n(F) \times GL_m(F)$-modulen, rationaal in de eerste faktor en polynomiaal in de tweede :

$$\begin{aligned} X(M_n(F) \otimes P_i) &= (\Sigma x_i x_j^{-1}).X(P_i) \\ &= \big(s_{(1)}(x_i x_j^{-1})\big).X(P_i) \end{aligned}$$

en bijgevolg kunnen we de Poincaré-reeks van de spoorring $\mathbb{T}_{m,n}$ verkrijgen uit deze van $R_{m,n}$ indien we de termen $< s_\lambda(x_i x_j^{-1}), 1 >$ vervangen door

$$< s_{(1)}(x_i x_j^{-1}).s_\lambda(x_i x_j^{-1}), 1 > = < s_\lambda(x_i x_j^{-1}), s_{(1)}(x_i x_j^{-1}) >$$

Aldus verkrijgen we :

Stelling 3.2. : (Formanek) [Fo. Th. 12]

De machtreeksontwikkeling voor de Poincaré -reeks van $\mathbb{T}_{m,n}$ in multigradatie is :

$$P(\mathbb{T}_{m,n}; t_1, \ldots, t_m) = \sum_\lambda < s_\lambda(x_i x_j^{-1}), s_{(1)}(x_i x_j^{-1}) > .s_\lambda(t_l)$$

waarbij de som dient genomen te worden over alle verdelingen λ van lengte $\leq \min(n, m)$.

Door de beroemde stelling van Molien-Weyl, [We], kunnen we natuurlijk equivalente formules bekomen voor $P(R_{m,n}; t_1, \ldots, t_m)$ en $P(\mathbb{T}_{m,n}; t_1, \ldots, t_m)$ als integralen over de complexe unitaire group $U_n(\mathbb{C})$ met genormalizeerde Haar-maat μ. We krijgen dan :

$$P(R_{m,n}; t_1, \ldots, t_m) = \int_{U_n(\mathbb{C})} \Big(\prod_{i=1}^{m} \det(1 - t_i.\alpha_p)^{-1}\Big).d\mu(P)$$

$$P(\mathbb{T}_{m,n}; t_1, \ldots, t_m) = \int_{U_n(\mathbb{C})} Tr(\alpha_P).\Big(\prod_{i=1}^{m} \det(1 - t_i.\alpha_P)^{-1}\Big).d\mu(P)$$

waarbij we voor iedere unitaire matrix $P \in U_n(\mathbb{C})$ met α_P de unitaire matrix in $U_{n^2}(\mathbb{C})$ noteren die de aktie van P door toevoeging geeft op $M_n(\mathbb{C})$.
Verder kunnen we als in de vorige sektie een verband aangeven tussen de Poincaré reeks van $\mathbb{T}_{m,n}$ en deze van $R_{m+1,n}$, namelijk :

$$P(\mathbb{T}_{m,n};t_1,\ldots,t_m) = \frac{\partial}{\partial t_{m+1}}.P(R_{m+1,n};t_1,\ldots,t_{m+1})\Big|_{t_{m+1}=0}$$

Laat ons nu overgaan tot de bestudering van de mogelijke rationale uitdrukkingen voor deze Poincaré-reeksen. Dat er inderdaad een rationale uitdrukking moet bestaan volgt uit de stellingen van C. Procesi [P3] die bewees dat $\mathbb{T}_{m,n}$ een eindig moduul is over $R_{m,n}$ en dat $R_{m,n}$ een affiene F-algebra is voortgebracht door de elementen

$$Tr(Xi_1\ldots X_{i_j})$$

waarbij we mogen veronderstellen dat $j \leq 2^n - 1$. Dit heeft tot gevolg dat $R_{m,n}$ een eindige resolutie heeft over de veeltermring

$$S_{m,n} = F[a_{i_1,\ldots,i_j} : j \leq 2^n - 1; i_k \in \{1,\ldots,m\}]$$

De Poincaré-reeks in multigradatie van de ring $S_{m,n}$is eenvoudig te bepalen :

$$(*) : \frac{1}{\prod_i(1-t_i).\prod_{i_1,i_2}(1-t_{i_1}.t_{i_2})\ldots\prod_{i_1,\ldots,i_{2^n-1}}(1-t_{i_1},\ldots,t_{i_{2^n-1}})}$$

Omdat zowel $R_{m,n}$ als $\mathbb{T}_{m,n}$ eindig voortgebrachte gegradeerde modules zijn over de reguliere ring $S_{m,n}$ volgt door een argument als in sektie 1 dat er veeltermen f en g in $\mathbb{Z}[t_1,\ldots,t_m]$ bestaan zodat

$$\begin{cases} P(R_{m,n};t_1,\ldots,t_m) = f(t_1,\ldots,t_m).P(S_{m,n};t_1,\ldots,t_m) \\ P(\mathbb{T}_{m,n};t_1,\ldots,t_m) = g(t_1,\ldots,t_m).P(S_{m,n};t_1,\ldots,t_m) \end{cases}$$

Theoretisch kunnen deze polynomen bepaald worden m.b.v. het volgende algeritme : bereken enerzijds aan de hand van bovenstaande formules de machtreeksontwikkeling van $P(R_{m,n})$ en $P(\mathbb{T}_{m,n})$ en anderzijds de machtreeksontwikkeling van $(*)$. Een vergelijking van beide machtreeksen levert dan de termen in f en g.
Natuurlijk is dit zowel in m als n een exponentieel algoritme en daarom in de praktijk haast onbruikbaar om de rationale uitdrukking van de Poincaré reeksen te bepalen. Men kan de berekeningen evenwel drastisch vereenvoudigen door enkel de Poincaré reeks in één variabele te willen bepalen. Deze wordt natuurlijk bekomen door $t_1 = \ldots = t_m = t$ te stellen. Aldus verkrijgen we

Stelling 3.3. :
Er bestaan veeltermen $f(t)$ en $g(t)$ in $\mathbb{Z}[t]$ zodat :

$$\begin{cases} P(R_{m,n};t) = \dfrac{f(t)}{(1-t)^m(1-t^2)^{m^2}\ldots(1-t^{2^m-1})^{m^{2^n-1}}} \\ P(\mathbb{T}_{m,n};t) = \dfrac{g(t)}{(1-t)^m(1-t^2)m^2\ldots(1-t^{2^m-1})^{m^{2^m}-1}} \end{cases}$$

Als een direkt gevolg van dir resultaat kunnen we nu alle mogelijke rationale vormen bepalen van de Poincaré reeks van $R_{m,n}$ en $\mathbb{T}_{m,n}$ in de veronderstelling dat ze eindige globale dimensie zouden hebben. In dat geval moet immers de Poincaré reeks een zuiver invers zijn en bijgevolg krijgen we :

Stelling 3.4. :

(1) : Als het centrum van de spoorring van m generieke n bij n matrixen eindige globale dimensie heeft dan heeft de Poincaré-reeks de vorm :

$$P(R_{m,n};t) = \frac{1}{(1-t)^{\alpha_1}(1-t^2)^{\alpha_2}\dots(1-t^{2^m-1})^{\alpha_{2^n-1}}}$$

voor zekere α_i in $\mathbb{N}$ met als randvoorwaarde $\sum_{i=1}^{2^n-1}\alpha_i = \mathrm{Kdim}(R_{m,n}) = (m-1).n^2+1$.

(2) : Als de spoorring van m generieke n bij n matrixen eindige globale dimensie heeft dan is de Poincaré reeks

$$P(\mathbb{T}_{m,n};t) = \frac{1}{F_1^{\alpha_1}\dots F_k^{\alpha_k}}$$

waarbij de F_i irreduciebele faktoren zijn in $\mathbb{Z}[t]$ van $1-t^e$ met $1 \le l \le 2^n-1$, met als randvoorwaarde dat de orde van de pool in $t=1$ gelijk dient te zijn aan $(m-1).n^2+1$.

Laat ons deze algemene methode om de regulariteit van $R_{m,n}$ en $\mathbb{T}_{m,n}$ te testen nu eens toepassingen op het speciale geval van 2 generieke 3 bij 3 matrixen. Vooreerst dienen we de Schur funkties in $9 = 3^2$variabelen $Z_1,\dots,Z_9$ te bepalen die korresponderen met verdelingen λ van lengte $\le \min(2,3) = 2$, d.i. λ heeft de vorm :

$$\lambda = (a,b,0,0,0,0,0,0,0)$$

waarin $a,b \in \mathbb{N}$ zodat $a \ge b$. De definitie van de Schur funktie s_λ is

$$s_\lambda(Z_1,\dots,Z_9) = \frac{\det(A)}{\prod_{i<j}^{9}(Z_i-Z_j)}$$

waar A staat voor de volgende 9 bij 9 matrix

$$\begin{bmatrix} Z_1^{8+a} & Z_1^{7+b} & Z_1^6 & \dots & Z_1 & 1 \\ Z_2^{8+a} & Z_2^{7+b} & Z_2^6 & \dots & Z_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ Z_9^{8+a} & Z_9^{7+b} & Z_9^6 & \dots & Z_9 & 1 \end{bmatrix}$$

gebruikmakend van de elementaire eigenschappen van determinanten kan men gemakkelijk aantonen dat de Schur funktie gelijk is aan :

$$s_\lambda(Z_1,\dots,Z_9) = \det\begin{bmatrix} F & G \\ H & I \end{bmatrix}$$

waarin

$$\begin{cases} F &= \sum_{|i|=a+1} & Z_1^{i_1}\dots Z_8^{i_8} \\ G &= \sum_{|j|=b} & Z_1^{j_1}\dots Z_8^{j_8} \\ H &= \sum_{|k|=a} & Z_1^{k_1}\dots Z_9^{k_9} \\ I &= \sum_{|l|=b-1} & Z_1^{l_1}\dots Z_9^{l_9} \end{cases}$$

met i en j 8 tuppels van elementen van $\mathbb{N}$ en k en l 9-tuppels. Als $b \leq 1$ dan stellen we $I = 0$. Vervolgens dienen we het beeld van de Schur funktie $s_\lambda(Z_1, \dots, Z_9)$ te bepalen onder de afbeelding :

$$\mathbb{Z}[Z_1, \dots, Z_9]^{S_9} \to \mathbb{Z}[x_1, x_1^{-1}, x_2, x_2^{-1}, x_3, x_3^{-1}]^{S_3}$$

die bepaald wordt door

$$\begin{array}{lll} Z_1 \vdash 1 & Z_4 \vdash x_2x_1^{-1} & Z_7 \vdash x_3x_1^{-1} \\ Z_2 \vdash x_1x_2^{-1} & Z_5 \vdash 1 & Z_8 \vdash x_3x_2^{-1} \\ Z_3 \vdash x_1x_3^{-1} & Z_6 \vdash x_2x_3^{-1} & Z_9 \vdash 1 \end{array}$$

Vandaar dat $s_\lambda(x_ix_j^{-1})$ gelijk is aan de determinant van

$$\begin{pmatrix} F_1 & G_1 \\ H_1 & I_1 \end{pmatrix}$$

waarin

$$\begin{cases} F_1 = \sum\limits_{|i|=q+1} 1^{i_1+i_5}.x_1^{i_2+i_3-i_4-i_7}.x_2^{i_4+i_6-i_2-i_8}.x_3^{i_7+i_8-i_3-i_6} \\ G_1 = \sum\limits_{|j|=b} 1^{j_1+j_5}.x_1^{j_2+j_3-j_4-j_7}.x_2^{j_4+j_6-j_2-j_8}.x_3^{j_7+j_8-j_3-j_6} \\ H_1 = \sum\limits_{|k|=q} 1^{k_1+k_5+k_9}.x_1^{k_2+k_3-k_4-k_7}.x_2^{k_4+k_6-k_2-k_8}.x_3^{k_7+k_8-k_3-k_6} \\ I_1 = \sum\limits_{|l|=b-1} 1^{l_1+l_5+l_9}.x_1^{l_2+l_3-l_4-l_7}.x_2^{l_4+l_6-l_2-l_8}.x_3^{l_7+l_8-l_3-l_6} \end{cases}$$

Vervolgens dienen we de inprodukten te berekenen in $\mathbb{Z}[x_1, x_1^{-1}, x_2, x_2^{-1}, x_3, x_3^{-1}]^{S_3}$:

$$\begin{cases} < s_\lambda(x_ix_j^{-1}), 1 >= \frac{1}{6}\int s_\lambda(x_ix_j^{-1}).a_\delta.a_\delta^* \\ < s_\lambda(x_ix_j^{-1}), s_{(1)}(x_ix_j^{-1}) >= \frac{1}{6}\int s_\lambda(x_ix_j^{-1}).(\Sigma x_ix_j^{-1}).a_\delta.a_\delta^* \end{cases}$$

In onze situatie hebben we :

$$a_\delta = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3)$$
$$a_\delta^* = (x^{-1} - x_2^{-1})(x_2^{-1} - x_3^{-1})(x_1^{-1} - x_3^{-1})$$

Als we met $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ de term $x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}.x_3^{\alpha_3}$ noteren, dan bekomen we na wat rekenen dat $a_\delta.a_\delta^*$ gelijk is aan

$$\begin{aligned}
&-2\big[(1,-1,0)+(-1,1,0)+(1,0,-1)+(-1,0,1)+(0,1,-1)+(0,-1,1)\big]\\
&+2\big[(2,-1,-1)+(-2,1,1)+(-1,2,-1)+(1,-2,1)+(-1,-1,2)+(1,1,-2)\big]\\
&-1\big[(2,-2,0)+(-2,2,0)+(2,0,-2)+(-2,0,2)+(0,2,-2)+(0,-2,2)\big]
\end{aligned}$$

Nu hebben we alle noodzakelijke ingredienten tot onze beschikking om het inprodukt $< s_\lambda(x_i x_j^{-1}).1 >$ te berekenen voor verdeling van de vorm $\lambda = (a, b, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$. We geven hier een Pascal programma om deze waarden te bepalen alsmede de resultaten voor $a + b \leq 10$:

APPENDIX 1

```
program centertr(input,output);

{this program computes the coefficient in the Poincare-series}
{of the center of T of 2 generic 3x3-matrices for the Schur-function}
{associated to the partition (x,y,0,0,0,0,0,0,0)}

var x,y,z,t,v,result :integer;

function hulp(a,b : integer):integer;

var i1,i2,i3,i4,i5,i6,i7,i8 : integer;
    j1,j2,j3,j4,j5,j6,j7,j8,j9 : integer;
    c,d,e,k  : integer;

begin{hulp}
k:=0;
for i1:=0 to a do begin
  for i2:=0 to (a-i1) do begin
    for i3:=0 to (a-i1-i2) do begin
      for i4:=0 to (a-i1-i2-i3) do begin
        for i5:=0 to (a-i1-i2-i3-i4) do begin
          for i6:=0 to (a-i1-i2-i3-i4-i5) do begin
            for i7:=0 to (a-i1-i2-i3-i4-i5-i6) do
   begin
      i8:=(a-i1-i2-i3-i4-i5-i6-i7);
      for j1:=0 to b do begin
        for j2:=0 to (b-j1) do begin
          for j3:=0 to (b-j1-j2) do begin
            for j4:=0 to (b-j1-j2-j3) do begin
              for j5:=0 to (b-j1-j2-j3-j4) do begin
                for j6:=0 to (b-j1-j2-j3-j4-j5) do begin
                  for j7:=0 to (b-j1-j2-j3-j4-j5-j6) do begin
                    for j8:=0 to (b-j1-j2-j3-j4-j5-j6-j7) do
      begin
         j9:=(b-j1-j2-j3-j4-j5-j6-j7-j8);
         c:=(i2+j2+i3+j3-i4-j4-i7-j7);
         d:=(i4+j4+i6+j6-i2-j2-i8-j8);
         e:=(i7+j7+i8+j8-i3-j3-i6-j6);
         if (c*c+d*d+e*e)=0 then k:=k+6
                            else begin
                              if (c*d*e)=0 then begin
                                 if (c*c+d*d+e*e)=2 then k:=k-2
                                          else begin
                                 if (c*c+d*d+e*e)=8 then k:=k-1;
                                               end;
                                               end
                                          else begin
                                 if (c*c+d*d+e*e)=6 then k:=k+2;
                                                end;
                                 end;
      end;
                                                        end;
                                                    end;
                                                end;
                                            end;
                                        end;
                                    end;
                                end;
                            end;
                                              end;
                                          end;
                                      end;
                                  end;
                              end;
                          end;
 hulp:=trunc(k/6);
 end{hulp};

 begin{main program}
 read(x);read(y);
 z:=hulp(y,x);
 if (y-1)<0 then result:=z
             else begin
                    t:=hulp(x+1,y-1);
                    result:=(z-t);
                  end;
 writeln('coefficient of s(',x:3,',',y:3,',0,0,0,0,0,0,0) = ',result:3);
 end.
```

```
coefficient of s(  1,   0,0,0,0,0,0,0,0)  =   1
coefficient of s(  2,   0,0,0,0,0,0,0,0)  =   2
coefficient of s(  1,   1,0,0,0,0,0,0,0)  =   0
coefficient of s(  3,   0,0,0,0,0,0,0,0)  =   3
coefficient of s(  2,   1,0,0,0,0,0,0,0)  =   1
coefficient of s(  4,   0,0,0,0,0,0,0,0)  =   4
coefficient of s(  3,   1,0,0,0,0,0,0,0)  =   2
coefficient of s(  2,   2,0,0,0,0,0,0,0)  =   3
coefficient of s(  5,   0,0,0,0,0,0,0,0)  =   5
coefficient of s(  4,   1,0,0,0,0,0,0,0)  =   4
coefficient of s(  3,   2,0,0,0,0,0,0,0)  =   5
coefficient of s(  6,   0,0,0,0,0,0,0,0)  =   7
coefficient of s(  5,   1,0,0,0,0,0,0,0)  =   5
coefficient of s(  4,   2,0,0,0,0,0,0,0)  =  10
coefficient of s(  3,   3,0,0,0,0,0,0,0)  =   3
coefficient of s(  7,   0,0,0,0,0,0,0,0)  =   8
coefficient of s(  6,   1,0,0,0,0,0,0,0)  =   8
coefficient of s(  5,   2,0,0,0,0,0,0,0)  =  14
coefficient of s(  4,   3,0,0,0,0,0,0,0)  =   9
coefficient of s(  8,   0,0,0,0,0,0,0,0)  =  10
coefficient of s(  7,   1,0,0,0,0,0,0,0)  =  10
coefficient of s(  6,   2,0,0,0,0,0,0,0)  =  21
coefficient of s(  5,   3,0,0,0,0,0,0,0)  =  15
coefficient of s(  4,   4,0,0,0,0,0,0,0)  =  10
coefficient of s(  9,   0,0,0,0,0,0,0,0)  =  12
coefficient of s(  8,   1,0,0,0,0,0,0,0)  =  13
coefficient of s(  7,   2,0,0,0,0,0,0,0)  =  27
coefficient of s(  6,   3,0,0,0,0,0,0,0)  =  27
coefficient of s(  5,   4,0,0,0,0,0,0,0)  =  18
coefficient of s( 10,   0,0,0,0,0,0,0,0)  =  14
coefficient of s(  9,   1,0,0,0,0,0,0,0)  =  16
coefficient of s(  8,   2,0,0,0,0,0,0,0)  =  36
coefficient of s(  7,   3,0,0,0,0,0,0,0)  =  36
coefficient of s(  6,   4,0,0,0,0,0,0,0)  =  37
coefficient of s(  5,   5,0,0,0,0,0,0,0)  =  10
```

De Schur funkties in 2 variabelen zijn eenvoudig te berekenen :

$$\begin{cases} s_{(k,0)}(t_1,t_2) = \sum_{i=0}^{k} t_1^i.t_2^{t-i} \\ s_{(k,l)}(t_1,t_2) = (t_1.t_2)^{k-l}.s_{(k.l,0)}9t-1, t-20 \end{cases}$$

Nu besluiten we over alle informatie om de eerste termen van de machtreeksontwikkeling van $P(R_{2,3};t_1,t_2)$ te berekenen. We vinden :

$$\begin{aligned} &1+ \\ &t_1+t_2+ \\ &2t_1^2+2t_1t_2+2t_2^2+ \\ &3t_1^3+4t_1^2t_2+4t_1t_2^2+3t_2^3+ \\ &4t_1^4+6t_1^3t_2+9t_1^2t_2^2+6t_1t_2^3+4t_2^4+ \\ &5t_1^5+9t_1^4t_2+14t_1^3t_2^2+14t_1^2t_2^3+9t_1t_2^4+5t_2^5+ \\ &7t_1^6+12t_1^5t_2+22t_1^4t_2^2+25t_1^3t_2^3+22t_1^2t_2^4+12t_1t_2^5+7t_2^6+ \end{aligned}$$

of in enkele variabele :

$$P(R_{2,3};t) = 1+2t+6t^2+14t^3+29t^4+56t^5+107t^6+\dots$$

Deze berekening stelt ons in staat aan te tonen dat :

Stelling 3.5. : Het centrum van de spoorring van 2 reguliere 3 bij 3 matrixen, $R_{2,3}$, is niet regulier.

Bewijs :
Uit stelling 3.4. leiden we af dat, indien $R_{2,3}$ regulier zou zijn, de Poincaré reeks de vorm moet hebben :

$$\frac{1}{(1-t)^\alpha(1-t^2)^\beta(1-t^3)^\gamma(1-t^4)^\delta(1-t^4)^\delta(1-t^5)^\epsilon(1-t^6)^\eta(1-t^7)^\chi}$$

met $\alpha+\beta+\gamma+\epsilon+\eta+\chi = 9+1 = 10$. Een vergelijking van de term in t leert ons dat $\alpha = 2$. De coefficient in t^2 wordt dan $3+\beta = 6$ waaruit $\beta = 3$. De coefficient van t^3 wordt $4+\gamma = 14$ waaruit $\gamma = 10$. Maar $2+3+10 > 10$, een kontradiktie. ∎

Laat ons nu de spoorring zelf behandelen. Hiervoor dienen we eerst een uitdrukking te vinden voor

$$(\Sigma x_i x_j^{-1}).a_\delta.a_\delta^*$$

Deze is gelijk aan :

$$
\begin{gathered}
6(0,0,0)+\\
-1[(1,-1,0)+(-1,1,0)+(1,0,-1)+(-1,0,1)+(0,1,-1)+(0,-1,1)]\\
-1[(2,-2,0)+(-2,2,0)+(2,0,-2)+(-2,0,2)+(0,2,-2)+(0,-2,2)]\\
-1[(3,-3,0)+(-3,3,0)+(3,0,-3)+(-3,0,3)+(0,3,-3)+(0,-3,3)]\\
1[(3,-2,-1)+(-3,2,1)+(3,-1,-2)+(-3,1,2)+(-1,3,-2)+(1,-3,2)+\\
(-2,3,-1)+(2,-3,1)+(-1,-2,3)++(1,2,-3)+(-2,-1,3)+(2,1,-3)]
\end{gathered}
$$

En wederom hebben we alle informatie om het inprodukt $< s_\lambda(x_i x_j^{-1}), s_{(1)}(x, x_j^{-1}) >$ te berekenen. Een Pascal programma hiervoor is :

APPENDIX 2

```
program tracering(input,output);

{this program computes the coefficient in the Poincare-series}
{of the trace ring of 2 generic 3x3-matrices for the Schur-function}
{associated to the partition (x,y,0,0,0,0,0,0,0)}

var x,y,z,t,v,result :integer;

function hulp(a,b : integer):integer;

var i1,i2,i3,i4,i5,i6,i7,i8 : integer;
    j1,j2,j3,j4,j5,j6,j7,j8,j9 : integer;
    c,d,e,k  : integer;

begin{hulp}
k:=0;
for i1:=0 to a do begin
  for i2:=0 to (a-i1) do begin
    for i3:=0 to (a-i1-i2) do begin
      for i4:=0 to (a-i1-i2-i3) do begin
        for i5:=0 to (a-i1-i2-i3-i4) do begin
          for i6:=0 to (a-i1-i2-i3-i4-i5) do begin
            for i7:=0 to (a-i1-i2-i3-i4-i5-i6) do
   begin
      i8:=(a-i1-i2-i3-i4-i5-i6-i7);
      for j1:=0 to b do begin
        for j2:=0 to (b-j1) do begin
          for j3:=0 to (b-j1-j2) do begin
            for j4:=0 to (b-j1-j2-j3) do begin
              for j5:=0 to (b-j1-j2-j3-j4) do begin
                for j6:=0 to (b-j1-j2-j3-j4-j5) do begin
                  for j7:=0 to (b-j1-j2-j3-j4-j5-j6) do begin
                    for j8:=0 to (b-j1-j2-j3-j4-j5-j6-j7) do
      begin
         j9:=(b-j1-j2-j3-j4-j5-j6-j7-j8);
         c:=(i2+j2+i3+j3-i4-j4-i7-j7);
         d:=(i4+j4+i6+j6-i2-j2-i8-j8);
         e:=(i7+j7+i8+j8-i3-j3-i6-j6);
         if (c*c+d*d+e*e)=0 then k:=k+6
                            else begin
                              if (c*d*e)=0 then begin
                                 if (c*c+d*d+e*e)=2 then k:=k-1
                                           else begin
                                 if (c*c+d*d+e*e)=8 then k:=k-1
                                                 else begin
                                 if (c*c+d*d+e*e)=18 then k:=k-1;
                                                      end;
                                                end;
                                                end
                                           else begin
                                 if (c*c+d*d+e*e)=14 then k:=k+1;
                                                 end;
                                 end;
      end;

                                                    end;
                                                end;
                                            end;
                                        end;
                                    end;
                                end;
                            end;
                        end;

                                    end;
                                end;
                            end;
                        end;
                    end;
                end;
hulp:=trunc(k/6);
end{hulp};

begin{main program}
read(x);read(y);
z:=hulp(y,x);
if (y-1)<0 then result:=z
          else begin
                 t:=hulp(x+1,y-1);
                 result:=(z-t);
               end;
writeln('coefficient of s(',x:3,',',y:3,',0,0,0,0,0,0,0) = ',result:3);
end.
```

```
coefficient of s(  1,   0,0,0,0,0,0,0,0) =    2
coefficient of s(  2,   0,0,0,0,0,0,0,0) =    4
coefficient of s(  1,   1,0,0,0,0,0,0,0) =    2
coefficient of s(  3,   0,0,0,0,0,0,0,0) =    6
coefficient of s(  2,   1,0,0,0,0,0,0,0) =    7
coefficient of s(  4,   0,0,0,0,0,0,0,0) =    9
coefficient of s(  3,   1,0,0,0,0,0,0,0) =   13
coefficient of s(  2,   2,0,0,0,0,0,0,0) =    9
coefficient of s(  5,   0,0,0,0,0,0,0,0) =   12
coefficient of s(  4,   1,0,0,0,0,0,0,0) =   22
coefficient of s(  3,   2,0,0,0,0,0,0,0) =   22
coefficient of s(  6,   0,0,0,0,0,0,0,0) =   16
coefficient of s(  5,   1,0,0,0,0,0,0,0) =   32
coefficient of s(  4,   2,0,0,0,0,0,0,0) =   43
coefficient of s(  3,   3,0,0,0,0,0,0,0) =   18
coefficient of s(  7,   0,0,0,0,0,0,0,0) =   20
coefficient of s(  6,   1,0,0,0,0,0,0,0) =   45
coefficient of s(  5,   2,0,0,0,0,0,0,0) =   68
coefficient of s(  4,   3,0,0,0,0,0,0,0) =   52
coefficient of s(  8,   0,0,0,0,0,0,0,0) =   25
coefficient of s(  7,   1,0,0,0,0,0,0,0) =   59
coefficient of s(  6,   2,0,0,0,0,0,0,0) =  101
coefficient of s(  5,   3,0,0,0,0,0,0,0) =   97
coefficient of s(  4,   4,0,0,0,0,0,0,0) =   46
coefficient of s(  9,   0,0,0,0,0,0,0,0) =   30
coefficient of s(  8,   1,0,0,0,0,0,0,0) =   76
coefficient of s(  7,   2,0,0,0,0,0,0,0) =  138
coefficient of s(  6,   3,0,0,0,0,0,0,0) =  159
coefficient of s(  5,   4,0,0,0,0,0,0,0) =  114
coefficient of s( 10,   0,0,0,0,0,0,0,0) =   36
coefficient of s(  9,   1,0,0,0,0,0,0,0) =   94
coefficient of s(  8,   2,0,0,0,0,0,0,0) =  183
coefficient of s(  7,   3,0,0,0,0,0,0,0) =  232
coefficient of s(  6,   4,0,0,0,0,0,0,0) =  215
coefficient of s(  5,   5,0,0,0,0,0,0,0) =   83
```

Deze resultaten stellen ons in staat de eerste termen van $P(\mathbb{T}_{2,3};t_1,t_2)$ te berekenen :

$$\begin{aligned}
&1+\\
&2t_1+2t_2+\\
&4t_1^2+6t_1t_2+4t_2^2+\\
&6t_1^3+13t_1^2+t_2+13t_1t_2^2+6t_2^3+\\
&9t_1^4+22t_1^3t_2+31t_1^2t_2^2+22t_1t_2^3+9t_2^4+\\
&12t_1^5+34t_1^4t_2+56t_1^3t_2^2+56t_1^2t_2^3+34t_1t_2^4+12tt_2^5+\\
&16t_1^6+48t_1^5t_2+91t_1^4t_2^2+109t_1^3t_2^3+97t_1^2t_2^4+48t_1t_2^5+16t_2^6+\\
&\qquad\ldots
\end{aligned}$$

en dus wordt de Poincaré reeks in één variabele :

$$P(\mathbb{T}_{2,3};t)=1+45+14t^2+38t^3+93t^4+204t^5+419t^6+ \\ 806t^7+1480t^8+\ldots$$

Hulpstelling 3.6. : Indien de spoorring van 2 generieke 3 bij 3 matrixen eindige globale dimensie heeft, dan moet de Poincaré-reeks devolgende rationale vorm hebben :

$$\frac{1}{(1-t)^4(1-t^2)^4(1-t^3)^2}$$

Bewijs :

Wegens stelling 3.4.(2) weten we dat de rationale vorm van de Poincaré reeks de uitdrukking moet hebben

$$P(\mathbb{T}_{2,3};t)=\frac{1}{F_1^{\alpha_1}\ldots F_k^{\alpha_k}}$$

waarbij de F_j irrediciebele faktoren zijn in de faktoriële ring $\mathbb{Z}[t]$ van termen $1-t^l$ met $l\leq 7$. Bijgevolg moeten er natuurlijk getallen a,b,c,d,e,f,g en h bestaan zodat

$$P(\mathbb{T}_{2,3};t)=\frac{1}{(1-t)^aA_1^bA_2^cA_3^dA_4^eA_5^f(1+t^2)^g(1+t^3)^h} \tag{$*$}$$

waarbij

$$\begin{cases}A_1=1+t\\ A_2=1+t+t^2\\ A_3=1-t+t^2\\ A_4=1+t+t^2+t^3+t^4\\ A^5=1+t+t^2+t^3+t^4+t^5+t^6\end{cases}$$

Daar nu $A_1.A_3 - 1 + t^3$ zullen we twee verschillende gevallen onderzoeken :
geval I : $b < d$
Dan heeft de noemer van (*) de vorm

$$(1-t)^a(1-t+t^2)^v A_2^C A_4^e A_5^f (1+t^2)^g (1+t^3)^h$$

Nu onderzoeken we de twee mogelijkheden :
(I.a.) $a \geq c+e+f$, dan wordt de noemer

$$(1-t)^u(1-t+t^2)^v(1-t^3)^w(!-t^5)^x(1-t^7)^y(1+t_2)^g(1+t^3)^h$$

en wanneer we de eerste termen uitrekenen van de machtreeksontwikkeling van deze rationale uitdrukking dan bekomen we

$$1+(u+v).t+(\frac{u(u+1)}{2}+\frac{v(v+1)}{}-v+uv-g)t^2+\dots$$

En bijgevolg krijgen we het stelsel vergelijken :

$$\begin{cases} u+v=4 \\ u-g=8 \end{cases}$$

dat geen oplossingen heeft in $\mathbb{N}$.
I.b. : $a < c+e+f$, dan wordt de rationale vorm van de Poincaré reeks :

$$\frac{(1-t)^u}{(1-t+t^2)^v(1-t^3)^w(1-t^5)^x(1-t^7)^y(1+t^2)^g(1+t^3)^h}$$

waarvan de machreeksontwikkeling wordt :

$$1+(v-u)t+(\frac{u(u-1)}{2}+\frac{v(v+1)}{2}-v-uv-g)t62=\dots$$

en we krijgen het stelsel :

$$\begin{cases} u.v=4 \\ u+g=-8 \end{cases}$$

dat wederom geen oplossingen toelaat in $\mathbb{N}$. Bijgevolg mogen we ons beperken tot de studie van
geval II : $b \geq d$, dan wordt de noemer van (*) :

$$(1-t)^a A_1^b A_2^c A_4^e A_5^f (1+t^2)^g (1+t^3)^h$$

Vooreerst merken we op dat $a \geq b+c+e+f$ want anders krijgen we voor $P(\mathbb{T}_{2,3};t)$ de rationale vorm :

$$\frac{(1-t)^u}{(1-t^2)^v(1-t^3)^w(1-t^5)^x(1-t^7)^y(1+t^2)^g(1+t^3)^h}$$

waarvan de machtreeksontwikkeling een negatieve koëfficiënt voor T heeft en dit is onmogelijk voor Poincaré reeksen. Vandaar dat we de rationale vorm hebben :

$$\frac{1}{(1-t)^u(1-t^2)^v(1-t^3)^w(1-t^5)^x(1-t^7)^y(1+t)^g(1+t^3)^h}$$

Wanneer we de koëfficiënt van T in de machtreeksontwikkeling hiervan vergelijken met deze van $P(\mathbb{T}_{2,3};t)$ krijgen we $t=4$. Bijgevolg worden de eerste termen :

$$1+4t+(10+v-g)t^2+(20+4(v-g)+w-h)t^3+$$
$$\left(35+10(v-g)+4(w-h)+\frac{v(v+1)}{2}+\frac{g(g+1)}{2}-vg\right)t^4+\ldots$$

Daarom krijgen we het stelsen

$$\begin{cases} v-g=4 \\ w-h=2 \end{cases}$$

en als we deze informatie substitueren in de koëfficiënt van t^4 bekomen we

$$v^2+v+g^2+g-2vg=20$$

waaruit $v=4$ en $g=0$. De koëfficiënt van t^5 wordt dan

$$176+14(w-h)+x$$

en als we dit vergelijken met de machtreeksontwikkeling voor $P(\mathbb{T}_{2,3};t)$ krijgen we $x=0$.
De koëfficiënten van t^6 met elkaar vergelijken levert dan de vergelijking :

$$w^2+w+h^2+h-2wh=6$$

waaruit $w=2$ en $h=0$. Daar nu $u+v+w=10=\mathrm{Kdim}(\mathbb{T}_{2,3})$ moet $y=0$. ∎
Als kontrole kan men de koëfficiënten van t^7 en t^8 narekenen. Verder is het ook mogelijk de rationale uitdrukking in multi-gradatie te bepalen. Men verkrijgen dan :

$$\frac{1}{(1-t_1)^2(1-t_2)^2(1-t_1^2)(1-t_2^2)(1-t_1t_2)^2(1-t_1^2t_2)(1-t_1t_2^2)}$$

In de laatste sektie van dit hoofdstuk zullen we aantonen dat de Poincaré-reeks van de spoorring van 2 generieke 3 bij 3 matrixen inderdaad de bovenstaande rationale uitdrukking heeft en dat $\mathbb{T}_{2,3}$ we degelijk eindige globale dimensie heeft.
Natuurlijk kan men trachten, met behulp van de methode die geschetst werd bij de aanvang van deze sektie, de eerste termen te beschermen in de machtreeksontwikkeling van de Poincaré reeks voor de spoorring van 3 generieke 3 bij 3 matrixen en hieruit bewijzen dat de rationale vorm geen zuiver invers kan zijn.

De benodigde berekeningen worden echter zeer komplex. Niettemin zijn we nu in staat de hoofdstelling voor drie dimensionale representaties te bewijzen :

Hoofdstelling 3.7. :

De spoorring van m generieke 3 bij 3 matrixen, $\mathbb{T}_{m,3}$, heeft eindige globale dimensie als en slechts dan als $m \leq 2$.

Bewijs : Zoals hierboven reeds opgemerkt zullen we de regulariteit van de spoorring van 2 generieke 3 bij 3 matrixen in de laatste sektie bewijzen.
Laat ons vooreerst het speciale geval van 3 generieke 3 bij 3 matrixen behandelen.
We merken op dat het voldoende is te bewijzen is te bewijzen dat $P(\mathbb{T}_{3,3}; t_1, t_2, t_3)$ geen zuiver invers kan zijn in $\mathbb{Z}(t_1, t_2, t_3)$.
Stel dat dit wel het geval is, dan heeft de Poincaré reeks de vorm

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{\alpha} g_i(t_1, t_2, t_3)}$$

waarbij elk van de komponenten $g_i(t_1, t_2, t_3)$ een irreduciebele faktor is in de faktoriële ring $\mathbb{Z}[t_1, t_2, t_3]$ van een term $1 - t_1^k t_2^l t_3^m$ waarbij we wegens de resultaten van C. Procesi mogen veronderstellen dat $k + l + m \leq 2^3 - 1 = 7$.
Laat ons nu kijken naar het deel-produkt bestaande uit alle termen die slechts twee variabelen t_i en t_j bevatten : $G(t_i, t_j)$. We krijgen dus :

$$P(\mathbb{T}_{3,3}; t_1, t_2, t_3)\big|_{t_k=0} = \frac{1}{G(t_i, t_j)}$$

Nu geldt in het algemeen hetvolgende : wanneer men in de Poincaré reeks van de spoorring van m generieke n bij n matrixen $P(\mathbb{T}_{m,n}; t_1, \ldots, t_m)$ k variabelen, zeg $t_{i_1}, \ldots, t_{i_k}$, specialiseert naar nul men de Poincaré reeks bekomt van de spoorring van $(m - k)$ generieke n bij n matrixen $P(\mathbb{T}_{m-k,n}; t_1, \ldots, \not{t}_{i_1}, \ldots, \not{t}_{i_k}, \ldots, t_m)$.
Uit onze kennis van de rationale vorm van de Poincaré-reeks in multigradatie van $\mathbb{T}_{2,3}$ leiden we bijgevolg af :

$$G(t_i, t_j) = (1 - t_i)^2 (1 - t_j)^2 (1 - t_i^2)(1 - t_j^2)(1 - t_i t_j)^2 (1 - t_i^2 t_j)(1 - t_i t_j^2)$$

Daar dit geldt voor ieder koppel $i \neq j$ uit $\{1, 2, 3\}$ bekomen we dat $\prod_{i=1}^{\alpha} g_i(t_1, t_2, t_3)$ een deel-produkt bevat gelijk aan :

$$\begin{gathered}(1 - t_1)^2 (1 - t_2)^2 (1 - t_3)^2 (1 - t_1^2)(1 - t_2^2)(1 - t_3^2) \\ (1 - t_1 t_2)^2 . (1 - t_2 t_3)^2 . (1 - t_1 t_3)^3 \\ (1 - t_1^2 t_2).(1 - t_1 t_2^2).(1 - t_2^2 t_3).(1.T_2 t_3^2).(1 - t_1^2 t_3)(1 - t_1 t_3^2)\end{gathered}$$

Als we nu terug overgaan op de Poincaré reeks in één variabele, dan volgt uit het voorgaande dat de orde van de pool van $P(\mathbb{T}_{3,3}; t)$ in $t = 1$ ten minste 21 moet zijn. Dit is echter in tegenspraak met het feit dat de orde gelijk moet zijn aan de Krull dimensie van $\mathbb{T}_{3,3}$, d.i. 19. Bijgevolg hebben we bewezen dat de rationale uitdrukking van $(P(\mathbb{T}_{3,3}; t, t_2, t_3)$ geen zuiver invers kan zijn en bijgevolg dat $\text{gldim}(\mathbb{T}_{3,3}) = \infty$. Laat ons nu het algemene geval $m \geq 3$ behandelen. Stel dat $\mathbb{T}_{m,3}$ eindige globale dimensie heeft, dat dient $P(\mathbb{T}_{m,3}; t_1, \ldots, t_m)$ een zuiver invers te zijn. Als we dan $t_4 = 0, \ldots, t_m = 0$ stellen dan is de bekomen rationale uitdrukking, die wegens het voorgaande gelijk is aan $P(\mathbb{T}_{3,3}; t_1, t_2, t_3)$, ook een zuiver invers en bijgevolg bekomen we een kontradiktie. ∎

Hoofdstuk 4 :Het algemene geval.

Recentelijk werd het regulariteitsprobleem voor spoorringen van generieke matrixen volledig opgelost door de auteur en C. Procesi (Rome). We bewezen hetvolgende resultaat :

Stelling 4.1 : De enige spoorringen van generieke matrixen die eindige globale dimensie hebben zijn de kommutatieve (dit is m of n gelijk aan 1) en $\mathbb{T}_{2,2}, \mathbb{T}_{2,3}$ en $\mathbb{T}_{3,2}$.

In dit hoofdstuk zullen we een schets van het bewijs geven. Volledige details zullen elders gepubliceerd worden. Het bewijs steunt in voorname mate op het zogenaamde étale snede resultaat van D. Luna. Dit is een algebraïsche versie van een bekend resultaat in de differentiaalmeetkunde om de lokale struktur te bestuderen van een kwotient van een differentieerbare manifold onder aktie van een kompakte Lie-groep. In deze situatie heeft men dat iedere orbit gesloten is. Helaas geldt dit niet langer in de algebraische situaties waarin wij geinteresseerd zijn. D. Luna toonde echter aan dat men nog steeds analoge resultaten heeft als men zich maar beperkt tot inverse beelden waarvan de orbit gesloten is. Een uitvoerige beschrijving van deze resultaten van D. Luna zou ons hier te ver voeren. Laat ons daarom meteen overgaan naar het speciale geval van het centrum $\mathcal{R}_{m,n}$ van de spoorring van m generieke n bij n matrixen.

Zoals steeds zullen we met $V_{m,n}$ de varieteit noteren die geassocieerd is aan $\mathcal{R}_{m,n}$. We heben reeds gezien dat $V_{m,n}$ opgevat kan worden als een kwotient-varieteit van een affiene ruimte $X_{m,n} = \mathring{A}^{mn^2}$ onder aktie van een reductieve groep , te weten $GL_n(F)$. We zullen nu een interpretatie geven vn de resultaten van Luna in dit specifieke geval.

Zij $\chi \in V = V_{m,n}$, dan bepaald χ een equivalentieklasse van n-dimensionale semi-simpele representaties van $\mathcal{F}_m$.Noem een representant van deze klasse bijvoorbeeld :

$$\phi = \phi_1 \oplus ... \oplus \phi_1 \oplus \phi_2 \oplus ... \oplus \phi_t$$

waarbij ϕ_i een irreduciebele k_i-dimensionale representatie is die h_i keer voorkomt in ϕ (het getal h_i noemen we de multipliciteit van ϕ_i).We krijgen bijgevolg de relatie :

$$\sum_{i=1}^{t} h_i.k_i = n$$

We zullen dan zeggen dat ϕ een representatie is van type

$$(h_1, k_1; h_2, k_2; ...; h_t, k_t)$$

Als we met X de ruimte $X_{m,n}$ noteren en met $\pi_X : X \to V$ het projektie morfisme dan kan men aantonen dat het inverse beeld $\pi_X^{-1}(\chi)$ juist 1 gesloten orbit bevat die we noteren met $T(\chi)$.

Zij nu x een punt van deze orbit, dan is x een m-tuple van n bij n matrixen $(x_1, ..., x_m)$ waarbij we iedere x_i in blokvorm mogen veronderstellen,d.i.

$$x_i = diag(m_1, ..., m_1, m_2, ..., m_2, ..., m_t, ..., m_t)$$

waarbij iedere $m_i \in M_{k_i}(F)$. Men kan envoudig nagaan dat de isotropiegroep van dit punt x (dit is de deelgroep van $GL_n(F)$ die het punt x invariant laat) gelijk is aan

$$G_x = GL_{h_1}(F) \times ... \times GL_{h_t}(F)$$

waarbij de inbedding van G_x in $GL_n(F)$ op vor de hand liggende wijze wordt gegeven. De raakruimte in x aan de orbit onder de aktie van $GL_n(F)$ op X kan ook expliciet bepaald worden. Het is de ruimte

$$T_x = x + T_0$$

waarbij T_0 de beeldruimte is van de afbelding

$$M_n(F) \to M_n(F) \oplus ... \oplus M_n(F)$$

gegeven door

$$y \to [y, x_1] \oplus ... \oplus [y, x_m]$$

Men kan tevens aantonen dat de normaalruimte op deze raakruimte isomorf is met

$$N = M_n(F) \oplus ... \oplus M_n(F) \oplus M_o$$

d.i. de directe som van $m - 1$ kopieen van $M_n(F)$ en van de ruimte M_o die gelijk is aan

$$\begin{pmatrix} M_{k_1}(F).1_{h_1} & & 0 \\ & & \\ 0 & & M_{k_t}(F).1_{h_t} \end{pmatrix}$$

We zullen ons nu beperken tot een punt ξ dat een semi-simpele representatie van type $(1, k_1; \ldots, 1, k_t)$ voorstelt.
Uit het étale snede lemma volgt dat de étale lokale struktuur van V in ξ gegeven wordt door de variëteit van alle polynomiale afbeeldingen

$$f : N_x \to F$$

die invariant zijn onder de komponentsgewijze aktie door konjugatie van

$$G_x = F^* \times \ldots \times F^*$$

d.i. de t-dimensionale torus : T_t. Nu werkt deze torus triviaal op een $(m-1)(k_1^2 + \ldots + k_t^2) + t$-dimensionale ruimte en bijgevolg krijgen we :

$$N_x/T_t \cong \mathbb{A}^{(m-1)(k_1^2+\ldots+k_t^2)+t} \times N_2/T_t$$

waarbij

$$N_2 = \oplus_{i \neq j}^{m} V_{ij}$$

waar iedere V_{ij} een $(m-1)k_ik_j$-dimensionale ruimte is en $\alpha_1, \ldots, \alpha_t) \in T_t$ werkt op $x \in V_{ij}$ door het te sturen naar $\alpha_i \alpha_j^{-1}.x$.
De ring van alle polynomiale afbeeldingen van N_2 naar F is bijgevolg

$$\begin{aligned} S &= F[V_{ij} : 1 \leq i \neq j \leq t] \\ &= F[v_{ij}(k,l,\alpha) : 1 \leq k \leq k_i, 1 \leq l \leq k_j; 1 \leq \alpha \leq m-1] \end{aligned}$$

De aktie van T_t of S is diagonaal en wordt gegeven door een $t \times s$ matrix met koëficiënten in $\mathbb{Z}$ waarbij

$$s = \text{Kdim} S = 2(m-1) \sum_{i \neq j} k_i k_j$$

De kolom van de variabele $v_{ij}(k,l,\alpha)$ bevat een 1 op de $i$derij, een -1 op de $j$de rij en 0 overal elders. De invariantenring wordt voortgebracht door devolgende elementen. Zij $z \leq s' \leq t$ een rij $(i_1, \ldots, i_s)$ een cyclus van verschillende getallen uit $\{1, \ldots, t\}$ zodanig dat het kleinste getal i_1 is Dan verkrijgen we invarianten :

$$V_{i_1 i_2} \times V_{i_2 i_1} \times \ldots \times V_{i_{s-1}} \times V_{i_s i_1}$$

die voortgebracht worden door

$$v_{i_1 i_2}(k_1, l_1, \alpha_1) v_{i_2 i_3}(k_2, l_2, \alpha_2) \ldots v_{i_s i_1}(k_s . l_s, \alpha_s)$$

waarbij k_i, l_i en α_i over alle toelaatbare waarden variëren. Men kan nu aantonen dat alle invarianten combinaties zijn van deze aldus bekomen elementen.
Laat ons nu onszelf nog beperken tot het speciale geval van slechts twee komponenten. Dan krijgen we :

Stelling 4.2. : De étale lokale struktuur van de ring $R_{m,n}$ in een punt ξ dat korrespondeert mat een semi-simpele representatie die uiteenvalt in een irreducibele k en l dimensionale komponent is

$$\mathbb{A}^{(m-1)(k^r + l^r) + 2} \times W$$

waarbij de koördinaatring van W gelijk is aan

$$F[x_i y_j : 1 \leq i, j \leq kl(m-1)] / I_2$$

waar I_2 het iedeaal is voortgebracht door alle 2 bij 2 minoren van $(x_i y_j)_{ij}$.

Bewijs :
We hebben reeds gezien dat de étale snede gelijk is aan

$$\mathbb{A}^{(m-1)(k^2+l^2+2)} \times N_2/T_2$$

waarbij $N_2 = V_{12} \oplus V_{21}$ en beide komponenten zijn $(m-1)kl$ dimensionaal. Een $(\alpha, \beta) \in T_2$ werkt op de voortbrengers $x_i \in S(V_{12})$; $1 \leq i \leq (m-1)kl$ door het te sturen naar $\alpha\beta^{-1}$ en op $y_j \in S(V_{21})$, $1 \leq j \leq (m-1)kl$ door het te sturen naar $\alpha^{-1}\beta y_i$. De invariantenring is bijgevolg de deelring van $F[x_i, y_j : 1 \leq i, j \leq (m-1)kl]$ door alle $x_i y_j$. De relaties tussen deze invarianten worden voortgebracht door de 2 bij 2 minoren van de matrix $(x_i y_j)_{i,j}$.

Stelling 4.3. **:** Zij $\xi \in V$ dat korrespondeert met een semi-simpele representatie bestaande uit twee verschillende irreducibele komponenten, dan is V niet regulier in ξ tenzij $(m, n) = (2, 2)$.

Bewijs :
Door het étale snede lemma volstaat het de regulariteit na te gaan van de étale snede in de oorsprong. We moeten nagaan dat

$$R = F[x_i y_j : i \leq i, j \leq (m-1)kl]/I_2$$

geen veeltermring is. De Poincaré reeks van R kunnen we eenvoudig berekenen m.b.v. de Plethysm-formule

$$\begin{aligned} P(R, t) &= \sum_{s=0}^{\infty} S^1(F^{kl(m-1)}) \otimes S^s(F^{kl(m-1)}) \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \binom{s+kl(m-1)-1}{s}^2 t^{2s} \end{aligned}$$

Vermits R een kwotiënt is van $F[x_i y_j : i, j]$ is de enige mogelijkheid waarop $P(R, t)$ een zuiver invers kan zijn dat

$$P(R; t) = \frac{1}{(1-t^2)^{\alpha}} \qquad (*)$$

waarbij $\alpha = \mathbf{Kdim} R = 2kl(m-1) - 1$. Als we in de machtreeksontwikkeling van $(*)$ de koëfoiciënt van t^2 vergelijken met de korresponderende koëfficient van $P(R; t)$ krijgen we de vergelijking

$$k^2 l^2 (m-1)^2 = 2kl(m-1) - 1$$

De enige oplossing in $\mathbb{N}_+$ is $k = l = 1$ en $m = 2$.

Uit deze stelling leiden we dus onmiddellijk af dat $R_{m,n}$ enkel regulier is voor $(m, n) = (2, 2)$. Verder kunnen we zelfs aantonen dat het open deel van de reguliere punten van $V = V_{m,n}$ samenvalt met het open deel van de irreducibele representaties.

Voor de spoorring zelf kan men een analoge redenering opbouwen. We beperken ons hier tot de formulering van het resultaat. Details kunnen gevonden worden in [LP].

Stelling 4.4. : De étale snede van de sp[oorring van m generieke n bij n matrixen in een punt $\xi \in V_{m,n}$ dat correspondeert met een semi-simpele representatie van type $(1,k_1;1,k_2;\ldots;1,k_t)$ is isomorf met een veeltermring in $(m-1)(k_1^2+\ldots+k_t^2)+t$ variabelen over de ring

$$\Gamma = \begin{bmatrix} M_{k_1}(R) & W_{1_2} & \ldots & W_1t \\ W_{2_1} & M_{k_2}(R) & \ldots & W_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \\ W_{t1} & W_{t2} & \ldots & M_{k_t}(R) \end{bmatrix}$$

waarbij R de étale snede in ξ van $V_{m,n}$ en W_{ij} een k_i by k_j blok is van vectorruimten isomorf is met

$$W_{ij}(1,1,1) = \{s \in S : sv_{ij}(1,1,1) \in R\}$$

waar S en N_{ij} als voorheen gedefinieerd zijn.

We zullen deze stelling nu gebruiken om Stelling 4.1. te bewijzen. De strategie van het bewijs is devolgende : kies een gepast punt ξ in $V = V_{m,n}$. Als $\text{gldim}(\mathbb{T}_{m,n}) < \infty$ dan moet ook de étale snede in dat punt eindige globale dimensie hebben.
Nu kiezen we ξ zodat elk ontbindbaar gegradeerd projectief moduul van de étale snede dezelfde Poincaré reeks heeft en dan kunnen we wederom eindige gldim testen op het zuiver invers zijn van de Poincaré reeks wegens §2 mogen we onderstellen dat $n \leq 3$.

Bewijs stelling 4.1. :

Bewijs een punt $\xi \in V$ dat korrespondent met de som van n verschillende één dimensionale representaties dan is de centrale étale snede een veeltermring in $(m-1)n+n$ variabelen over de ring van invarianten onder T_n op $\oplus_{1 \leq i \neq j}^{n} V_{ij}$ waarbij iedere V_{ij} $m-1$-dimensionaal is en de aktie wordt gegeven door

$$(\alpha_1,\ldots,\alpha_n).v_{ij}(l) = \alpha_i\alpha_j^{-1}v_{ij}(l)$$

Deze invariantenring R wordt voortgebracht (zoals reeds boven vermeld) door de elementen van

$$\begin{cases} V_{ij} \times V_{ji} \\ V_{i_1i_2} \times V_{i_2i_3} \times V_{i_3i_1} \\ \vdots \\ V_{i_1i_2} \times V_{i_2i_3} \times \ldots \times V_{i_{n-1}i_n} \times V_{i_ni_1} \end{cases}$$

Uit stelling 4.4. leiden we af dat ieder onontbindbaar gegradeerd projectief modull P over de étale snede van $\mathbb{T}_{m,n}$ in ξ (als we het veeltermgedeelte vergeten) van de volgende vorm is :

$$P_i = \bigoplus_{j=1}^{n} W_{ij}$$

met $W_{ii} \overset{(D)}{=} R$. De Poincaré reeksen van alle W_{ij} met $i \neq j$ zijn gelijk aan deze van

$$W = \{s \in S : sv_{21}(1) \in R\}$$

We moeten dus nagaan wanneer

$$P(R,t) + (n-1)P(W,t)$$

een zuiver invers $f(t)^{-1}$ kan zijn. Nu weten we :

$$\begin{cases} P(R,t) = \dfrac{p(t)}{(1-t)^{\alpha_1}\dots(1-t^n)^{\alpha_n}} \\ P(W,t) = \dfrac{q(t)}{(1-t)^{\alpha_1}\dots(1-t^n)^{\alpha_n}} \end{cases}$$

en bijgevolg moet $f(t)$ een produkt zijn van onontbindbare faktoren van $1-t^i$ voor $1 \leq i \leq n$. Verder weten we dat de orde van de pool in $t=1$ gelijk moet zijn aan $\mathrm{Kdim}(R) = (n-1)((m-1)n-1) = d$. Dus

$$f(t) = (1-t)^d \Pi \quad (\text{factors } \neq 1-t)$$

Bijgevolg voldoet $f(t)^{-1}$ aan de functionaal vergelijking

$$(1) : \frac{1}{f\left(\frac{1}{t}\right)} = (-1)^d . t^{\deg f} . \frac{1}{f(t)}$$

Anderzijds weten we dat R een Gorenstein domein is van dimensie d en dus voldoet aan

$$(2) : P(R;\frac{1}{t}) = (-1)^d t^{\alpha} . P(R;t)$$

voor zekere $\alpha \in \mathbb{Z}$. Bijgevolg krijgen we :

$$\begin{aligned} P(P;\frac{1}{t}) &= P(R;\frac{1}{t}) + (n-1)P(W;\frac{1}{t}) \\ &= (-1)t^{\alpha} P(R,t) + (n-1)P(W;\frac{1}{t}) \end{aligned}$$

en anderzijds is

$$\begin{aligned} P(P;\frac{1}{t}) &= (-1)^d t^{\deg f} . P(P,t) \\ &= (-1)^d t^{\deg f} . P(R,t) + (n-1)(-1)^d t^{\deg f} P(W;t) \end{aligned}$$

Dus krijgen we in $Z[[t,t^{-1}]]$ de gelijkheid :

$$(**)\quad (-1)^d t^\alpha P(R;t) + (n-1)P(W;\frac{1}{t}) = (-1)^d t^{\deg f} P(R;t) + (n-1)(-1)^d t^{\deg f} P(W;t)$$

Als we nu reduceren module $n-1$ krijgen we

$$(-1)^d t^\alpha P(R;t) \equiv (-1)^d t^{\deg f} P(R;t) \qquad \text{mod } (n-1)$$

Bijgevolg is deg $f = \alpha$ en Stanley bewees dat $\alpha = (m-1)n(n-1)$. Daarom geldt :

$$f(t) = (1-t)^d(1 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_{n-1}t^{n-1})$$

De eerste termen in de machtreeksontwikkeling van $f(t)^{-1}$ zijn :

$$1 + (d - a_1)t + \left[\frac{d(d+1)}{2} - da_1 + a_1^2 - a_2\right] t^2 + \ldots$$

En anderzijds berekenen we eenvoudig dat :

$$\begin{cases} P(R;t) = 1 + (m-1)\dfrac{n(n-1)}{2}t^2 + \ldots \\ P(W;t) = (m-1)t + (n_2)(m-1)^2 t^2 + \ldots \end{cases}$$

Aldus

$$P(P;t) = 1 + (n-1)(m-1)t + (m-1)(n-1)\left[\frac{n}{2} + (m-1)(m-2)\right] t^2 + \ldots$$

Een vergelijking van de koëfficiënten van t levert :

$$\begin{aligned} a_1 &= d - (m-1)(n-1) \\ &= [(n-1)(m-1)-1](n-1) \end{aligned}$$

Tenslotte weten we dat a_1 kleiner of gelijk is aan het aantal ontontbindbare faktoren in het resterende deel van $f(t)$. Dus : $a_1 \leq n-1$ en dit levert de ongelijkheid

$$[(n-1)(m-1)-1] \leq 1.$$

Het is duidelijk dat hiervan de enig mogelijke oplossingen in $\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ zijn :

$$(m,n) = (2,2); (3,2) \quad \text{en} \quad (2,3)$$

In het laatste hoofdstuk zullen we nu aantonen dat $\mathbb{T}2,3$ inderdaad regulier is.

Hoofdstuk 5 : Beschrijving van de gekende reguliere spoorringen.

De hierboven verkregen informatie kunnen we schematisch als volgt voorstellen :

n \ m	1	2	3	4	5
5	+	−	−	−	−
4	+	−	−	−	−
3	+	+	−	−	−
2	+	+	+	−	−
1	+	+	+	+	+

waarbij we een plusteken plaatsten indien $\mathrm{gldim}(\mathbb{T}_{m,n}) < \infty$. We hebben dus aangetoond dat de studie van eindig dimensionale representaties maar drie niet-kommutatieve reguliere spoorringen oplevert. In deze sektie willen we een expliciete beschrijving geven van deze reguliere spoorringen.

(a) : Twee generieke 2 bij 2 matrixen.

Wanneer we ons beperken tot 2 bij 2 matrixen, moet men slechts rekening houden met devolgende twee identiteiten (en hun gevolgen) :

(1) : $A^2 - Tr(A).A + D(A) = 0$
(2) : $AB + BA = Tr(AB) - Tr(A)Tr(B) + Tr(A)B + Tr(B).A$
Laat ons nu de F-deelalgebra R bekijken van $\Delta_{2,2}$ voortgebracht door de elementen

$$\{Tr(X_1), Tr(X_2), D(X_1), D(X_2), Tr(X_1, X_2)\} = (*)$$

Gebruikmakend van de identiteiten (1) en (2) kan man eenvoudig nagaan dat de F-deelalgebra $R\{X_1, X_2\}$ van $\Delta_{2,2}$ een eindig moduul is over de ring R voortgebracht door de elementen

$$\{1, X_1, X_2, X_1X_2\} = (**)$$

Nu is het duidelijk dat $G_{2,2} \subset R\{X_1, X_2\} \subset \Delta_{2,2}$ en vandaar dat $\mathrm{Kdim}(R) = \mathrm{trdeg}_F K_{2,2} = 5$. Een onmiddellijk gevolg hiervan is dat het voortbrengend stel (*) algebraisch onafhankelijk is, of m.a.w., R is de commutatieve veeltermring

$$F[Tr(X_1), Tr(X_2), D(X_1), D(X_2), Tr(X_1X_2)]$$

Verder weten we dat $G_{2,2} \subset R\{X_1, X_2\} \subset \mathbb{T}_{2,2}$ en $Tr(R\{X_1, X_2\}) \subset R\{X_1, X_2\}$. Bijgevolg is $R\{X_1, X_2\} = \mathbb{T}_{2,2}$. Laat nu K het breukenlichaam zijn van R dan weten we dat $\dim_K(\Delta_{2,2}) \leq 4$ omdat $K(X_1, X_2)$ een voortbrengend stel (**) heeft. Anderzijds :

$$\dim_K(\Delta_{2,2}) = \dim_{K_{2,2}}(\Delta_{2,2}).\dim_K(K_{2,2}) = 4.\dim_K(K_{2,2})$$

waaruit we kunnen besluiten dat $K = K_{2,2}$ en het stel (**) is lineair onafhankelijk. Dit levert een bewijs voor :

Stelling 5.1. : (Procesi, Formanek)

(1) : $R_{2,2} = F[Tr(X_1), Tr(X_2), D(X_1), D(X_2), Tr(X_1X_2)]$

(2) : $\mathbb{T}_{2,2} = R_{2,2}1 \oplus R_{2,2}.X_1 \oplus R_{2,2}.X_2 \oplus R_{2,2}.X_1X_2.$

Tot voor kort bestond een analoge beschrijving van $\mathbb{T}_{3,2}$ niet in de literatuur. Samen met M. Van de Bergh slaagde de auteur er in zulke beschrijving te vinden.

(b): Drie generieke 2 bij 2 matrixen.

Ditmaal starten we met de F-deelalgebra R van $\Delta_{3,2}$ voortgebracht door de elementen

$$(+) = \{Tr(X_1), Tr(X_2), Tr(X_3), D(X_1), D(X_2), D(X_3),$$
$$Tr(X_21X_2), Tr(X_2X_3), Tr(X_1X_3)\}$$

Wederom gebruik makend van de identiteiten (1) en (2) kan men inzien dat de F-deelalgebra van $\Delta_{3,2}$, $R\{X_1, X_2, X_3\}$ een eindig R-moduul is met voortbrengend stel

$$(++) = \{1, X_1, X_2, X_3, X_1X_2, X_1X_3, X_2X_3, X_1X_2X_3\}$$

Omdat $G_{3,2} \subset R\{X_1, X_2, X_3\} \subset \mathbb{T}_{3,2}$ weten we dat $\text{Kdim}R = \text{trdeg}_F(K_{3,2} = 9$. Wederom besluiten we hieruit dat het stel generatoren (+) algebraisch onafhankelijk is, of m.a.w. R is de veeltermring

$$F[Tr(X_1), Tr(X_2), Tr(X_3), D(X_1), D(X_2), D(X_3), Tr(X_1X_2), Tr(X_2X_3), Tr(X_1X_3)]$$

In de tweede sektie zagen we dat $Tr(X_1^0, X_2^0X_3^0) = S_3(X_1^0, X_2^0, X_3^0)$. Bijgevolg is ook $Tr(X_1X_2X_3) \in R\{X_1, X_2, X_3\}$ en krijgen we $Tr(R\{X_1, X_2, X_3\}) \subset R\{X_1, X_2, X_3\}$ waaruit onmiddellijk volgt dat $R\{X_1, X_2, X_3\} = \mathbb{T}_{3,2}$.
Zij nu K het breukenlichaam van R dan weten we

$$\dim_K(\Delta_{3,2}) = \dim_k(K\{X_1, X_2, X_3\}) \leq 8$$

omdat $K\{X_1, X_2, X_3\}$ als K-vektorruimte het voortbrengend stel (++) heeft.
Nu beweren we dat $Tr(X_1X_2X_3) \notin K$. Want anders zou, vermits $Tr(X_1X_2X_3)$ lineair is in elk van de matrixvariabelen, $Tr(X_1X_2X_3)$ kunnen geschreven worden als

$$\alpha\ Tr(X_1)Tr(X_2)Tr(X_3)$$
$$+\beta\ (Tr(X_1)Tr(X_2X_3) + Tr(X_2)Tr(X_1X_3) + Tr(X_3)Tr(X_1X_2))$$

en als we nu onze matrix-variabelen als volgt specialiseren

$$X_1 \vdash \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; X_2 \vdash \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; X_3 \vdash \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dan krijgen we een tegenspraak. Als we al onze informatie kombineren we :

$$8 \leq \dim_K(K_{3,2}).\dim_{K_{2,2}}(\Delta_{3,2}) = \dim_K(\Delta_{3,2}) \leq 8$$

em bijgevolg is het stel voortbrebgers (++) lineair onafhankelijk.
Wanneer we nu het spoor neman van de identiteit :

$$(X_1X_2X_3)^2 - Tr(X_1X_2X_3)X_1X_2X_3 + D(X_1)D(X_2)D(X_3) = 0$$

en de eerste term vereenvoudigen door veelvuldig gebruik te maken van de identiteit (2) dan toont men aan dat $Tr(X_1X_2X_3)$ voldoet aan de kwadratische vergelijking over R :

$$X^2 - AX + B = 0$$

waarbij :

$$\begin{aligned} A = {} & Tr(X_1)Tr(X_2X_3) + Tr(X_2)Tr(X_1X_3) + Tr(X_3)Tr(X_1X_2) \\ & - Tr(X_1)Tr(X_2)Tr(X_3) \\ B = {} & D(X_1)Tr(X_2X_3)^2 + D(X_2)Tr(X_1X_3)^2 + D(X_3)Tr(X_1X_2)^2 \\ & - Tr(X_1)Tr(X_2)Tr(X_1X_2)D(X_3) - Tr(X_2)Tr(X_3)Tr(X_2X_3)D(X_1) \\ & - Tr(X_1)Tr(X_3)Tr(X_1X_3)D(X_2) \\ & + Tr(X_1)^2D(X_2)D(X_3) + Tr(X_2)^2D(X_1)D(X_3) + Tr(X_3)^2D(X_1)D(X_2) \\ & - 4D(X_1)D(X_2)D(X_3) + Tr(X_1X_2)Tr(X_1X_3)Tr(X_2X_3) \end{aligned}$$

en dit besluit het bewijs van

Stelling 5.2. : (Le Bruyn, Van den Bergh)
Zij R de kommutatieve veeltermring
$F[Tr(X_1), Tr(X_2), Tr(X_3), D(X_1), D(X_2), D(X_3), Tr(X_1X_2), Tr(X_2X_3), Tr(X_1X_3)]$

(1) : $R_{3,2} = R.1 \oplus R.Tr(X_1X_2X_3)$
(2) : $\mathbb{T}_{3,2} = R.1 \oplus R.X_1 \oplus RX_2 \oplus RX_3 \oplus RX_1X_2 \oplus RX_1X_3 \oplus RX_2X_3 \oplus RX_1X_2X_3$

(c) : Twee generieke 3 bij 3 matrixen

Laat ons vooreerst enkele resultaten van M. Artin en W. Schelter in herinnering brengen. Zij R een positief gegradeerde F-algebra met $R_0 = F$ en R wordt voortgebracht door eindig veel homogene ewlementen $x_1, \ldots, x_r$ die voldoen aan de $\frac{r(r-1)}{2}$ relaties :

$$x_i.x_j = \phi_{ij} \qquad (1 \leq i \leq j \leq r)$$

waarbij ϕ_{ij} een som is van stijgende monomen kleiner dan $x_j x_i$ in de lexicografische ordening die verkregen wordt door te stellen dat $x_i < x_j$ als $i < j$. Wanneer de vormen $[x_i, x_j, x_k]$ voor $k > j > i$ consistent zijn dan kan men het diamant lemma van Bergman [Be] toepassen. Dit lemma zegt ons dat R een F-basis bezit bestaande uit monomen van de vorm

$$X_1^{\alpha_1} \dots X_r^{\alpha_r}$$

voor zekere $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}$. Als R bovendien Noethers is, dan heeft Annick aangetoond dat R eindige globale dimensie heeft.

Stelling 5.3. : De spoorring van 2 generieke 3 bij 3 matrixen heeft globale dimensie 10.

Bewijs :
Omdat $\mathbb{T}_{2,3} = \mathbb{T}^0[Tr(X_1), Tr(X_2)]$ waar $\mathbb{T}^0$ de spoorring is van 2 generieke spoornul 3 bij 3 matrixen X en Y, is het voldoende aan te tonen dat gldim $(\mathbb{T}^0) = 8$. De homogene komponenten van de multi-gegradeerde Cayley-Hamilton veelterm van $X + Y$ geeft ons devolgende betrekkingen :

$$\begin{aligned}
g_1 &: X^3 + CX + F = 0 \\
g_2 &: X^2Y + XYX + YX^2 + CY + DX + H = 0 \\
g_3 &: Y^2X + YXY + XY^2 + DY + EX + G = 0 \\
g_4 &: Y^3 + EY + I = 0
\end{aligned}$$

waarbij

$$\begin{gathered}
C = -\frac{1}{2}T(X^2); D = -T(XY); E = -\frac{1}{2}T(Y^2) \\
G = -T(XY^2); H = -T(YX^2) \\
F = -\frac{1}{3}T(X^3); I = -\frac{1}{3}T(Y^3)
\end{gathered}$$

Nu kunnen we een F-algebra Λ definiëren als :

$$\Lambda = F[C, D, E, F, G, H, I] < X, Y > /(g_1, g_2, g_3, g_4)$$

Omdat g_1 en g_4 slechts uitdrukken dat $X^3 + CX$ en $Y^3 + EY$ centrale elementen zijn en vermits we dit ook kunnen bekomen uit g_2 en g_3 weten we dat Λ gelijk is aan de F-algebra

$$F[C, D, E, G, H] < X, Y > /(g_2, g_3)$$

Als we als lexicografische ordering $Y > X$ kiezen, kan men nagaan dat de overlapvormen tussen de hoogste graadstermen van g_2 en g_3 geen nieuwe relaties geven. Daarom heeft Λ een F-basis bestaande uit de monomen :

$$C^a D^b E^c G^d H^e X^f (XY)^g Y^h$$

Om nu na te gaan dat gldim $(\Lambda) = 8$ volstaat het te bewijzen dat Λ een eindig moduul is over een Noetherse commutatieve deelring. Zij nu J het element :

$$2XYXY + X^2Y^2 + YX^2Y + YXYX + XY^2X + 2DXY + DYX + GX + HY$$

dan kan men nagaan dat J een centraal element is in Λ. Vermits de overlap-vormen

$$[Y, YX, YX], [YX, YX, X], [YX.YX, YX]$$

geen nieuwe relaties geven, weten we dat eem F-basis voor

$$\Lambda/(C, D, E, F, G, H, I, J)$$

gegeven wordt door

$$X^{\epsilon_1}(YX)^{\epsilon_2}Y^{\epsilon_3}$$

waarbij $\epsilon_1, \epsilon_3 \in \{0, 1, 2\}$ en $\epsilon_2 \in \{0, 1\}$. Door een gegradeerde versie van het lemma van Nakayama leiden we hieruit af dat Λ een eindig moduul is over de veeltermring :

$$R = F[C, D, E, F, G, H, I]$$

Bijgevolg heeft Λ eindige globale dimensie en is dus gesloten onder het spoor-nemen. Vermits Λ ook Cohen-Macaulay is via een resultaat van Vasconcelos, $rk_R(\Lambda) = 18$ en dus moet de p.i.-graad van Λ gelijk zijn aan 3. Er is een natuurlijke afbeelding

$$\phi : \Lambda \to \mathbb{T}^0$$

die gegeven wordt door

$$X \vdash X_1 - \frac{1}{3}T(X_1)$$
$$Y \vdash X_2 - \frac{1}{3}T(X_2)$$

Deze afbeelding splitst omdat Λ p.i. graad 3 heeft en gesliten is obder sporen. Bijgevolg is ϕ een isomorphisme. Dus $\mathbb{T}^0 \cong \Lambda$ en bijgevolg is gldim $(\mathbb{T}_{2,3}) = 2 + \text{gldim}(\mathbb{T}^0) = 10$

Literatuurlijst.

[Ar] : Artin M. ; *On Azumaya algebras and finite dimensional representations of rings*;J.Algebra 11 (1969) 532-563.

[AS] : Artin - Schelter ; *Integral ring homomorphisms* ; Adv. in Math. 39 (1981) 289-329.

[AG] : Auslander - Goldman ; *Maximal orders* ; TAMS 97 (1960) 1-24.

[Bj] : Björner ; *Shellable and Cohen-Macaulay partially ordered sets* ; TAMS 260 (1980) 159-183.

[Ch] : Chamarie ; *Anneaux de Krull noncommutatifs* ; Univ. Claude- Bernard Lyon (1981).

[CJ] : Chatters - Jordan ; *Noncommutative unique factorization domains* ; preprint (1984).

[DP] : De Concini - Procesi ; *A characteristic free approach to invariant theory* ; Adv. in Math. 21 (1976)330-354.

[D2] : De Concini - Procesi - Eisenbud ; *Young diagrams and determinantal varieties* ; Inv.Math. 56 (1980) 129-165.

[Fi] : Fields ; *On the global dimension of skew-polynomial rings* ; J. Algebra 14 (1970) 528-530.

[Fo] : Formanek ; *Invariants and the ring of generic matrices* ; J. Algebra 89 (1984) 178-223.

[Fs] : Fossum ; *The divisor classgroup of a Krull domain* ; Ergebn. Math. 74 (1973) Springer.

[Ga] : Garsia ; *Combinatorial methods in the theory of Cohen-Macaulay rings* ; Adv. Math. 38 (1980) 229-266.

[GY] : Grace-Young ; *The algebra of invariants* ; Cambridge (1903).

[GH] : Griffiths - Harris ; *Principles of algebraic geometry* ; John Wiley (1978).

[Gu] : Gurevich ; *Foundations of the theory of algebraic invariants* ; Noordhoff (1964).

[HR] : Hochster - Roberts ; *Rings of invariants acting on regular rings are Cohen-Macaulay* ; Adv. Math. 13 (1974) 115-175.

[HP] : Hodge - Pedoe ; *Methods of algebraic geometry* ; Cambridge (1968).

[Kl] : Kleiman ; *Geometry on Grassmannins and applications to spliting bundles and smoothing cycles* ; Publ IHES 36 (1969) 281-297.

[La] : Lam ; *Algebraic theory of quadratic forms* ; Benjamin (1973).

[LP] : Le Bruyn - Procesi ; *The étale local structure of trace rings of generic matrices* ; preprint (1985).

[Mc] : Mc Connell ; *On the global dimension of some rings* ; Math Z. 153 (1977) 253-254.

[Pr] : Procesi ; *Rings with polynomial identities* ; Marcel Dekker (1973).

[P2] : Procesi : *Finite dimensional representations of algebras* ; Israel J. Math. 19 (1974) 169-184.

[P3] : Procesi ; *The invariant theory of n by n matrices* ; Adv. Math. 19 (1976) 306-381.

[Sch]: Schelter ; *Affine p.i.-rings are catenary* ; J. Algebra (1974).

[Sc] : Schur ; *Neue anwendungen der integralrechnung auf probleme der invariantentheorie II*, Ges.Abh. II (1978) 460-484.

[Si] : Siberski;*Algebraic invariants for a set of matrices* ; Sib.Math.J. 9 (1968) 115-124.

[S3] : Stanley ; *Some combinatorial aspects of Schubert calculus* ; Springer LNM 579 (1977) 217-251.

[VV] : Van Oystaeyen - Verschoren ; *Noncommutative algebraic geometry* ; Springer LNM 887 (1979).

[We] : Weyl ; *Zur darstellungstheorie und invariantenabzahlung der projektiven,der komplex- und der drehungsgrupe* ; Ges. Abh. III (1968) 1 - 24.