(vingeroefeningen)

proefschrift ter verkrijging van de graad van licentiaat in de wiskunde aan de universitaire instelling antwerpen , te verdedigen door :

lieven le bruyn

Promotor : Prof. Dr. F. Van Oystaeyen

Wilrijk - Schilde , mei 1980

voor annke ,

die nog altijd een ringetje tegoed heeft
van mij,een niet-kommutatief natuurlijk!

(bij wijze van dankwoord 1)

tja annke,'k weet het

je zal waarschijnlijk zeggen : waarom heb je deze thesis niet opgedragen aan je ouders, zij zijn het tenslotte die het je mogelijk maakten vier jaar deze onzin te bestuderen, of waarom is ze niet opgedragen aan "de" fred (van oystaeyen) die grijs haar moet gekregen hebben van al die thesissen die je wilde beginnen en dan weer stopte,wiens uitdagend ongeloof je stimuleerde om dagenlang op onbewijsbare dingen te zwoegen en die je (godzijdank) met een klap terug op de grond bracht als je weer teveel aan het zweven was, of waarom staat alains (verschoren) naam niet op de vorige bladzijde,al was het maar omdat je hem teveel uit de armen van linda haalde met stompzinnige vragen over kwasi-koherente en andere schoofjes,of die van jan (van geel) omdat hij je niet teveel in valuatie-achtige toestanden gedreven heeft, of waarom niet de naam van één van die andere al-dan-niet-kompetente-kumuleerders van den uia , wiens algebra-spot je genoeg prikkelde om uren te verspelen in de communications of andere wreed interessante lektuur, of waarom is deze thesis niet opgedragen aan moniekske om wiens lessenaar toch een groot deel bijëengekribbeld werd , of waarom niet aan de verkenners en andere toffe mensen die er gelukkig (ondanks alles) nog rondlopen in skouting en die je op tijd en stond uit je lol-arm wiskunde wereldje sleurden , of waarom...

ja annke, zonder al deze mensen (en nog een paar honderd anderen) zou deze thesis nooit bij elkaar getyppeld zijn en daarvoor ben ik elk van hen al onnoemelijk veel dankbaar, maar eigenlijk nog meer omdat mijn kontakt met hen me meer-mens heeft gemaakt.

maar niemand van hen heeft dit werk intenser meebeleefd dan jij. jij moest mijn kuren verdragen wanneer de fred weer es 'n bewijs gekraakt had , jij hebt urenlang gebral over zariski-centraal en andere ringetjes moeten aanhoren terwijl je zelf wel es wat kwijt wilde over je stage of de vrouwenbeweging , en dan die overaftelbaar veel wiskunde-uren die we met plezanter dingen hadden kunnen vullen.
bedankt voor je steun en vooral voor je geduld en verder voor al die zaken waarvan ik best weet dat ik je er eigenlijk niet voor bedanken moet,maar toch. 't begint krokodiltraan-achtig te worden,maar daarom niet minder gemeend.

niet je toekomstige , maar je huidige

lieven.

ps : overigens ben ik me er al te best van bewust dan de maatschappelijke relevantie van dit werk eerder gering is.

(I hope my next thesis will be better) bij wijze van verontschuldiging (1)

donderdagavond, 22 mei, half elf ('s avonds)

als ik een braaf uia-studentje was zou ik op dit moment in maximum driehonderd woorden dit werkje uit de doeken moeten doen. een jaar zweten, hopen, fouten maken, vloeken, plezier beleven, typpex met hopen gebruiken, freds tegenvoorbeelden ondergaan, ontelbare artikels ontcijferen, de euforie van een bewijs en de fout ontdekken in de triviale stap, uren ver-typpelen,...dit alles versmachten in driehonderd armzalige woordjes ?

neen, dank je, wie echt wil weten waarover deze thesis gaat , wie echt wil weten wat me bezielde deze dingen te bestuderen, wie echt wil weten aan welke bewijzen ik onnoemelijk veel plezier beleefde en welke kemels ik geschoten heb.... die moet maar es op 'n avond met me naar den 'tivo' trekken en dan wil ik het hem/haar wel effe vertellen bij een glas ijskoude trappist, keiharde tom robbinson band-muziek, een zomers avondzonnetje, gegier van toffe mensen dat het gebral op den teevee over de staatshervorming overstemt en op de muur affieches van dingen die me echt raken, kortom, op een avond als deze wil ik honderduit praten en me niet in een keurslijf van driehonderd woorden laten opsluiten.

en voor al die verdorde mathematici die dit niet begrijpen, die alle theorieën van euklides tot van oystaeyen op hun duimpje kennen maar die nooit de passie van een probleem hebben ondervonden, die zichzelf in hun wiskundig ivoren torentje hebben opgesloten en die voor niets anders meer kunnen warm lopen , neurie ik effe met joan armatrading mee : show some emotion

verder wens ik jullie allemaal meer avonden als deze.

bij wijze van bladwijzer :

hoofdstuk één : AFFIENE SCHEMA'S

bij wijze van verontschuldiging (2)

Indien de lezer vertrouwd is met het werk van F. Van Oystaeyen en A. Verschoren zal dit eerste hoofdstuk hem/haar niet veel te bieden hebben en raden we hem/haar aan,na een kritische blik op de laatste twee bladzijden,als de bliksem over te springen naar interessanter lektuur,zoals hoofdstuk twee .

In de eerste twee paragrafen wordt er getracht iets meer kijk te krijgen op de topologische ruimten waarmee we werken en die nogal ver liggen van wat we intuïtief onder een topologie verstaan.Vervolgens zullen we met elke links-Noetherse ring een topologische ruimte associëren : Spec(R) de verzameling van alle tweezijdige priemidealen.In het kommutatieve geval is Spec(-) een mooië kontravariante funktor, het is dan ook ontmoedigend dat reeds deze eigenschap niet-kommutatief verdwijnt.De schade valt echter nogal mee : wanneer we beperkingen leggen op onze ringmorfismen (dus overgaan op een deelkategorie) krijgen we weer een mooië funktor. Zoals in het kommutatieve geval geeft Spec(R) ons echter niet genoeg informatie over de ring , als geometrisch objekt is het niet gecompliceerd genoeg om de volledige struktuur van R vast te leggen (voor een lichaam bvb. zijn alle ruimten $\mathrm{Spec}(k[X,Y]/f)$ met f irreducibel, homeomorf).Om dit te verhelpen gaan we boven Spec(R) een schoof zetten doormiddel van symetrische lokalisaties (cfr. Fvo : lnm 444).Deze schoof (struktuur-)

bevat wel de ganse struktuur van R want we kunnen R terug vinden als de globale sekties . Als de Zariski-topologie een basis van T-delen toelaat,dan heeft deze schoof een funktoriële eigenschap tov. ringextenties, zoniet kunnen we boven Spec(R) een bi-schoof zetten (cfr. A. Verschoren, thesis) die zich steeds behoorlijk gedraagt tov. extenties, maar op deze komplikatie (of symplifikatie) zullen we verder niet ingaan.
Een belangrijker probleem echter is dat de lokalisaties ons niet noodzakelijk de sekties boven een open deel opleveren.Daarom is het van groot belang tenminste de staken berekenbaar te praten.Daarvoor dienen we wederom T-voorwaarden op te leggen (T-basis,T-staken).
Het enige nieuws (en dan nog!) dat dit hoofdstuk te bieden heeft zijn twee veralgemeningen van stellingen van Van Oystaeyen (7.12),(7.14).De idèe die achter beide stellingen zit is niet zo revolutionair : Van Oystaeyen-Verschoren hadden een T-basis nodig omdat ze de preschoof goede eigenschappen wilden geven,als we enkel geïnterresseerd zijn in de goede eigenschappen voor de schoof is het voldoende de juiste voorwaarden (T-funktor) op te leggen voor de staken. Verder is het nog de vraag of dit wel een veralgemening is, tot nu toe is er geen enkel voorbeeld bekend van een ring waarvan alle staken T-staken zijn en die toch geen T-basis heeft.

Ondanks het feit dat dit hoofdstuk oude koek herkauwt,was het opnemen ervan noodzakelijk voor mij.Niet alleen omdat het de begrippen en konstrukties invoert waarop we later voortborduren,maar vooral omdat het uitschrijven ervan me dwong vele bewijzen stap voor stap te ontraadselen,een op het eerste zicht saai werkje dat niettemin noodzakelijk was.

I.1 : IRREDUCIEBELE RUIMTEN

(1.1) We volgen in deze paragraaf N. Bourbaki, Comm. Alg. hoofdstuk II , § 4.1 , blz 94 e.v.

(1.2) <u>definitie</u>

Een topologische ruimte noemen we <u>irreduciebel</u> als elke eindige doorsnede van niet-lege opens niet-leeg is.

(1.3) <u>stelling</u>

equivalent zijn :

1. X is irreduciebel
2. iedere niet-lege open ligt dicht
3. iedere open is samenhangend

<u>bewijs</u>

Dat 1. en 2. equivalent zijn volgt uit het feit dat een dichte verzameling elke open snijdt.
3. impliceert 1. , want stel dat U en V disjunkte opens zijn , dan is $U \cup V$ een onsamenhangende open.
1. impliceert 3. , stel dat V open en onsamenhangend is dan is V te schrijven als een disjunkte unie van opens U en V, maar dan is X niet irreduciebel. klaar

(1.4) <u>definitie</u>

Een deel E van X noemen we <u>irreduciebel</u> als E een irreduciebele topologische ruimte wordt in de geinduceerde topologie.

(1.5) <u>stelling</u>

equivalent zijn :

1. E irreduciebel
2. $\overline{E}$ irreduciebel

<u>bewijs</u>

Triviaal, want een open snijdt E als en alleen als ze $\overline{E}$ snijdt. klaar!

(1.6) stelling

1. Als X irreducíebel is dan is iedere niet-lege open ook irreducíebel.
2. Als (U_i) met i in I een open overdekking is van X met $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ voor alle i,j. Als alle U_i irreducíebel zijn dan is X het ook.

bewijs

1. Laat U een niet-lege open in X zijn.Stel V een open deel van U. Dan is V ook open in X en dus dicht in X. Maar dan ligt V natuurlijk ook dicht in U.Dus is U irreducíebel.

2. Laat V een niet-lege open in X zijn.Dan bestaat er een j in I zodat $V \cap U_j \neq \emptyset$. Maar dan is $V \cap U_j$ dicht in U_j. Voor alle i in I geldt: $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ en bijgevolg ook $V \cap U_j \cap U_i \neq \emptyset$, en dus zeker $V \cap U_i \neq \emptyset$. We weten nu dat voor alle i $V \cap U_i$ dicht ligt in U_i en dus ligt V dicht in X.Wegens (1.3) zijn we nu klaar!

(1.7) stelling

Laat $f : X \rightarrow Y$ een continuë afbeelding zijn, dan bewaart f irreducíebele delen.

bewijs

Stel dat U en V opens in Y zijn die f(E) snijden.Bijgevolg snijden $f^{-1}(U)$ en $f^{-1}(V)$ die beiden open zijn, E. Maar wegens E irreducíebel snijdt $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V)$ dan ook E, en dus snijdt $U \cap V$,f(E).klaar!

(1.8) definitie

Een maximale irreducíebele deelverzameling van X noemen we een irreducíebele komponent van X.

Merk op dat wegens (1.5) iedere irreducíebele komponent gesloten is.

(1.9) stelling

1. iedere irreducìebele deelverzameling van X is bevat in een irreducìebele komponent van X.
2. X is de unie van zijn irreducìebele komponenten.

bewijs

1. Laat A de verzameling van de irreducìebele deelverzamelingen van X zijn die een V, irreducìebel, omvatten , partiëel geordend door de inklusie. Laat $B = (B_i)$ i in I een totaal geordende deelverzameling van A zijn. Volgens het lemma van Zorn volstaat het te bewijzen dat $E = \bigcup_i B_i$ irreducìebel is. Zij U en W opens in X die E snijden. Vermits B totaal geordend is, bestaat er een B_j die beiden snijdt, en bijgevolg ook $U \cap W$. klaar!
2. De punten van X zijn irreducìebel en volgens 1, klaar!

(1.10) stelling

Laat (P_i) een eindige overdekking van X zijn, bestaande uit irreducìebele gesloten delen. De irreducìebele komponenten van X zijn juist de maximale elementen der P_i.

bewijs

We mogen ons beperken tot het geval dat geen twee van de P_i's vergelijkbaar zijn. Stel dat E irreducìebel is in X, dan is E een deel van de unie der P_i en E zit bijgevolg in één der P_i. klaar!

(1.11) stelling

U een open deel van X. De afbeelding die aan V , $\overline{V}$ toevoegt is een bijektie tussen irreducìebele deelverzamelingen, gesloten in U en de gesloen irreducìebele deelverzamelingen van X die U snijden. De inverse afbeelding voegt aan Z, $Z \cap U$ toe.

bewijs

Als V gesloten en irreducìebel is in U dan is volgens

(1.5) $\overline{V}$ irreduciebel en $V \cap U = \overline{V}$. Omgekeerd, als Z irreduciebel en gesloten is in X en U snijdt, dan is $Z \cap U$ een niet-lege open deelverzameling van Z en dus wegens (1.6) irreduciebel en dicht in Z. Vermits Z gesloten is, gelt tenslotte $Z = \overline{Z \cap U}$. klaar!

Merk op dat deze bijektie i.h.b. de verzameling van de irreduciebele komponenten van U omzet in irreduciebele componenten van X die U snijden.

I.2 : NOETHERSE RUIMTEN

(2.1) We volgen in deze paragraaf N. Bourbaki, Comm.Alg. hoofdstuk II, § 4.2 ,blz. 97 e.v.

(2.2) <u>definitie</u>

Een topologische ruimte X noemen we <u>Noethers</u> als iedere niet-lege verzameling opens, geordend door de inklusie een maximaal element heeft.

Merk op dat dit equivalent is met : iedere niet-lege verzameling gesloten delen heeft een minimaal element. Ook nog equivalent is : iedere dalende (resp. stijgende) rij gesloten (resp. open) delen wordt stationair.

(2.3) <u>stelling</u>

1. iedere deelruimte van een Noetherse is weer Noethers
2. als (A_i) een eindige overdekking van X is bestaande uit Noetherse dan is X ook Noethers

<u>bewijs</u>

1. Zij A een deelruimte van X, Noethers. Laat F_n een dalende rij geslotens zijn in A. Dan vormen $\overline{F}_n$ een dalende rij geslotens in X en deze rij wordt bijgevolg stationair. Maar dan geldt hetzelfde voor de rij F_n want $F_n = \overline{F}_n \cap A$.
2. Laat G_n een dalende rij geslotens in X zijn, dan worden bij hypothese de rijën $G_n \cap A_i$ stationair. En vermits I eindig is wordt dan ook de rij G_n stationair. klaar!

(2.4) stelling

equivalent zijn:

1. X Noetherse ruimte

2. iedere open is quasi-kompakt

bewijs

1. impliceert 2. : Wegens de voorgaande stelling volstaat het te bewijzen: X Noethers,dan X quasi-kompakt.Laat (U_i) met i in I een open overdekking van X zijn.De verzameling van eindige unies van U_i's is niet leeg en heeft dus bij veronderstelling een maximaal element: V. Omdat V maximaal is geldt $V \cup U_i = V$,voor alle i in I en dus is X = V.

2. impliceert 1. : Laat (U_n) een stijgende rij opens zijn. De unie der U_n is open en bijgevolg quasi-kompakt.Bijgevolg(andermaal) bestaat er een n : $V = \bigcup_m U_m = U_n$, dus wordt de rij stationair. klaar!

(2.5) principe der Noetherse induktie

Zij E een geordende verzameling waarin elke niet-lege deelverzameling een minimaal element bevat. Zij F een deelverzameling van E met de eigenschap dat als a in E zodanig is dat alle strikt kleinere elementen in F zitten, dan a in F. Dan geldt F = E. (herlees zo nodig)

bewijs

Stel dat $E \neq F$ en laat b een minimaal element zijn van E - F. Wegens definitie van b zitten alle strikt kleinere elementen in F, dus ook b . Kontradiktie en klaar!

(2.6) stelling

Als X een Noetherse ruimte is dan zijn er eindig veel irreduciebele komponenten.

bewijs

Laat E de verzameling zijn van de gesloten delen van X geordend door inklusie, F de verzameling van de eindige unies van irreduciebele gesloten deelverzamelingen.Zij Y gesloten zo dat ieder echt gesloten deel in F zit en stel Y niet in F, of sterker nog, stel Y niet irreduciebel. Dan is Y te schrijven als unie van twee echte gesloten delen van Y, Y_1 en Y_2 . Bij hypothese zijn Y_1 en Y_2 dus in F en bijgevolg ook Y in F. Pas nu het principe der Noetherse induktie toe en denk aan (1.10) en dus..........klaar!

I.3 : SPECTRUM VAN EEN NOETHERSE RING

(3.1) Vanaf deze paragraaf zullen we alle ringen links (omwille van zowel symetrie als sympathie-overwegingen) Noethers veronderstellen, tenzij uitdrukkelijk het tegendeel vermeld wordt. Als referenties vermelden we F. Van Oystaeyen LNM 444, N. Bourbaki, Comm.Alg. II, § 4.3. en Grothendieck en Dieudonné , EGA I, § 1.1 .

(3.2) <u>definitie</u>

het <u>spectrum</u> van een ring R, kortweg Spec R is de verzameling van alle twee-zijdige priemidealen van R.

Verder noteren we met V(I) de deelverzameling van Spec R bestaande uit die priemidealen die het twee-zijdig ideaal I van R omvatten.

(3.3) <u>stelling</u>

1. $V(I) = V(\text{rad } I)$
2. Als $I \subset J$, dan is $V(J) \subset V(I)$
3. $V(\Sigma A_i) = \cap V(A_i)$
4. $V(0) = \text{Spec } R$ en $V(R) = \emptyset$
5. $V(I \cap J) = V(I) \cup V(J) = V(IRJ)$

<u>bewijs</u>

1.,2.,3. alsook 4. zijn triviaal

5. Stel P priem zodat P in V(A) U V(B) zit. Dan omvat P A of B en dus in ieder geval ARB, bijgevolg P in V(ARB) Stel nu P in V(ARB) en stel dat P, A niet omvat. Er is dus een a in A - P . Vermits verder P, ARB omvat moet

voor elke b uit B gelden : aRb zit in P en vermits a niet in P zit moet dus b in P zitten voor alle b in B.Dus P omvat B en bijgevolg P in V(A) U V(B).
Verder zij opgemerkt dat $V(A \cap B)$ een deel is van V(ARB) en dat V(A) U V(B) = V(ARB) deel is van $V(A \cap B)$. Tenslotte vervangen we in dit bewijs overal A door I en B door J en dan zijn we klaar!

Merk op dat we wegens deze stelling op X = Spec R een topologie kunnen definiëren met als open delen $X_I = X - V(I)$ met I twee-zijdig ideaal in R. De aldus gedefiniëerde topologie gaat door het leven als de A.<u>Zariski - topologie</u> .

(3.4) <u>stelling</u>

1. X = Spec R is een Kolmogorov-ruimte (T_0)
2. gesloten punten van X corresponderen met maximale idealen van R

<u>bewijs</u>
1. Als $P \neq Q$, dan geldt bvb. dat Q P niet omvat en dus P een element van X_Q en Q niet.
2. P = V(P) als en slechts als P maximaal priem is.

(3.5) <u>definitie</u>
Zij S een irreduciebel deel van X = Spec R, een element P van X noemen we een <u>generiek</u> punt van S als V(P) = S.

(3.6) <u>stelling</u> (Prop. 1.1.5)

Als P een element van X = Spec R is, dan is V(P) irreduciebel.Omgekeerd is elke gesloten irreduciebele verzameling van de vorm V(P) met P het unieke generiek punt.

<u>bewijs</u>
Stel $V(P) = W_1 \cup W_2$ met W_1 en W_2 gesloten verzamelingen dan behoort P tot één van beiden,bvb. P in W_1 , maar dan is V(P) gelijk aan W_1.Dus V(P) is irreduciebel.

Omgekeerd, laat S een irreducibele, gesloten verzameling zijn. Dan is S van de vorm $V(A)$, met A een ideaal van R. We mogen veronderstellen dat A = rad A .
Stel nu dat A geen priemideaal is , dan bestaan er idealen B' , C' niet bevat in A zodat $B'C'$ deel is van A . Stel nu $B = A + B'$ en $C = A + C'$. Dan hebben we $A = B \cap C$, inderdaad , als x in de doorsnede van B en C zit dan is $x = a_1 + b = a_2 + c$. Dus geldt : xRx is in $bRc + A$ dus in A. Maar vermits A een radikaal is kunnen we hieruit besluiten dat x in A is.
Daarom is dus $V(A) = V(B) \cup V(C)$ en voor iedere x niet in A bestaat er een P in $V(A)$ zodanig dat P het ideaal voortgebracht door x niet omvat. Neem nu x in $B - A$, dan geldt $V(A) - V(B) \neq \emptyset$. Maar dit is in kontradiktie met het irreducibel zijn van $V(A)$. Bijgevolg is A priem. Tenslotte stel dat P een ander generiek punt zou zijn , dan is A een deel van P vermits P in $V(A)$ is, en omgekeerd P een deel van A vermits A in $V(P)$ zit.

klaar!

(3.7) stelling

1. X = Spec R is Noethers
2. Ieder open deel is quasi-kompakt
3. Er bestaan slechts eindig veel minimale priemen
4. A ideaal bevat in $J(R)$, dan is de enige omgeving van $V(A)$ de ganse ruimte.

bewijs

1. Zij $B = (X_{Ai})$ een verzameling open delen. Tussen de idealen A_i is er wegens links-Noethers een maximaal element: A_j. Het is triviaal dat X_{Aj} maximaal in B is.
2. Volgt uit 1. en (2.4.2)
3. Volgt uit 1. (2.6) en (3.6)
4. Stel A bevat in $J(R)$, dan bevat $V(A)$ elk maximaal ideaal. Stel B een echt ideaal, dan is B bevat in een maximaal ideaal, dus is $V(A) \cap V(B) \neq \emptyset$, en kan dus $V(A)$ niet in X_B zitten.

klaar!

I.4 : FUNKTORIELE EIGENSCHAPPEN VAN SPEC

(4.1) In deze paragraaf volgen we C. Procesi "Rings with polynomial identities" en A. Verschoren "Les extensions et les schémas non-commutatifs".

(4.2) In het kommutatieve geval kunnen we met elk ringhomomorfisme $f : A \longrightarrow B$ een continuë afbeelding associëren ${}^a f$: Spec $B \longrightarrow$ Spec A . M.a.w. Spec(-) is een kontravariante funktor van de kategorie der ringen met eenheid $\underline{\underline{\text{Ring}}}$ naar de kategorie der topologische ruimten $\underline{\underline{\text{Top}}}$. Zij die dachten dat de E.G.A. op triviale wijze te veralgemenen zou zijn tot het niet-kommutatieve geval zullen geschrokken kennis nemen van het feit dat reeds deze funktoriële eigenschap verloren gaat wanneer we werken met niet-kommutatieve ringen. De reden hiervan is dat deelringen van priemringen niet priem hoeven te zijn. De schade valt echter nogal mee! We zullen aantonen dat Spec(-) terug een mooie kontravariante funktor wordt als we beperkingen opleggen aan de ringhomomorfismen , m.a.w. als we Spec beperken tot een deelkategorie van $\underline{\underline{\text{Ring}}}$.

(4.3) <u>definities</u>

Zij R een ring en M een twee-zijdig R - moduul. Het <u>centrum van M</u> , $Z_R(M)$, bestaat uit die elementen m van M waarvoor : $m.r = r.m$ voor alle r in R. We noemen M een <u>R-moduul à la Artin</u> of <u>R-bimoduul</u> als M als R-moduul voortgebracht wordt door $Z_R(M)$.

Merk op dat de noties moduul en bimoduul samenvallen als R een kommutatieve ring is.

(4.4) Een morfisme van bimodulen is een morfisme van tweezijdige modulen, anders gezegd, de R-bimodulen vormen een volle deelkategorie van de tweezijdige R-modulen. We zullen de kategorie der R-bimodulen noteren als $\underline{\underline{\text{bi}}}(R)$. De kategorie der tweezijdige R-modulen noteren we $\underline{\underline{2}}(R)$. Verder is het natuurlijk duidelijk dat R zelf een R-bimoduul is.

(4.5) *definitie*

een ringhomomorfisme $f : R \to S$ noemen we een *extentie* (à la Procesi) als het S voorziet van de R-bimoduul struktuur, door restriktie van skalairen. We zeggen ook dat S een *R-algebra* is.

(4.6) Het schoolvoorbeeld van een R-algebra is de algebra $R\{X_i\}$,de niet kommutatieve veeltermen in X_i met koëfficiënten in R. De variabelen X_i kommuteren niet onder elkaar, maar wel met elementen van R . Dit betekent dat $Z_R(R\{X_i\}) = Z(R)\{X_i\}$. Meer nog, men kan gemakkelijk nagaan dat iedere R-algebra isomorf is met het kwotiënt van een veeltermalgebra door een tweezijdig ideaal.

(4.7) *definitie*

een R-algebra S noemen we *centraal* als S als R-moduul wordt voortgebracht door zijn centrum $Z_S(S)$. Het ringhomomorfisme noemen we dan een *centrale extentie*.

(4.8) Het schoolvoorbeeld van een centrale R-algebra is $R[X_i]$,de kommutatieve veeltermen in X_i met koëfficiënten in R. De variabelen kommuteren nu onder elkaar en met elementen van R. Verder is iedere centrale R-algebra isomorf met het kwotient van kommutatieve veeltermalgebra.

(4.9) De kategorie met als objekten de ringen met eenheid en als morfismen de extenties noteren we $\underline{\underline{E}}$. De kategorie van ringen met eenheid en centrale extenties $\underline{\underline{E}}^c$.
Noteer verder met $\underline{\underline{Alg}}_R$ resp. $\underline{\underline{Alg}}_R^c$ de kategorie der R-algebras resp. centrale R-algebras.
Men gaat direkt na dat $\underline{\underline{E}}$ een deelkategorie van $\underline{\underline{Ring}}$ is (samenstellingen van extenties zijn extenties).

(4.10) *stelling*

$f : R \to S$ ringhomomorfisme, equivalent zijn:
1. f extentie
2. $i : f(R) \to S$ is een extentie

bewijs

1. impliceert 2. : vermits f i.h.b. een tweezijdig moduulhomomorfisme is geldt $Z_R(S) \subset Z_{f(R)}(S)$ en dus geldt: $S = Z_R(S)\ f(R) = Z_{f(R)}(S)\ i(f(R))$.

2. impliceert 1. : vermits $f : R \to f(R)$ epi is, is f zeker extentie en dus is $i \circ f$ ook een extentie. klaar.

(4.11) stelling

laat $f : R \to S$ een extentie zijn en I een tweezijdig ideaal van R , dan geldt :

1. $f(I)\ S$ en $S\ f(I)$ zijn tweezijdige idealen van S
2. $f(I)\ S = S\ f(I)$

bewijs

$f(I)\ S = f(I)\ f(R)\ Z_R(S) = f(IR)\ Z_R(S) = f(I)\ Z_R(S) = Z_R(S)\ f(I) = Z_R(S)\ f(R\ I) = Z_R(S)\ f(R)\ f(I) = S\ f(I)$.

(4.12) stelling (Prop. 1.2.3)

laat $f : R \to S$ een extentie zijn , dan :

1. Als P in Spec(S) is dan is $f^{-1}(P)$ in Spec(R)
2. ${}^af : \mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R) : {}^af(P) = f^{-1}(P)$ is continu

bewijs

1. Laat P in Spec(S) zitten en a,b elementen van R zodat $aRb \subset f^{-1}(P)$ .Dan geldt dus:

$$\begin{aligned} f(a)\ S\ f(b) &= f(a)\ f(R)\ Z_R(S)\ f(b) \\ &= f(a)\ f(R)\ f(b)\ Z_R(S) \\ &= f(aRb)\ Z_R(S) \\ &\subset P\ Z_R(S) \subset P \end{aligned}$$

Bijgevolg geldt dat of $f(a)$ in P zit of $f(b)$.Maar dan zit natuurlijk a of b in $f^{-1}(P)$.

2. Het is nu duidelijk dat voor alle idealen I van R geldt $({}^af)^{-1}(V(I)) = V(f(I))$ en dus klaar.

(4.13) stelling

Spec(-) : $\underline{\underline{E}} \to \underline{\underline{\mathrm{Top}}}$ is een kontravariante funktor

bewijs

Het is duidelijk dat ${}^a(f\ g) = {}^ag\ {}^af$. klaar.

(4.14) <u>stelling</u>

$i : R \hookrightarrow S$ inklusie en extentie, dan :
1. $Z(R) \subset Z(S)$
2. S priemring dan R priemring
3. S semipriem dan R semipriem

<u>bewijs</u>
1. Neem r in $Z(R)$, dan kommuteert r met alle elementen van R en tevens met alle elementen van $Z_R(S)$, dus met alle elementen van S vermits $S = Z_R(S)\,R$.
2. S priem wil zeggen dat 0 in Spec(S) zit, maar dan is ook $0 = i^{-1}(0)$ in Spec(R), dus ook R priem.
3. S semipriem wil zeggen dat 0 de doorsnede is van alle P in Spec(S), dus ook 0 doorsnede van alle $i^{-1}(P)$ in SpecR en bijgevolg is ook R semipriem. Klaar.

I.5 : PRESCHOVEN EN SCHOVEN

(5.1) Hoewel we in het vervolg van deze thesis vaak zullen veronderstellen dat de lezer bekend is met de voornaamste stellingen uit de theorie der schoven (cfr. Godement "Théorie des faisceaux") lijkt het ons toch nuttig enkele elementaire zaken te herhalen. We volgen in deze paragraaf F. Van Oystaeyen en A. Verschoren op de voet, "Reflectors and localization, blz.65 e.v.". Hoewel verwijzen naar A.Grothendieck "Sur quelques points d'algèbre homologique" waarschijnlijk rechtvaardiger zou zijn.

(5.2) <u>definities</u>
Zij X een topologische ruimte en $\underline{\underline{C}}$ een Grothendieck kategorie. De funktor kategorie $\underline{\underline{Hom}}(\text{Open}(X)^{opp}, \underline{\underline{C}})$ is de kategorie der <u>preschoven</u> boven X met waarden in $\underline{\underline{C}}$, kortweg $\underline{\underline{P}}(X,\underline{\underline{C}})$. Meer expliciet : Een <u>preschoof</u> P voegt aan iedere open verzameling U een objekt P(U) van $\underline{\underline{C}}$ toe en aan iedere inklusie $V \subset U$ van open verzamelingen, een morfisme P^U_V :

$P(U) \to P(V)$. Een <u>morfisme</u> $f : P \to P'$ <u>van preschoven</u> wordt gegeven door een familie morfismen $f(U) : P(U) \to P'(U)$ zodat voor elk koppel opens $U \subset V$ het volgende diagram kommutatief is in $\underline{\underline{C}}$:

$$\begin{array}{ccc} P(V) & \xrightarrow{f(V)} & P'(V) \\ \downarrow {\scriptstyle P_U^V} & & {\scriptstyle P'^V_U} \downarrow \\ P(U) & \xrightarrow[f(U)]{} & P'(U) \end{array}$$

(5.3) Zij U een open verzameling van X ,en laat $\mathrm{Cov}_X(U)$ de verzameling zijn van alle families $\underline{U} = (U_i)$ met i in I zodat alle U_i opens zijn in X en verder dat de unie der U_i gelijk is aan U.Neem $\underline{u}$ in $\mathrm{Oov}_X(U)$ en P in $\underline{\underline{P}}(X,\underline{\underline{C}})$.Laat verder $p_i : \prod_i P(U_i) \to P(U_i)$ het projektiemorfisme zijn. Dan krijgen we een morfisme $j : P(U) \to \prod_i P(U_i)$ zodat $p_i\ j = P^U_{Ui}$ en verder hebben we morfismen:

$$p,q : \prod_{i \text{ in } I} P(U_i) \rightrightarrows \prod_{(j,k) \text{ in } I \times I} P(U_j \cap U_k)$$

met als (j,k)-komponent voor p : $P^{Uj}_{Uj \cap Uk}(p_j)$ en voor de (j,k)-komponent voor q : $P^{Uk}_{Uj \cap Uk}(p_k)$.We krijgen uiteindelijk hetvolgende diagram:

$$P(U) \xrightarrow{j} \prod_{i \text{ in } I} P(U_i) \overset{p}{\underset{q}{\rightrightarrows}} \prod_{(j,k) \text{ in } I \times I} P(U_j \cap U_k)$$

Een preschoof P is een <u>schoof</u> als bovenstaand diagram een "equalizer diagram" is.Een preschoof P is <u>gesepareerd</u> als j een monomorfisme is.

(5.4) Noteer met $\underline{\underline{S}}(X,\underline{\underline{C}})$ de volle deelkategorie van $\underline{\underline{P}}(X,\underline{\underline{C}})$ bestaande uit alle schoven boven X met waarden in $\underline{\underline{C}}$.Men gaat eenvoudig na dat zowel $\underline{\underline{S}}(X,\underline{\underline{C}})$ als $\underline{\underline{P}}(X,\underline{\underline{C}})$ kompleet zijn.

(5.5) <u>stelling</u>

Als $\underline{\underline{C}}$ een grothendieck-kategorie is,dan :

1. $\underline{\underline{P}}(X,\underline{\underline{C}})$ is een Grothendieck-kategorie
2. $\underline{\underline{S}}(X,\underline{\underline{C}})$ is een Giraud-deelkategorie van $\underline{\underline{P}}(X,\underline{\underline{C}})$

<u>bewijs</u>

Zie A.Grothendieck : "Sur quelques points d'algèbre homologique"

(5.6) We zullen nu de reflector $\underline{\underline{a}} : \underline{\underline{P}}(X,\underline{\underline{C}}) \to \underline{\underline{S}}(X,\underline{\underline{C}})$ construeren. We geven eerst $Cov_X(U)$ de struktuur van een kategorie als volgt : zij $\underline{u} = (U_i : i \text{ in } I)$ en $\underline{v} = (V_j : j \text{ in } J)$ elementen van $Cov_X(U)$ met U open in X. Een morfisme tussen $\underline{u}$ en $\underline{v}$ wordt gegeven door een afbeelding $f: I \to J$ zodat $U_i \subset V_{f(i)}$ voor alle i in I. Zij verder P in $\underline{\underline{P}}(X,\underline{\underline{C}})$ en we definiëren een kontravariante funktor $(P,U):Cov_X(U) \to \underline{\underline{C}}$

$$(P,U)(\underline{u}) = \mathrm{Ker}\left(\prod_{i \text{ in } I} P(U_i) \underset{q}{\overset{p}{\rightrightarrows}} \prod_{(j,k) \text{ in } I \times I} P(U_j \cap U_k) \right)$$

We kunnen nu een nieuw objekt LP van $\underline{\underline{P}}(X,\underline{\underline{C}})$ definiëren:

$$LP : Open(X)^{opp} \quad \underline{\underline{C}} : U \to \varinjlim_{\underline{u} \text{ in } Cov_X(U)} (P,U)(\underline{u})$$

$$LP(U) = \varinjlim_{\underline{u} \text{ in } Cov_X(U)} \ \lim_{V \text{ in } \underline{u}} P(V)$$

Merk tenslotte op dat L een links-exacte endofunktor is van $\underline{\underline{P}}(X,\underline{\underline{C}})$

(5.7) <u>stelling</u>

---

laat $F(X,\underline{\underline{C}})$ de klasse van de gesepareerde preschoven zijn:

1. als P in $F(X,\underline{\underline{C}})$ is dan is $P \to LP$ een monomorfisme en LP is in $\underline{\underline{S}}(X,\underline{\underline{C}})$
2. Als P in $\underline{\underline{P}}(X,\underline{\underline{C}})$ is dan is LP in $F(X,\underline{\underline{C}})$
3. Als P in $\underline{\underline{S}}(X,\underline{\underline{C}})$ is dan is LP = P en omgekeerd

---

<u>bewijs</u>
Zie andermaal A. Grothendieck

(5.8) definiëer nu : $i\ \underline{\underline{a}} = L\ L$ met $i : \underline{\underline{S}}(X,\underline{\underline{C}}) \to \underline{\underline{P}}(X,\underline{\underline{C}})$ de kanonieke afbeelding. Dan noemen we $\underline{\underline{a}}$ de <u>verschovingsfunktor</u> . Verder gaat men gemakkelijk na dat $\underline{\underline{a}}$ een links toegevoegde is van i.

I.6 : STRUKTUURSCHOVEN VAN RINGEN EN MODULEN

(6.1) We nemen aan dat de lezer al het nodige gegrasduind heeft in niet-kommutatieve (symetrische) lokalisatie theorie. Zoniet verwijzen we hem/haar naar F. van Oystaeyen "Prime spectra in non-commutative algebra", hoofdstuk I en II . We volgen in deze paragraaf bovenstaand boek benevens (!) "Reflectors and lokalization" (van Oystaeyen-Verschoren).

(6.2) Andermaal zij het benadrukt dat we werken met links-Noetherse ringen met eenheid. Zij A een tweezijdig ideaal van R. Met A assosiëren we een filter L(A) bestaande uit die links-idealen van R zodat A omvat is in het radikaal van dat links-ideaal. Anders gezegd , een links-ideaal I behoort desd tot L(A) als $A^n \subset I$, voor zekere n. Met L(A) komt een symetrische kern-funktor k_A overeen, als volgt gedefiniëerd : $k_A(M)$ bestaat uit die m van M waarvoor er een I in L(A) bestaat zodanig dat I.m = 0 . Merk op dat L(A) en dus ook k_A slechts afhangen van het radikaal.

(6.3) Boven een open deel X_A van Spec(R), met A een ideaal niet bevat in rad(0), plaatsen we nu de gelokaliseerde van R t.o.v. de kernfunktor k_A : $Q_A(R)$. Dit alles is goed gedefiniëerd vermits zowel X_A als $Q_A(R)$ slechts afhangen van het radikaal. Het systeem $(X_A, Q_A(R))$ noteren we $\underline{Q}^0(R)$.
De kanonieke afbeelding $R \to Q_A(R)$ noteren we i_A , alhoewel het duidelijk is dat deze afbeeldingen in het algemeen niet injektief hoeven te zijn.

(6.4) <u>stelling</u>

$\underline{Q}^0(R)$ is een preschoof van niet-kommutatieve ringen boven Spec(R)

bewijs

Als $X_B \subset X_A$ dan is per definitie $rad(B) \subset rad(A)$ en verder is $X_B \neq \emptyset$ als B niet bevat is in rad(O). Neem I in L(A), dan bestaat er een n : $A^n \subset I$, en anderzijds bestaat er een m : $B^m \subset A$, zodat $B^{mn} \subset I$ en dus I in L(B). Dit bewijst dat $L(A) \subset L(B)$ en bijgevolg $k_A \leqslant k_B$ en bijgevolg krijgen we een kanonieke projektie f(A,B) :

$f(A,B) : i_A(R) = R/\,k_A(R) \longrightarrow R/\,k_B(R) = i_B(R)$

Beschouw nu hetvolgende diagram waarvan alle afbeeldingen ringhomomorfismen zijn (Lnm 444, Theorem 10) :

$$\begin{tikzcd}
 & i_A(R) \arrow[r] \arrow[d, "f(A,B)"] & Q_A(R) \arrow[d, "j(A,B)"] \\
R \arrow[ur] \arrow[r] & i_B(R) \arrow[r] & Q_B(R)
\end{tikzcd}$$

Vermits $Q_A(R)/i_A(R)$ k_A-torsie is, en dus zeker k_B-torsie, en vermits $Q_B(R)$ trouw k_B-injektief is, kan f(A,B) op één-duidige manier voortgezet worden tot j(A,B) en dus geldt:

Ker f(A,B) = Ker $j(A,B) \cap i_A(R)$.

De uniciteitsvoorwaarde impliceert dat j(A,A) de identiteit op $Q_A(R)$ is. Verder, als $\emptyset \neq X_C \subset X_B \subset X_A$, dan krijgen we volgend diagram:

$$\begin{tikzcd}
i_A(R) \arrow[rr] \arrow[dr, "f(A,C)"] \arrow[dd, "f(A,B)"'] & & Q_A(R) \arrow[dr, "j(A,C)"] \arrow[dd, "j(A,B)"'] & \\
 & i_C(R) \arrow[rr] & & Q_C(R) \\
i_B(R) \arrow[ur, "f(B,C)"'] \arrow[rr] & & Q_B(R) \arrow[ur, "j(B,C)"'] &
\end{tikzcd}$$

Vermits f(A,C) = f(B,C) f(A,B) geldt dat j(A,C) en j(B,C) j(A,B) uitbreidingen zijn van f(A,C). Wegens de uniciteitsvoorwaarde hebben we dus j(A,C) = j(B,C) j(A,B)

klaar!

(6.5) stelling

$\underline{Q}^0(R)$ is een gesepareerde preschoof

bewijs

Zij $X_A = \cup X_i$ een overdekking van X_A door opens $X_i = X - V(A_i)$ die we wegens quasi-kompaktheid eindig mogen veronderstellen. Als we met k_i de kernfunktor corresponderend met A_i noteren dan krijgen we volgend diagram van ringhomomorfismen:

$$\begin{tikzcd} & R/k_A(R) \arrow[r] \arrow[d, "f_i"] & Q_A(R) \arrow[d, "j_i"] \\ R \arrow[ur, "i_A"] \arrow[dr, "i_{A_i}"'] & & \\ & R/k_i(R) \arrow[r] & Q_i(R) \end{tikzcd}$$

Vermits $k_A(Q_A(R)/i_A(R)) = Q_A(R)/i_A(R)$ bestaat er voor elk element g uit $Q_A(R)$ een ideaal B uit $L(A)$ met $Bg \subset i_A(R)$. Veronderstel nu dat g een element is van $\mathrm{Ker}(j_i)$, voor alle i, dan is $Bg \subset i_A(R) \cap \mathrm{Ker}(j_i) = \mathrm{Ker}(f_i)$ en dus is $Bg \subset k_i(R)/k_A(R)$ voor alle i. Het volstaat nu te bewijzen dat $\cap\, k_i(R)/k_A(R) = 0$ want daaruit volgt $Bg = 0$ en dus is g in $k_A(Q_A(R)) = 0$.

Het is duidelijk dat $k_A(R)$ bevat is in $\cap\, k_i(R)$, omgekeerd nu. Laat x in $\cap\, k_i(R)$ zitten, dan bestaat er voor elke i een ideaal C_i uit $L(A_i)$ met $C_i x = 0$. Wegens definitie van $L(A_i)$ geldt $\mathrm{rad}(C_i) \supset \mathrm{rad}(A_i)$. Neem nu $C = \sum C_i$, dan bevat $\mathrm{rad}(C)$ $\mathrm{rad}(\sum A_i)$. Maar vermits nu geldt dat $V(A) = \cap\, V(A_i)$ geldt dat iedere P in $\mathrm{Spec}(R)$ die $\sum \mathrm{rad}(A_i)$ omvat, dus alle A_i omvat tenslotte ook A omvat. Bijgevolg geldt: $\mathrm{rad}(A) \subset \mathrm{rad} \sum A_i \subset \mathrm{rad}(C)$, en dus is C in $L(A)$. Tenslotte: $Cx = 0$ impliceert x in $k_A(R)$ en klaar!

(6.6) definitie

de verschoofde $\underline{aQ}^0(R)$ van de gesepareerde preschoof $\underline{Q}^0(R)$ noemen we de struktuurschoof van de ring R. We noteren de struktuurschoof $\underline{\mathrm{Spec}}(R)$.

(6.7) stelling

Laat R een links-Noetherse priemring zijn dan is $\underline{\mathrm{Spec}}(R) = \underline{Q}^0(R)$

bewijs

We moeten aantonen dat wanneer we een open overdekking van X_A hebben, $X_A = \cup X_i$ met $X_i = X - V(A_i)$, en wanneer we elementen g_i van $Q_i(R)$ hebben zodanig dat $j(A_i,A_iA_j)(g_i) = j(A_j,A_iA_j)(g_j)$, dat er dan een g in $Q_A(R)$ is zodat $j(A,A_i)(g) = g_i$ voor alle i.

Het volstaat dit te bewijzen voor een eindige overdekking van X_A. Stel immers $X_A = \cup X_i$ een eindige overdekking waarvoor de bewering geldt, dan wordt X_k overdekt door de verzamelingen $X - V(A_kA_i)$. Stel nu g in $Q_A(R)$ zodat g gemapt wordt op de g_i in $Q_i(R)$ en laat h_k het beeld zijn van g in $Q_k(R)$.Dan hebben g_k en h_k hetzelfde beeld onder elk van de afbeeldingen $j(A_k,A_kA_i)$ en dan is wegens het gesepareerd zijn : $h_k - g_k = 0$.

Neem dus een eindige open overdekking $X_A = \cup X_i$. Uit de preschoof-axioma's kunnen we dan afleiden dat voor alle i en j : $j(A_i , \prod_k A_k)(g_i) = j(A_j, \prod_k A_k)(g_j)$,waar $\prod_k A_k$ niet-nul ideaal is vermits R priem. Merk verder op dat de volgorde in $\prod_k A_k$ geen rol speelt omdat alles afhangt van het radikaal. Noteer $\prod_k A_k = B$ .We zullen nu bewijzen dat als g_1 in $Q_1(R)$ en g_2 in $Q_2(R)$ zo zijn dat $j(A_1,B)(g_1) = j(A_2,B)(g_2)$ dat er dan een g in $Q_C(R)$ bestaat met $C= A_1 + A_2$ en $j(C,A_1)(g) = g_1$ en $j(C,A_2)(g) = g_2$. De stelling volgt dan door dit procédé een eindig aantal keren te herhalen.

Nu moeten we ons herinneren (Lnm 444,blz.6) dat elementen van $Q_1(R)$ gedefiniëerd zijn als equivalentieklassen $(L_1,f_1)_1$ van koppels (L_1,f_1) met L_1 in $L(A_1)$ en f_1 in $Hom_R(L_1,R)$ en de equivalentierelatie gedefiniëerd als (L_1,f_1) (L_1',f_1') als er een L_1'' in $L(A_1)$ bestaat dat f_1 en f_1' samenvallen op $L_1'' \subset L_1' \cap L_1$.

Laat dus $g_1 = (L_1,f_1)_1$ in $Q_1(R)$ en $g_2 = (L_2,f_2)_2$ in $Q_2(R)$. Omdat R priem is reduceren alle afbeeldingen $f(A_i,B)$ tot de identiteit op R en bijgevolg zijn alle $j(A_i,B)$ injektief. Deze afbeeldingen zijn dan als volgt gedefinieerd:

$j(A_1,B)(L_1,f_1)_1=(L_1,f_1)_B$ én $j(A_2,B)(L_2,f_2)_2=(L_2,f_2)_B$ met $(-,-)_B$ de klassen voor de L(B)-equivalentierelatie.

Omdat g_1 en g_2 op hetzelfde element van $Q_B(R)$ gemapt worden geldt dat (L_1,f_1) $L(B)$-equivalent is met (L_2,f_2) , d.i. f_1 en f_2 vallen samen op een L' in $T(B)$ met $L' \subset L_1 \cap L_2$ verder mogen we veronderstellen dat L' een ideaal is vermits k_B symetrisch is. Neem nu x in de doorsnede van L_1 en L_2 , dan is $L'x$ een deel van L' en bijgevolg geldt : $L'(f_1(x) - f_2(x)) = 0$ en dus $f_1(x) - f_2(x) = 0$ als element van $k_B(R) = 0$ .Dus f_1 en f_2 vallen samen op de hele doorsnede van L_1 en L_2. Definiëer nu tenslotte $f : L_1 + L_2 \rightarrow R$: $f(a_1+a_2) = f_1(a_1) + f_2(a_2)$.Dit is goed gedefinieerd vermits f_1 en f_2 samenvallen op de doorsnede.Neem nu $g = (L_1+L_2,f)_C$ met $C=A_1+A_2$ .Het is nu eenvoudig na te gaan dat g $T(A_1)$-equivalent is met g_1 en g $T(A_2)$-equivalent is met g_2.Klaar!

(6.8) Laat M een links R-moduul zijn dan kunnen we kijken naar het systeem $(X_A,Q_A(M))$ boven Spec(R).Men gaat weer gemakkelijk na (de bewijzen voor R overschrijven en ringhomo's vervangen in de gepaste moduulhomo's) dat dit systeem éénduidig bepaald is, het een preschoof is die wederom gesepareerd is.Noteer dit systeem : $\underline{Q}^0(M)$.

(6,9) <u>definitie</u>

de verschoofde van de preschoof $\underline{Q}^0(M)$ noemen we de <u>struktuurschoof</u> van M en noteren we $\underline{\underline{a}}Q(M)$.

(6.10) Merk op dat $\underline{Q}^0(M)$ een $\underline{Q}^0(R)$-links-Moduul is en dat $\underline{\underline{a}}Q(M)$ een links <u>Spec</u>(R)-Moduul is.

(6.11) Men kan de construktie van struktuurschoven ook opvatten als lokalizaties in geschikte Grothendieck-kategorieën ($\underline{\underline{P}}$(Spec(R),R-mod) en $\underline{\underline{S}}$(Spec(R),R-mod)).We zullen op deze zienswijze (geïntroduceerd door van Oystaeyen-Verschoren in "Reflectors and lokalization") later terugkomen.

I.7 : GLOBALE SEKTIES EN STAKEN

(7.1) In deze paragraaf volgen we hoofdzakelijk F.van Oystaeyen - A. Verschoren : "Reflectors and localization." Eigen probeersels worden voorzichtigheidshalve aangegeven met (*) hetgeen zoveel wil zeggen als : te lezen met de grootst mogelijke achterdocht.

(7.2) Het <u>representatieprobleem</u> kan algemeen als volgt geformuleerd worden : gegeven een objekt G van een kategorie $\underline{\underline{C}}$,gevraagd : een topologische ruimte X(G) en een schoof S(G) van $\underline{\underline{C}}$ -objekten boven X(G) zodat de globale sekties G terug opleveren : S(G) (X) = G .Welbekende voorbeelden zijn de struktuurschoven van ringen en modulen in het kommutatieve geval.De eerste vraag die we nu willen beantwoorden is : zijn de voorheen gekonstrueerde struktuurschoven oplossingen voor het representatieprobleem in R-mod ?

(7.3) <u>stelling</u>

Voor elk links R-moduul M geldt :
$\underline{\underline{a}}Q(M)(\mathrm{Spec}(R)) = M$

<u>bewijs</u>
Vermits $\underline{\underline{Q}}^0(M)$ een gesepareerde preschoof is (6.5 en 6.8) heeft men duidelijk een inklusie $\underline{\underline{Q}}^0(M) \hookrightarrow \underline{\underline{a}}Q(M)$,waaruit volgt dat het volstaat te bewijzen dat $\underline{\underline{Q}}^0(M)(\mathrm{Spec}(R))=M$. $V(R) = \emptyset$ Dus $\mathrm{Spec}(R) = X_R$ en boven X_R hebben we $Q_R(M)$ geplaatst, de lokalisatie tov. de kernfunktor k_R. Uit de definitie van k_R volgt dat L(R) slechts R bevat. De torsie van M is dus $k_R(M) = \{ m \text{ in } M : Rm = 0 \} = 0$ vermits R een eenheid heeft ; bijgevolg is $Q_R(M) = M$. Klaar.

(7.4) Omdat $\underline{\underline{Q}}^0(M)$ in het algemeen geen schoof is (en we weten dus iha. niet wat de sekties,boven een open deel, van de struktuurschoof zijn,althans niet goed genoeg om ermede te kunnen werken) is het van het grootste belang dat we tenminste de staken berekenbaar kunnen praten .

(7.5) We herinneren eraan dat de preschoof en de verschoofde dezelfde staken hebben. Het zal dus volstaan de staken van $\underline{Q}^0(M)$ te berekenen.
$L(R-P)$ zal al die links idealen van R bevatten waarvoor er een s in $R-P$ bestaat zodat $(s) = RsR$ bevat is in het links ideaal. De symetrische kernfunktor geassocieërd met deze filter noteren we k_{R-P}.

(7.6) <u>stelling</u>

R links-Noethers, M eindig voortgebracht links R-moduul dan is de staak van $\underline{\underline{a}}Q(M)$ in P gelijk aan $Q_{R-P}(M)$.

<u>bewijs</u>
bij definitie en opmerking (7.5) is de staak in P:

$$S_P(M) = \varinjlim_{P \text{ in } X_I} Q_I(M)$$

Als P in X_I is, dan is I niet bevat in P en dus $k_I \leqslant k_{R-P}$.
Er bestaan dus kanonieke R-moduul homomorfismen van $Q_I(M)$ naar $Q_{R-P}(M)$. Nu passen we de universele eigenschap van de direkte limiet toe en krijgen een morfisme:

$$s_P : S_P(M) \longrightarrow Q_{R-P}(M)$$

Omdat R links-Noethers is kommuteert elke (symetrische) kernfunktor k met direkte limieten (cfr. Goldman "Rings and Modules of Quotients"), en dus ihb.

$$k_{R-P}(S_P(M)) = \varinjlim_{P \text{ in } X_I} k_{R-P}(Q_I(M))$$

We krijgen dus een exacte rij :

$$0 \longrightarrow \varinjlim_{P \text{ in } X_I} k_{R-P}(Q_I(M)) \longrightarrow S_P(M) \xrightarrow{s_P} Q_{R-P}(M)$$

Laat nu x in $k_{R-P}(Q_I(M))$ zijn, d.i. er is een ideaal J in $L(R-P)$: $Jx = 0$. Beschouw $X_I \cap X_J = X_{IJ}$ en het kanonieke R-moduul homomorfisme : s_{IJ} van $Q_I(M)$ naar $Q_{IJ}(M)$.
Door de R-lineariteit van s_{IJ} komt er : $IJ\, s_{IJ}(x) = I\, s_{IJ}(Jx) = 0$ en bijgevolg $s_{IJ}(x) = 0$ vermits $Q_{IJ}(M)$

k_{IJ}-torsievrij is. Voor ieder ideaal en voor alle x in $k_{R-P}(Q_I(M))$ geldt dus dat x in de direkte limiet op 0 gezonden wordt, en dus dat s_P een monomorfisme is

(7.6.1) Merk op dat we tot hiertoe het eindig voortgebracht zijn niet gebruikt hebben

Zij x nu in $Q_{R-P}(M)$, dan bestaat er een I in L(R-P) met $Ix \subset M/k_{R-P}(M)$ en vermits k_{R-P} symetrisch is mogen we veronderstellen $IRx \subset M/k_{R-P}(M)$.
Omdat M eindig voortgebracht is en R een links-Noetherse ring is mogen we besluiten dat $k_{R-P}(M)$ eindig voortgebracht is en dat het dus kan geannihileerd worden door een I' in L(R-P). Stel nu $J = I \cap I'$ dan is J ten duidelijkste in L(R-P) en dus $k_J \leq k_{R-P}$. Maar, omdat $Jk_{R-P}(M) = 0$, hebben we $k_J(M) = k_{R-P}(M)$ en tenslotte omdat $Jx \subset M/k_{R-P}(M)$ hebben we :

$$x \text{ in } Q_J(M/k_{R-P}(M)) = Q_J(M/k_J(M)) = Q_J(M)$$

Hieruit volgt dus dat s_P één epimorfisme is dus iso .

(7.7) gevolg

Als R een links-Noetherse dan is de staak van Spec(R) in P gelijk aan $Q_{R-P}(R)$.

(7.8) definitie

Een kernfunktor noemen we een T-funktor als hij/zij aan één en dus aan alle der volgende equivalente eisen voldoet:

1. Iedere M in $Q_k(R)$-mod is k-torsievrij
2. Voor alle A in L(k) : $Q_k(R)j(A) = Q_k(R)$
3. Iedere M in $Q_k(R)$-mod is trouw k-injektief
4. Voor alle M in R-mod : $Q_k(R) \otimes_R M = Q_k(M)$
5. De funktor Q_k is rechts exact en commuteert met direkte sommen.

(7.9) definities

Een open deel X_A van Spec(R) noemen we een T-deel als k_A een T-funktor is.
We zeggen dat een ring R een T-basis heeft, als Spec(R) een basis van T-delen heeft.

Een staak is een <u>T-staak</u> als k_{R-P} een T-funktor is. We zeggen dat een ring R <u>T-staken</u> heeft als elke staak een T-staak is.

(7.10) Voor ringen met goede T-voorwaarden zullen we nu bewijzen dat we de eindigheidsvoorwaarde in stelling 7.6 kunnen laten vallen. Misschien vooraf nog even vermelden dat ringen met T-basis of T-staken veelvuldig "in de natuur" voorkomen : vb. Azumaya-algebra's, Zariski-centraal ringen, globale birationale extenties van kommutatieve, enz. X

(7.11) <u>stelling</u>

Zij R een links-Noetherse ring met T-basis, M in R-mod de staak van $\underline{\underline{a}}Q(M)$ in P is gelijk aan $Q_{R-P}(M)$

<u>bewijs</u>
Uit (7.7) weten we dat de staak van <u>Spec</u>(R) in P gelijk is aan $Q_{R-P}(R)$. Als X_I een T-deel is dan geldt $Q_I(M)=Q_I(R) \underset{R}{\otimes} M$
Vermits direkte limieten kommuteren met tensor-produkten en omdat we (wegens T-basis) de direkte limiet mogen laten lopen door T-delen , geldt : $S_P(M) = Q_{R-P}(R) \underset{R}{\otimes} M$ .Als we nu nog kunnen bewijzen dat k_{R-P} een T-funktor is dan zijn we klaar. Nu geldt:

$$k_{R-P} = \sup\{ k_I \text{ ; I niet bevat in P} \}$$

We mogen zelfs het supremum nemen van T-funktoren dat zoals bekend wordt verondersteld zelf een T-funktor is. klaar.

Merk op dat we in voorgaande stelling bewezen (nou ja) hebben dat als een ring een T-basis heeft, die ring ook T-staken heeft. Volgende stelling is dus een veralgemening van (7.11) :

(7.12) <u>stelling</u> (*)

Zij R een links-Noetherse ring met T-staken, M in R-mod de staak van $\underline{\underline{a}}Q(M)$ in P is gelijk aan $Q_{R-P}(M)$

bewijs

de wiskundige folklore leert ons dat elk moduul geschreven kan worden als direkte limiet van zijn eindig voortgebrachte deelmodulen : $M = \varinjlim_i (M_i)$; M_i e.v. deelmoduul. Vermits alle lokalisaties links-exact zijn levert dit ons een inductief systeem $(\underline{\underline{a}}Q(M_i), f^{*i}_j)$, en verder monomorfismen: $0 \to \underline{\underline{a}}Q(M_i) \to \underline{\underline{a}}Q(M)$.

Definiëer nu de direkte-limiet van die induktief systeem van schoven als de verschoofde van de preschoof:

$$(X_I \ , \ \varinjlim_i(\underline{\underline{a}}Q(M_i)(X_I))) \qquad \text{(cfr.Godement 1.11)}$$

Vermits Grothendieck-kategorieën exacte direkte limieten hebben en gebruikmakend van de universele eigenschap (Godement 1.11) krijgen we een monomorfisme :

$$0 \to \varinjlim_i(\underline{\underline{a}}Q(M_i)) \to \underline{\underline{a}}Q(M)$$

Bijgevolg zijn er ook monomorfismen tussen de staken:

$$0 \to S_P(\varinjlim_i(\underline{\underline{a}}Q(M_i))) \to S_P(M)$$

Bereken nu :

$$\begin{aligned} S_P(\varinjlim_i(aQ(M_i))) &= \varinjlim_i(S_P(\underline{\underline{a}}Q(M_i))) && \text{(Godement 1.11)} \\ &= \varinjlim_i(Q_{R-P}(M_i)) && \text{(stelling 7.6)} \\ &= \varinjlim_i(Q_{R-P}(R) \otimes_R M_i) && \text{(T-funktor)} \\ &= Q_{R-P}(R) \otimes_R \varinjlim_i(M_i) \\ &= Q_{R-P}(M) && \text{(T-funktor)} \end{aligned}$$

Dus krijgen we een exacte rij:

$$0 \to Q_{R-P}(M) \to S_P(M) \to S_P(M)/Q_{R-P}(M) \to 0$$

Na lokaliseren en gebruiken dat k_{R-P} een T-funktor is:

$$0 \to Q_{R-P}(M) \to Q_{R-P}(S_P(M)) \to Q_{R-P}(S_P(M)/Q_{R-P}(M)) \to 0$$

Maar nu is:

$$\begin{aligned} Q_{R-P}(S_P(M)) &= Q_{R-P}(\varinjlim_I(Q_I(M))) \\ &= \varinjlim_I(Q_{R-P}(Q_I(M))) \\ &= \varinjlim_I(Q_{R-P}(M)) = Q_{R-P}(M) \end{aligned}$$

Bijgevolg is $S_P(M)/Q_{R-P}(M)$ k_{R-P}-torsie en in het eerste deel van stelling 7.6 hebben we bewezen dat $S_P(M)$ k_{R-P}-torsievrij is.Herinner nu hoe Q_{R-P} gedefiniëerd is om te kunnen besluiten : $Q_{R-P}(M) = S_P(M)$ klaar.

(7.13) <u>notatie</u>

Met $\underline{\text{Spec}}(R) \otimes_R M$ zullen we de verschoofde noteren van de preschoof : $(X_I\ ,\ Q_I(R) \otimes_R M\ )$.

Volgende stelling veralgemeent Proposition 44 van Lnm 444:

(7.14) <u>stelling</u> (*)

Zij R links-Noethers met T-staken, M in R-mod
$\underline{\underline{a}}Q(M) = \underline{\text{Spec}}(R) \otimes_R M$

<u>bewijs</u>

We noteren met f^* het schoofmorfisme van $\underline{\text{Spec}}(R) \otimes_R M$ naar $\underline{\underline{a}}Q(M)$ geïnduceerd door het preschoofmorfisme

$$f(X_I^{\cdot}) : Q_I(R) \otimes_R M \longrightarrow Q_I(M) : r \otimes m \longrightarrow ri_I(m)$$

Opdat f^* een schoofisomorfisme zou zijn is het voldoende dat f een isomorfisme induceert op de staken, maar dit is triviaal omdat we werken met T-staken en omdat dan $S_P(M) = Q_{R-P}(M) = Q_{R-P}(R) \otimes_R M$.

maak deze thesis nog unieker en schrijf hier zelf iets leuks, als daar zijn :

hoofdstuk twee : FORMELE SCHEMA'S

bij wijze van verontschuldiging (3)

Men hoeft er Dieudonné's werkje "Cours de Géometrie Algébrique 1" ~~er~~ maar op na te slaan (VII.5) om het belang van de studie van lokale ringen in algebraïsche meetkunde in te zien. Haast alle meetkundige kenmerken vinden hun weerspiegeling in eigenschappen van de optredende lokale ringen.Het zal waarschijnlijk interessant zijn de in de niet-kommutatieve algebraische meetkunde optredende "lokale" ringen aan een grondig onderzoek (à la Nagata "Local Rings" of Matsumura "Commutative Algebra") te onderwerpen.

Dit hoofdstuk wil één van de mogelijke onderzoekingsgebieden aanboren : kompleties. Zoals gebruikelijk aan de U.I.A., gaan we, als het algemene geval ons te gecompliceerd lijkt, ons beperken tot het Zariski-centraal geval.Dit blijkt een goede klasse te zijn want alle ideaal-kompleties zijn centrale kompleties.Vele stellingen over kommutatieve kompleties kunnen op triviale wijze veralgemeent worden tot het Z.C.-geval (e.v. Zariski-centrale boven centrum en faithful).Nochtans dwong tijdgebrek ons mogelijk interessante terreinen onbetreden te laten.Zo lijkt het mij waarschijnlijk dat de struktuur van komplete lokale Z.C.-ringen in

belangrijke mate vastgelegd wordt door de struktuurstellingen van Cohen voor komplete lokale (komm.) Noetherse ringen.
Ja Alain, ik weet wel dat het onderzoek van kompleties van (semi)priem p.i.-ringen interessanten zal zijn en op het eerste zicht lijkt het me mogelijk dat we ook hier zinvolle dingen zullen kunnen zeggen.Een minimale eis is wel dat het ideaal de links Artin-Rees eigenschap heeft, dus bvb. een centraliserende verzameling generatoren heeft, en dit is in het semipriem p.i.-geval waarschijnlijk haalbaar via de stelling van L. Rowen. X

Verder worden in dit hoofdstuk de konstrukties van Grothendieck (vezels en formele spectra) veralgemeend tot het Z.C.-geval.Ja Alain, ook dit zal best weer voor p.i.-ringen gedaan worden,een mogelijk vakantiewerkje...

Toch krijgen we al in het Z.C.-geval een interessant resultaat uit onze vezeltheorie.We kunnen voorwaarden op de Zariski-centraal ring R opleggen opdat R[T] opnieuw Zariski-centraal zou zijn.Verder krijgen we een duidelijke kijk wat er in het algemene geval mis gaat (en vreemd genoeg wordt het hele probleem teruggebracht tot kommutatieve lichaam-theorie).
Het bestuderen van vezels heeft het grote voordeel dat we nu meer vat krijgen op de priemen in extenties.Het polynoomring-geval wordt opgelost,maar het interessantere (en moeilijkere) tensor-geval is voorlopig nog open.

Verder hoop ik dat uit de lektuur blijkt dat dit het hoofdstuk is dat ik met het meeste plezier geschreven heb.

overigens ,
waar kernenergie is,is geen demokratie mogelijk
en waar demokratie is,is geen kernenergie mogelijk
ugh !

II.1 : KOMPLETIES VAN ZARISKI-CENTRAAL RINGEN

(1.1) Voor algemeenheden over kompleties verwijzen we naar Greco :"Topics in m-adic topologies" , Bourbaki "Algébre Commutative" en Nastasescu-Van Oystaeyen : "Graded and filtered rings and modules".

(1.2) Zij R een ring , I een tweezijdig ideaal van R en M in R-mod , dan noteren we met $K_I(M)$ de I-adische kompletie van M , i.e. : $K_I(M) = \varprojlim M/I^nM$. I;h.a. is er niet zoveel geweten over niet-kommutatieve kompleties,om maar iets te noemen : we weten niet of $R \longrightarrow K_I(R)$ een ringextentie is , wel hebben we :

topologie?

<u>stelling</u>

$f : R \longrightarrow K_I(R)$, equivalent :

1. f is extentie
2. f is centrale extentie

<u>bewijs</u>

1. impliceert 2. : Zij z in $Z_R(K_I(R))$ dan hebben we voor alle a in f(R) : az - za = 0 . Nu is xz - zx een kontinuë afbeelding die nul wordt op f(R) i.e. op een dicht deel , bijgevolg is xz - zx identiek nul en dus zit z in $Z(K_I(R))$.

(1.3) <u>definitie</u>

Een links-Noetherse ring R noemen we <u>Zariski-centraal</u> als voor alle tweezijdige idealen I van R :

$$\mathrm{rad}(I) = \mathrm{rad}\, R(I \cap Z(R))$$

(1.4) Voor links-Noetherse ringen hangen kompleties slechts af van het radikaal,voor Zariski-centraal ringen krijgen we dus : $K_I(M) = K_{R(I \cap C)}(M)$ (met C = Z(R)).Dit heeft enkele bijzonder plezierige gevolgen :

1. De funktor die M naar $K_I(M)$ stuurt is exact in de kategorie der links R-modulen van eindig type.
2. $K_I(R)$ is een rechts plat R-moduul

3. M in R-mod en eindig voortgebracht, dan :
$K_I(M) = K_I(R) \otimes_R M$

4. M in R-mod en eindig voortgebracht, $i : M \longrightarrow K_I(M)$,
dan $\mathrm{Ker}(i) = \cap\, I^n M = \{x \text{ in } M : (1-r)x = 0 \text{ voor een } r \text{ in } I\}$

5. M in R-mod en eindig voortgebracht dan $K_I(M) = K_I(R)i(M)$
en $K_I(M)$ is een eindig voortgebracht $K_I(R)$-moduul.

Dit alles volgt uit het feit dat $R(I \cap C)$ de links Artin - Rees eigenschap heeft.

(1.5) <u>stelling</u>

R Zariski-centraal, I ideaal van R
dan is $K_I(R)$ links-Noethers

<u>bewijs</u>

We mogen $I = R(I\cap C)$ stellen, dan weten we uit Prop. 3.12 van Nast-FVO dat de Rees-ring : $R \oplus I \oplus I^2 \oplus \ldots$ links-Noethers is en dus ook $gr(R) = R/I \oplus I/I^2 \oplus \ldots$
Verder weten we dat $gr(R)$ isomorf is met $gr(K_I(R)) = K_I(R)/K_I(I) \oplus K_I(I)/K_I(I)^2 \oplus \ldots$ en zoals in het kommutatieve geval (zie bvb : Atiyah-Mac Donald :"Introduction to Commutative Algebra" Prop. 10.24 en 10.25) volgt uit het links-Noethers zijn van $gr(K_I(R))$ het gevraagde.klaar!

(1.6) Een ander voordeel van werken met Zariski-centraal ringen is dat kompleties in feite centrale kompleties zijn:

<u>stelling</u>

R Zariski-centraal, I ideaal van R
$K_I(R)$ en $K_{I\cap C}(R)$ zijn isomorf als C-modulen

<u>bewijs</u>

$K_I(R) = K_{R(I\cap C)}(R) = \varprojlim R/(I\cap C)^n R = K_{I\cap C}(R)$.klaar !

(1.6) Maar zelfs wanneer we werken met Zariski-centraal ringen (algemeen), stuiten we al vrij vlug op moeilijkheden :
Op dit moment weten we nog niet of $f : R \to K_I(R)$ een exten-

tie is, ook niet of $Z(K_I(R)) = K_{I\cap C}(Z(R))$ om nog maar te zwijgen over de vraag of $K_I(R)$ Zariski-centraal is. Om een deel van deze vragen te beantwoorden beperken we ons tot Zariski-centraal ringen eindig voortgebracht over hun centrum C dat Noethers is (en dus zijn ze FBN).

(1.7) stelling

onder bovenstaande restrikties :
1. $f : R \to K_I(R)$ centrale extentie
2. $Z(K_I(R)) = K_{I\cap C}(Z(R))$
3. $K_I(R) = K_{I\cap C}(C) \otimes_C R$

bewijs

3. volgt uit stelling (1.6) en (1.4.3).
1. en 2. volgen natuurlijk uit 3. klaar

(1.8) stelling

R Zar. Centr. e.v. over centrum, $I \cap C = (a_1,\dots,a_n)$
dan : $K_I(R) = R[[X_1,\dots,X_n]]/(X_1-a_1,\dots,X_n-a_n)$

bewijs

Stel $B = C[X_1,\dots,X_n]$, $i' = BX_1 + \dots + BX_n$ en $J = (X_1-a_1)B + \dots + (X_n-a_n)B$. Dan hebben we : $B/J = C$ en de i'-adische topologie op de B-algebra B/J komt overeen met de $I\cap C$ -adische topologie op C. We krijgen :

$$K_{I\cap C}(C) = K_{i'}(B/J) = K_{i'}(B)/K_{i'}(J) = K_{i'}(B)/JK_{i'}(B)$$
$$= C[[X_1,\dots,X_n]] / (X_1-a_1,\dots,X_n-a_n)$$

En de voorgaande stelling maakt het bewijs dan verder af!

(1.9) opmerking

Om te bewijzen dat $K_I(R)$ Zariski-centraal is voor een e.v. Zariski-centrale R over zijn centrum zal het dus volstaan te bewijzen dat voor alle c in C : $R[[X]]/(X-c)$ Zariski-centraal.

(1.10) Voor de rest van het verhaal zullen we onder een Z.C.-ring een ℓ-Noetherse Zariski-centraalring verstaan, eindig voortgebracht over zijn centrum en faithful, dwz.: $\{ I \text{ ideaal van } C : RI = R \} = \{C\}$ .of equivalent : er bestaat een bijektieve korrespondentie ($p \to \text{rad}Rp, P \to P \cap C$) tussen de maximale idealen van C en de maximale idealen v R.

(1.11) <u>definitie</u>

Een Z.C.-ring R noemen we een <u>Zariski-ring</u> als I (het ideaal dat de topologie bepaalt) in $J(R)$ zit met $J(R)$ het Jacobson-radikaal.

(1.12) enkele gevolgen voor Zariski Z.C. -ringen :

1. In de notatie (1.4.4) : Ker i = 0
2. M in R-mod en eindig voortgebracht, dan is elk deelmoduul gesloten in de I-adische topologie.
3. Er bestaat een 1-1 korrespondentie tussen maximale idealen van R en die van $K_I(R)$

(1.13) <u>stelling</u>

Zij R een semi-lokale Z.C.-ring met maximale idealen: $M_1, \dots, M_r$ dan : $K_{J(R)}(R) = K_{J(R)}(Q_{R-M_1}(R)) \times \dots \times K_J(Q_{R-M_r}(R))$

<u>bewijs</u>

C is dan ook een semi-lokale ring en $m_1, \dots, m_r$ de maximale idealen. Noteer met $C_i = Q_{C-m_i}(C)$ en $m_i' = m_i C_i$, $m = J(C) = m_1 \dots m_r$. Dan hebben we :

$m^n = \pi\, m_i^n = \cap\, m_i^n$, en dus : $C/m^n = C/m_1^n \times \dots \times C/m_r^n$. Verder hebben we : $C/m_i^n = C_i/m_i'^n$. Dus :

$$K_{j(R)}(C) = \varprojlim C/m^n = K_{j(C)}(C_1) \times \dots \times K_{j(C)}(C_r)$$

en uit stelling (1.7.3) volgt dan :

$$\begin{aligned} K_{J(R)}(R) &= \pi\, K_{j(C)}(Q_{C-m_i}(C)) \otimes_C R \\ &= \pi\, K_{J(R)}(Q_{C-m_i}(C) \otimes_C R) \\ &= \pi\, K_{J(R)}(Q_{R-M_i}(R)) \end{aligned}$$

(1.14) lemma

R Z.C.-ring, equivalent zijn :

1. R met I-adische topologie Zariski
2. C met $I \cap C$-adische top. Zariski

---

bewijs

1\. dan 2. : volgt onmiddellijk uit het faithful Zariski-centraal zijn.

2\. dan 1. : Als $I \cap C \subset m$, dan ook $\operatorname{rad}R(I \cap C) \subset \operatorname{rad}Rm = M$.

(1.15) In het kommutatieve geval kunnen we de I-adische kompletie van een Noetherse ring R steeds opvatten als de kompletie van zijn Zariskificatie , i.e. uit R en I konstrueert men een Zariski-ring R' met I'-adische topologie zodat: $K_I(R) = K_{I'}(R')$. Volgende stelling wil deze konstruktie veralgemenen tot Z.C.-ringen :

(1.16) stelling

Zij R een I-adische Z.C.-ring dan heeft R een Zariskifikatie .

---

bewijs

Laat ons met i , $I \cap C$ noteren. $S = 1 + i$ is dan een multiplikatief gesloten verzameling in C en in R en voldoet dus aan de Ore-voorwaarden in R. We kunnen dus naar de ring : $(S)^{-1}R = R'$ kijken . Wie me niet gelooft mag voor zichzelf narekenen dat R' opnieuw een Z.C.-ring is. Zij verder $I' = (S)^{-1}I$, dan hebben we : $Z(R') = (S)^{-1}C$ en $I' \cap Z(R') = (S)^{-1}i$. Zet nu op R' de I'-adische topologie. Wegens lemma 1.14 volstaat het te bewijzen dat $(S)^{-1}i$ in $J(Z(R'))$ zit . Als we nog een beetje kommutatieve ringtheorie kennen, dan weten we dat het volstaat te bewijzen dat voor alle j in $(S)^{-1}i$: $1 + j$ omkeerbaar in $Z(R')$ en dit is triviaal. We hebben dus al bewezen dat R' met de I'-adische topologie een Zariski Z.C.-ring is. Nu moeten we de kompleties nog aan elkaar gelijk praten. Dit volgt direkt uit $R/I^n = S^{-1}R/S^{-1}I^n$ en dit volgt uit : $(1+i)^{-1}r + (1+i)^{-1}ir = r$.

(1.17) Deze Zariskificatie heeft een plezierige universele eigenschap : iedere kontinuë ringmorfisme van R naar een Zariski Z.C.-ring A kan gelift worden tot R' :

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & A \\ R' \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Dit volgt uit het feit dat $f(I^n) \subset J \subset J(A)$ voor zekere n (op A staat de J-adische topologie) en dus $f(I) \subset J(A)$ en alle $f(s)$ met s in S worden dus omkeerbaar in A.klaar!

(1.18) Zij R een Z.C.-ring, I een ideaal van R en $R' = K_I(R)$, verder P in Spec(R): P omvat I , $P' = K_I(P)$ dan :

stelling

$Q_{R-P}(R)$ en $Q_{R'-P'}(R')$ zijn analytisch isomorf, i.e. als lokale ringen hebben ze zelfde kompleties

bewijs

Zij $p = P \cap C$,p is dus open in de i-adische topologie in C, $K_i(p) = K_i(C)p = p'$ is dus open en priem in $K_i(C)$ en verder hebben we voor alle n : $C/p^n = C'/p'^n$. Als we nu beide kanten lokaliseren naar p/p^n respectievelijk p'/p'^n dan krijgen we :

$$Q_{C-p}(C)/p^n Q_{C-p}(C) = Q_{C'-p'}(C')/p'^n Q_{C'-p'}(C')$$

waaruit dus : $K_m(Q_{C-p}(C)) = K_{m'}(Q_{C'-p'}(C'))$ waarin $m = pQ_{C-p}(C)$ en $m' = p'Q_{C'-p'}(C')$.

Stelling (1.7) maakt wederom het bewijs af !

opmerking : wanneer we over de kompletie van een lokale ring spreken bedoelen we natuurlijk de M-adische,met M het uniek maximaal ideaal.

II.2 : FORMELE EN ANDERE VEZELS VAN Z.C.-RINGEN

(2.1) In deze paragraaf willen we Grothendieck's theorie van vezels en formele vezels uitbreiden tot Z.C.-ringen.

(2.2) lemma

$f : R \to S$ extentie, $A \subset R$ multiplikatief gesloten en voldoet aan de Ore-voorwaarden in R, dan is $f(A)$ multiplikatief gesloten en voldoet aan de Ore-voorwaarden in S.

---

bewijs

Dat $f(A)$ multiplikatief gesloten is zal de lezer voor niet al te grote problemen stellen. Rest de Ore-voorwaarde :
Zij s in S en a in A, we moeten nu een s' in S en een a' in A vinden : $s'f(a) = f(a')s$. Wegens de extentie kunnen we s schrijven als $s = c_1f(r_1) + \dots + c_nf(r_n)$, met c_i in $Z_R(S)$.
We vervolgen nu per induktie op n :
$n = 1$: $s = cf(r)$, A voldoet aan de Ore-voorwaarden in R en dus bestaan er r' in R en a' in A : $r'a = a'r$. Stel nu $s' = cf(r')$ en dan zijn we klaar.
Stel nu dat we het bewezen hebben voor n-1 en zij s weer :
$s = c_1f(r_1) + \dots + c_nf(r_n)$; $s_1 = c_1f(r_1) + \dots + c_{n-1}f(r_{n-1})$
Bij induktie vinden we nu een s_1' in S en een a' in A met :
$s_1'f(a) = f(a')s_1$. Dan passen we nog eens de Ore-voorwaarden in R toe om een r_n' in R en een a" in A te vinden met :
$r_n'a = a''(a'r_n)$ en dan krijgen we tenslotte :

$$\begin{aligned} f(a''a')s &= f(a'')f(a')s_1 + c_nf(a''a'r_n) \\ &= f(a'')s_1'f(a) + c_nf(r_n'a) \\ &= (f(a'')s_1' + c_nf(r_n'))f(a) \end{aligned}$$

En omdat A multiplikatief gesloten is zijn we klaar !

(2.3) Effe een opmerking tussendoor over de priemen van Z.C. ringen zoals bewezen door F.V.O. in "Localization of FBN" en in "Zariski Central Rings" : Ieder P in Spec(R) is "classical" ,dwz. P voldoet aan de links Artin-Rees voorwaarden en

$G(P) = \{i \text{ in } R : ri \text{ in } P \text{ dan } r \text{ in } P\}$ voldoet aan de Ore-voorwaarden in R.

(2.4) Zij nu R een Z.C.-ring en $f : R \longrightarrow S$ een extentie. Dan hebben we een kontinuë afbeelding tussen de spectra :

$$^af : \mathrm{Spec}(S) \longrightarrow \mathrm{Spec}(R)$$

Neem nu P in Spec(R), dan zouden we $^af^{-1}(P)$ graag de struktuur van een schema geven : de vezel van f in P . x!

G(P) is multiplikatief gesloten en voldoet aan de Ore-voorwaarden in R , dus is $T = f(G(P))$ multiplikatief gesloten en voldoet aan de Ore-voorwaarden in S (2.2). We kunnen dus kijken naar devolgende ring :

$$A = T^{-1}S / T^{-1}Sf(P)$$

(2.5) stelling

Er bestaat een kanonieke bijektie tussen $(^af)^{-1}(P)$ en Spec(A)

bewijs

Priemidealen van A zijn afkomstig van priemen in S boven Sf(P), i.e. priemen van A zijn van de vorm QA met Q in Spec(S) en $P \subset f^{-1}(Q)$.
Als $P = f^{-1}(Q)$ dan is QA in Spec(A) , er rest ons dus nog te bewijzen dat als $P \subsetneq f^{-1}(Q)$ dan : $AQ = A$.
$f^{-1}(Q)$ zit in Spec(R) en dan gebruiken we de Zariski-centraliteit om een c in C te vinden zodat : c in Q-P . Nu zit c in G(P) (immers als rc in P zit, dan ook $rcR = rRc$ in P en vermits c niet in P zit moet dus r in P zijn).
Dus f(c) zit in T en in Q waaruit het gestelde volgt.

(2.6) Nog even een geheugenopfrissertje over lokalisatie van Z.C. - ringen :
$Q_{R-P}(R) = (G(P))^{-1}R$ is een lokale ring met maximaal ideaal $Q_{R-P}(P) = (G(P))^{-1}P$ en het kwotiënt : $Q_{R-P}(R)/Q_{R-P}(P) = Q_{R-P}(R/P) = Q_{cl}(R/P)$ is wegens de stelling van Goldie simpel Artins (we hebben dus lokale ringen à la Goldie)

Nu hebben we natuurlijk :

$A = T^{-1}S/T^{-1}Sf(P) = S \otimes_R G(P)^{-1}R/G(P)^{-1}P = S \otimes_R Q_{cl}(R/P)$

Merk de ontroerende overeenkomst met het kommutatieve geval op : wanneer $f : R \longrightarrow S$ een ringmorfisme is tussen kommutatieve ringen, dan is de vezel van f in een priem P : $S \otimes_R Q(R/P)$ met $Q(R/P)$ het breukenlichaam van R/P !

(2.6) <u>een belangrijk voorbeeld</u>

Zij R een Z.C.-ring en f het kanonieke morfisme van R in $R[T_1,\ldots,T_n]$, dan is de vezel van f in een P van Spec(R) gelijk aan : $Q_{cl}(R/P)[T_1,\ldots,T_n]$ .Het centrum van deze vezel is $Q(Z(R/P))[T_1,\ldots,T_n]$ een e.v. algebra over de vezel van de afbeelding C naar $C[T_1,\ldots,T_n]$ in $P \cap C$:$Q(C/p)[T_1,\ldots,T_n]$

X

(2.7) <u>definitie</u>

Zij R een lokale Z.C.-ring met maximaal ideaal M, de vezels van het kanonieke morfisme $R \longrightarrow K_M(R)$ noemen we de <u>formele vezels</u> van R

Zij R een willekeurige Z.C.-ring en P priem in R , de <u>formele vezels van R in P</u> zijn de formele vezels van de lokale Z.C.-ring $Q_{R-P}(R)$

(2.8) Laat ons nu de formele vezels van een lokale Z.C.-ring R met maximaal ideaal M berekenen :
de formele vezel van R in P is gelijk aan

$$K_M(R) \otimes_R Q_{cl}(R/P) = K_m(C) \otimes_C R \otimes_R Q_{cl}(R/P)$$
$$= K_m(C) \otimes_C Q_{cl}(R/P)$$

Waarin m natuurlijk het unieke maximale ideaal van C is : $m = M \cap C$. Het centrum van deze vezel is :

$$K_m(C) \otimes_C Q(Z(R/P))$$

wederom een e.v. algebra over $K_m(C) \otimes_C Q(C/p)$ de formele vezel van C in $p = P \cap C$.
Uit voorbeeld (2.6) en bovenstaande berekening volgt dat de vezels van een Z.C.-ring in een priem P zodat : $Z(R/P) = C/p$ bijzonder prettig zijn : hun centrum is juist de korrespon-

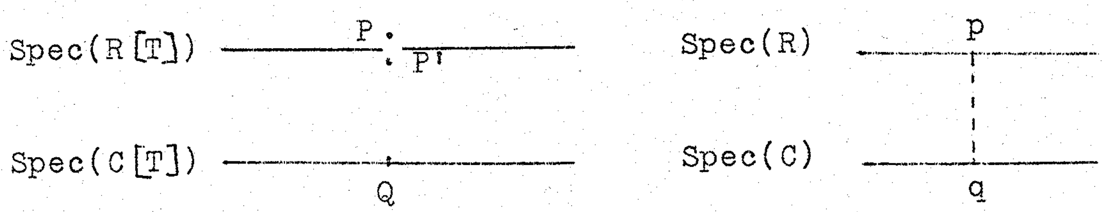
derende vezel van het centrum.
Jammer genoeg hebben Zariski-centraal ringen i.h.a. deze eigenschap niet voor alle priemen, een bron van troubles :

(2.9) Z.C.-ringen hebben ook minder goede kanten : zo is de klasse niet gesloten onder tensorprodukten , zelfs een centraal trancendent elementje toevoegen geeft al problemen:

<u>tegenvoorbeeld</u> : R Zariski-centraal en R[T] niet Zariski-centraal (fvo)

Neem de getwiste polynoomring $\mathbb{C}[X,-]$ waar - de toevoeging voorstelt, dus : $iX = -Xi$. Het centrum ervan is $\mathbb{R}[X^2]$ en $\mathbb{C}[X,-]$ is dus duidelijk Z.C. want I^2 wordt voortgebracht door $I \cap C$. Bekijk nu de ring $\mathbb{C}[X,-][T]$,deze heeft centrum $\mathbb{R}[X^2,T]$ .Het zal volstaan een priemideaal in $\mathbb{R}[X^2,T]$ te vinden dat opsplitst is $\mathbb{C}[X,-][T]$:
Neem $(X^2, 1+T^2)$ in $\mathrm{Spec}(\mathbb{R}[X^2,T])$, hier liggen twee priemen boven : $(X,i+T)$ en $(X,i-T)$!

(2.10) We gaan onze vezel-theorie nu loslaten op dit probleem om te zien wat er precies misgaat en om dan nodige voorwaarden op te leggen opdat R[T] toch Z.C. zou zijn :
Omdat R[T] e.v. is over zijn centrum is Z.C. equivalent met 'unique lying over' eigenschap (Z.C. is hier e.v. over centrum Zariski-Centraal, dus niet noodzakelijk faithful). Stel dat we volgende situatie hebben :



Met P en P' boven eenzelfde centraal priemideaal : Q , omdat R Zariski-centraal is hebben we natuurlijk : $P \cap R = P' \cap R = p$. Dit spoort ons natuurlijk aan te gaan kijken naar de vezel van de kanonieke afbeelding $R \longrightarrow R[T]$ in $\bar{p}$.
Deze is wegens voorbeeld (2.6) gelijk aan $Q_{cl}(R/P)[T]$. Nu weten we dat $Q_{cl}(R/P)$ een simpel Artinse ring is en dan is $Q_{cl}(R/P)[T]$ Zariski-centraal en heeft dus 'unique lying over'

over zijn centrum : $Q(Z(R/P))[T]$. Verder is de vezel van het kanonieke morfisme $C \to C[T]$ in q gelijk aan $Q(C/q)[T]$. Samenvattend hebben we volgende situatie :

$$\begin{array}{ccc} ({}^a f)^{-1}(p) & \xleftrightarrow{1-1} & \mathrm{Spec}(Q_{cl}(R/P)[T]) \\ & & \updownarrow 1-1 \\ & & \mathrm{Spec}(Q(Z(R/P)[T]) \end{array}$$

$$({}^a g)^{-1}(q) \xleftrightarrow{1-1} \mathrm{Spec}(Q(C/P\cap C)[T])$$

Het opsplisen van priemen kan dus enkel gebeuren in de overgang : $Q(C/q)[T] \to Q(Z(R/P))[T]$ .Het grappige hiervan is dat we de studie van $\mathrm{Spec}(R[T])$ op het klassieke kommutatieve probleem : hoe splitsen polynomen in eindige lichaamsuitbreidingen ? hebben herleid
Omdat er in een echte lichaamsuitbreiding wel altijd irreduciebele polynomen reduciebel zullen worden hebben we dus volgende stelling bewezen :

(2.11) <u>stelling</u>

R e.v. Zariski-centraal,equivalent :
1. $R[T]$ is Zariski-centraal
2. Voor alle P in $\mathrm{Spec}(R)$:$Z(R/P) = C/P\cap C$

(2.12) Nu kunnen we natuurlijk de klasse beschouwen die voldoet aan (2.11) en opnieuw vragen of deze klasse gesloten is onder tensorprodukten.

Een ander probleem is of er wel zo'n Zariski-centraal ringen bestaan die niet Azumaya zijn.

(2.13) Analoge redeneringen kunnen we opbouwen voor een grotere klasse van ringen (bvb. birationale extenties) om na te gaan of de priemen in het"goede open deel" splitsen.Verder is het zowieso nuttig om met vezels te werken om meer vat te krijgen op priemen in extenties.

II.3 : FORMELE SPECTRA

(3.1) Hoewel we waarschijnlijk EGA,I,10 "Schémas formels" zonder al teveel moeite kunnen veralgemenen tot het Z.C.-geval,zullen we ons hier beperken tot de definitie en enkele elementaire stellingen.

(3.2) Zij R een komplete Z.C.-ring in de I-adische topologie.Spec(R/I) is natuurlijk bijektief met V(I) in Spec(R), de verzameling van de open priemen in R, voor alle n geldt natuurlijk : $\mathrm{Spec}(R/I) = \mathrm{Spec}(R/I^n) = \mathrm{Spec}(R/R(I \cap C)) = X$. Noteer verder voor alle n : O_n is de struktuurschoof van R/I^n boven X.Als n groter is dan m dan krijgen we een epimorfisme (en dus extentie): $R/I^n \longrightarrow R/I^m$ en een morfisme van geringde ruimten (cfr. A.Verschoren : "les extensions et les schémas non-commutatifs") : $u^n_m : O_n \longrightarrow O_m$ .Het is duidelijk dat dit een projektief systeem is van geringde ruimten.De topologie op X laat een basis toe bestaande uit quasi-kompakte opens en dus (EGA,0.3.9.1) kunnen we aan elke O_n een schoof van topologisch pseudo-diskrete ringen associëren die we nog steeds O_n noteren.Neem nu O_X : de schoof van topologische ringen boven X die de projektieve limiet is van $(O_n)_n$ .Voor iedere quasi-kompakte open U van X krijgen we (EGA,0.3.2.6) : $s(U,O_X) = \varprojlim s(U,O_n)$.

(3.3) <u>definitie</u>

(X,O_X) noteren we Spf(R) en noemen we het <u>formele spectrum</u> van de volledige ring R.

(3.4) <u>stelling</u>

Als $(X,O_X) = \mathrm{Spf}(R)$ voor een volledige Z.C.-ring dan is $s(X,O_X)$ topologisch iso met R

<u>bewijs</u>

Omdat X gesloten is in Spec(R) is het dus quasi-kompakt en dus hebben we : (3.2) $s(X,O_X) = \varprojlim s(X,O_n)$

Nu is $s(X,O_n)$ natuurlijk R/I^n en omdat R volledig was zijn we klaar !

(3.5) stelling

Zij (X,O_X) = Spf(R) voor een volledige Z.C.-ring, dan bestaan er voldoende veel idealen J in R : als $Y(J) = X(J) \cap X$ dan is $(Y(J)\ ,\ O_X|Y(J))$ isomorf met $\mathrm{Spf}(Q_J(R))$

bewijs

Onder "voldoende veel" bedoelen we natuurlijk dat de Y(J) een basis voor X vormen. Omdat R Z.C.-ring is weten we dat Spec(R) een basis X(J) heeft van geometrische opens (cfr. FVO, lnm 444 voor bewijs en definitie). Zij R volledig in de I-adische topologie en X(J) geometrisch open. $Q_J(R/I) = Q_J(R)/Q_J(I) = Q_J(R)/Q_J(R)j(I)$ en dus identificeert de topologische ruimte $\mathrm{Spf}(Q_J(R))$ zich met Y(J). Zij nu U een kwasi-compakte open in X bevat in Y(J), dan zijn de sekties van O_n boven U gelijk aan de sekties van de struktuurschoof : $\mathrm{Spec}(Q_J(R)/Q_J(R)j(I^n))$ boven U en als we dus $\mathrm{Spf}(Q_J(R))$ nemen dan vallen de sekties hiervan boven U samen met de sekties van O_X boven U.

arenaweide :
grote geesten houden van open ruimtes
kleine geesten bouwen ze vol
ugh!

hoofdstuk drie : REFLECTORS-GEGRADEERD

bij wijze van verontschuldiging (4)

In hun bestseller "reflectors and localization - application to sheaf theory" toonden F. Van Oystaeyen en A. Verschoren aan dat vele geringde ruimten in feite lokalizaties zijn in schoof- en preschoof Moduulkategorieën.
Nadat F. Van Oystaeyen in "On Graded Rings and Modules of Quotients" de lokalizatietheorie in gegradeerde moduul-kategorieën uitgewerkt had , lag de weg vrij om het reflector-werk lichtjes te veralgemenen teneinde ook Proj(-) als een lokalizatiefunktor op te vatten.
We vertrekken nu van een (pre)schoof van gegradeerde ringen en we bekijken nu lokalizaties in de Grothendieck-kategorie van de gegradeerde Modulen hierover.De resultaten uit "reflectors" krijgen we terug door de ring-schoof triviaal te graderen.Deze veralgemening stelde ons voor geen al te zware problemen,de meeste bewijzen konden mits kleine wijzigingen (meestal werken met homogene elementen,gegradeerde idealen,enz.) overgenomen worden.
Slechts enkele bewijsjes vroegen een radikaal andere aanpak, zoals het kiezen van andere generatoren enzo,verder bleef de kreativiteit van de schrijver beperkt tot het vinden van de juiste definities,de beste afkortingen,enz.
Een routine-klus dus,die desalniettemin vrij nuttig was omdat ze me vertrouwd maakte met gegradeerde toestanden en mij

immuniseerde tegen doorgeflipte abstraktie.

1. GEGRADEERDE RINGEN EN MODULEN - RINGTHEORETISCH

(1.1) definitie

Een ring R noemen we gegradeerd (van type $\mathbb{Z}$) als R additieve deelgroepen R_i (i in $\mathbb{Z}$) heeft zodat :
$R = \oplus R_i$ en $R_iR_j \subset R_{i+j}$.

Hieruit volgt natuurlijk dat 1 in R_0 zit en dat R_0 een deelring van R is.

(1.2) voorbeelden

I) Iedere ring kan beschouwd worden als een gegradeerde door de triviale gradatie : $R_0 = R$ en $R_i = 0$ voor $i \neq 0$.

II) Zij R een ring en $f:R \to R$ een injektief ringmorfisme. De ring der getwiste polynomen $S = R[X,f]$ is een gegradeerde ring : $S_i = 0$ als $i < 0$, $S_i = \{aX^i, a \text{ in } R\}$ als $i \geqslant 0$.

(1.3) definitie

Zij R een gegradeerde ring en M in R-mod. M heet gegradeerd als er additieve deelgroepen M_i zijn :
$M = \oplus M_i$ en $R_iM_j \subset M_{i+j}$.

(1.4) De elementen van $h(R) = \bigcup_i R_i$ en $h(M) = \bigcup_i M_i$ noemen we de homogene elementen van R, resp. M. Als $m \neq 0$ in M_i dan noemen we m een homogeen element van graad i en we schrijven $\deg(m)=i$. Elk niet-nul element kunnen we op unieke wijze schrijven als een eindige som van homogene elementen, de homogene componenten van m.

(1.5) Zij M een gegradeerd R-moduul. Een deelmoduul N van M noemen we een gegradeerd deelmoduul als $N = \oplus N \cap M_i$.

(1.6) We beschouwen nu twee links gegradeerde R-modulen. Een moduulmorfisme $f: M \to N$ noemen we een morfisme van graad p als $f(M_i) \subset N_{i+p}$. $\mathrm{HOM}_R(M,N)_p$ is de verzameling van alle R-moduulmorfismen van graad p. $\mathrm{HOM}_R(M,N)$ is de unie van alle $HOM_R(M,N)_p$.Het is tenduidelijkste een gegradeerde abelse groep.

(1.7) We willen nu de kategorie R-gr introduceren.Als objekten heeft deze kategorie de gegradeerde links-R-modulen en verder geldt voor M,N in R-gr : $Hom_{R\text{-}gr}(M,N) = HOM_R(M,N)_0$.Het is niet al te moeilijk na te gaan dat dit een abelse kategorie is die voldoet aan de axioma's Ab3, Ab4,$Ab3^*$ en $Ab4^*$,zelfs Ab5.Kortom,R-gr is een Grothendieck-kategorie.

(1.8) Gabriël-Popescu fans als we zijn,zijn we in hoge mate geinteresseerd in de generator van R-gr..Laat op R-gr funktoren T_n gedefinieerd zijn als volgt :
$T_n(M)_i = M_{n+i}$.Het is duidelijk dat T_n een kategorie-equivalentie definieert en verder dat :

1) $T_n \circ T_m = T_{n+m}$
2) $T_n \circ T_{-n} = Id$.
3) $U \circ T_n = U$

Waar U de funktor is van R-gr naar R-mod die aan elk gegradeerd links moduul M het korresponderende ongegradeerde links moduul toevoegt.Om onze notaties enigzins te verlichten noteren we : $T_n(M) = M(n)$ en $U(M) = \underline{M}$ .De bewuste generator van R-gr is nu $\oplus R(n)$.

2. GEGRADEERDE RINGEN EN MODULEN - SCHOOFTHEORETISCH

(2.1) Zij X een willekeurige topologische ruimte.Alle beschouwde pre-schoven zullen gedefiniëerd worden boven X,tenzij uitdrukkelijk anders vermeld.

(2.2) Een (pre)schoof R van ringen noemen we <u>gegradeerd</u> als voor alle U open in X : R(U) is een gegradeerde ring en als verder de restriktieringhomomorfismen R_V^U met $V \subset U$ open in X zo zijn dat $R_V^U(R(U)_n) \subset R(V)_n$.

(2.3) Een (pre)schoof van abelse groepen M noemen we een gegradeerd links (pre) R-Moduul als voor iedere U open in X, M(U) een gegradeerd links R(U)-moduul is en als alle restriktiehomomorfismen M_V^U met $V \subset U$ opens in X, semilineair zijn tov. R_V^U en zodat $M_V^U(M(U)_n) \subset M(V)_n$.
Een gegradeerd links (pre) Ideaal van R is een deelschoof (resp. preschoof) van R zodat die eveneens een gegradeerd links R-Moduul is. In het vervolg zullen we het prefix "links" meestal weglaten.

De nulschoof noteren we tenslotte : $\bar{0}$

(2.4) gs(R) is de kategorie der links gegradeerde R-Modulen en met morfismen f : $M \to N$ zodat f(U) in $\mathrm{Hom}_{R(U)-gr}($ M(U),N(U)) is, voor alle U opens in X.

gp(R) is de kategorie der links gegradeerde pre-R-Modulen en met morfismen die aan dezelfde voorwaarden voldoen.

(2.5) merk verder op dat elke (pre)schoof van gegradeerde ringen R natuurlijk eveneens kan opgevat worden als een (pre)schoof van ringen. R aldus opgevat noteren we $\underline{R}$.
p($\underline{R}$) en s($\underline{R}$) zijn dan de kategorieën der links R-pre, resp. R-Modulen. (à la "reflectors and lokalization")

(2.6) omgekeerd kunnen we natuurlijk iedere (pre)schoof van ringen S opvatten als een preschoof van gegradeerde ringen door iedere S(U) de triviale gradatie te geven.
In dit geval is natuurlijk: gp(S) = p($\underline{S}$) , gs(S) = s(S).
Alle stellingen die we zullen afleiden over gegradeerde Ringen en Modulen hebben dus ongegradeerde gevolgen die we steeds in de notatie met S zullen vermelden, S gegradeerd als hierboven.

(2.7) stelling

gp(R) is een Grothendieck-kategorie en gs(R) is een strikte Giraud-deelkategorie van gp(R)

bewijs

Omdat R-gr een Grothendieck-kategorie is , is dit een bijzonder geval van stelling I.5.5.

gevolg

S een (pre)schoof van ringen dan geldt:
p(S) is een Grothendieck-kategorie en s(S) is een Giraud-deelkategorie van p(S).

(2.8) Een globale sektie s in R(X) bepaald een Punt s° van R als volgt :
U open in X , dan is $s°(U) = R^X_U(s)$. Als $V \subset U$ opens zijn in X, dan geldt :

$$R^U_V(s°(U)) = R^U_V(R^X_U(s)) = R^X_V(s) = s°(V)$$

Het is dus duidelijk dat s° een preschoof van verzamelingen is.Zij s° een Punt van R dan noteren we s° in R.

(2.9) Produkten en sommen van Punten definiëren we "sektiegewijs".Omdat de restriktiehomomorfismen ringmorfismen zijn,zijn produkten en sommen van Punten,Punten.
Op analoge wijze kunnen we Punten van gegradeerde (pre) R-Modulen definiëren en skalaire vermenigvuldiging van Punten.

(2.10) De verzameling Punten van een M in gp(R) vormt een slappe preschoof PM :
$PM(U) = \{ x \text{ in } M(U) : \exists\, y \text{ in } M(X) : M^X_U(y) = x \}$
PM is de grootste slappe preschoof in M.

(2.11) stelling

1. PR is een preschoof van gegradeerde ringen
2. M in gp(R) dan is PM in gp(PR)

bewijs

1. We moeten enkel nagaan dat PR(U) een gegradeerde ring is: $PR(U) = \text{im}\ (\ R^X_U(R(X))) = \text{im}(R^X_U(\oplus R(X)_n))$
$= \oplus\ \text{im}(R^X_U(R(X)_n))$.

verder worden de goede voorwaarden op de restriktiemorfismen geërfd van de R_V^U.
2. Analoog.

gevolg

S een (pre)schoof van ringen, M in p(S) dan is PM in p(PS).

(2.12) Zij I een gegradeerd links (pre) Ideaal van R en s° een homogeen Punt in R (i.e. s in h(R(X))), dan:
$(I:s°)(U) = x$ in $R(U)$: $xs°(U)$ in $I(U)$

(2.13) stelling

---

in de situatie van 2.12 geldt :
1. (I:s°) is een gegradeerd links pre-Ideaal
2. Als R een schoof is, dan (I:s°) een gegradeerd Ideaal

---

bewijs
1. Zij U open in X. En x in $(I:s°)(U)$ dan geldt :
$R_V^U(xs°(U))$ in $R_V^U(I(U)) = I_V^U(I(U)) \subset I(V)$. Anderzijds geldt:
$R_V^U(xs°(U)) = R_V^U(xR_U^X(s)) = R_V^U(x)R_V^X(s) = R_V^U(x)s°(V)$ en dus beperkt R_V^U tot een morfisme $(I:s°)(U) \longrightarrow (I:s°)(V)$ die van (I:s°) een pre R-moduul maakt. Verder geldt natuurlijk dadelijk dat $(I:s°)(U)$ een gegradeerd R(U)-moduul is. De restriktiemorfismen zijn ook graadbehoudend vermits alle R_V^U het zijn.
2. Veronderstel nu dat R en I schoven zijn. Neem U open in X en U_i een open overdekking van U. Noteer met h_i, resp. h_{ij}^i de restriktiemorfismen $R_{U_i}^U$ resp. $R_{U_i \cap U_j}^{U_i}$. Vermits zowel I als (I:s°) deelschoven van R zijn zal het geen verwarring zaaien als we beide restriktiemorfismen aanduiden met hetzelfde symbool. Stel dat we voor alle i een x_i in $(I:s°)(U_i)$ hebben zodat voor alle i en j : $h_{ij}^i(x_i) = h_{ij}^j(x_j)$. Omdat R een schoof is bestaat er een x in R(U) zodat $h_i(x) = x_i$.
Beschouw nu $xs°(U)$ dan $h_i(xs°(U)) = h_i(x)h_i(s°(U)) = x_is°(U_i) = z_i$ in $I(U_i)$. De keuze der x_i impliceert dat

$h^i_{ij}(z_i) = h^j_{ij}(z_j)$ en omdat I een schoof is bestaat er dus een z in I(U) zodat $h_i(z) = z_i$ .Het element xs°(U)-z van R(U) wordt onder alle h_i op 0 gemapt.Wegens de gesepareerdheid volgt hieruit : z = xs°(U) en dus x in (I:s°)(U) en we zijn klaar.

gevolg

I een pre Ideaal van S een preschoof van ringen.Dan:
1. (I:s°) is een pre Ideaal van S voor alle s° in PS
2. S een schoof dan is (I:s°) een Ideaal.

---

3. KERNFUNKTOREN IN R-gr

(3.1) Zij C een Grothendieck-kategorie.Een funktor k: C C noemen we een kernfunktor in C als

1. k is een subfunktor van de identiteit
2. k is links-exact
3. k(M/k(M)) = 0 voor alle M in C

(3.2) R-gr is een Grothendieck kategorie en dus kunnen we kijken naar alle kernfunktoren zoals in (3.1).Deze verzameling noteren we R-gker.De interessante kernfunktors in R-gr zullen die zijn die niet veranderen als we de orde op triviale wijze veranderen.Een kernfunktor k in R-gker noemen we dus star als k(M(n)) = k(M)(n).De verzameling der starre kernfunktoren in R-gr noteren we R-sker.In "On Graded Rings and Modules of Quotients" heeft F.Van Oystaeyen deze starre kernfunktoren onderzocht.We vermelden één stelling :

(3.3) stelling

Er bestaat een bijektieve korrespondentie tussen starre kernfunktoren in R-gr en gegradeerde filters in R.

Een gegradeerde filter in R is een verzameling gegradeerde links-idealen van R die voldoen aan :

(F_1) : Als I in L is en J een gegradeerd links ideaal van R : $I \subset J$ dan is ook J in L

(F_2) : Als I en J in L zijn dan ook $I \cap J$

(F_3) : Als I in L zit en x in h(R) dan (I:x) in L

(F_4) : Als I in L zit en (J:x) in L voor alle x in h(I) dan ook J in L

Zij k nu in R-sker en L(k) de bijhorende gegradeerde filter dan geldt voor alle M in R-gr :
$k(M) = \{ m \text{ in } M : \exists\, I \text{ in } L(k) : Im = 0 \}$

4. GEGRADEERDE LOKALE KERNFUNKTOREN IN gp(R)

(4.1) met gp(R)-Ker noteren we de verzameling van alle kernfunktoren in gp(R) à la (3.1)

(4.2) definitie

Een kernfunktor K in gp(R)-Ker noemen we star als voor alle M in gp(R) : $K(M)(U)(n) = K(M(n))(U)$ voor alle U open in X.

Het is natuurlijk duidelijk dat we met M(n) de preschoof $M(n)(U) = M(U)(n)$ bedoelen.
De verzameling van de starre kernfunktoren in gp(R) noteren we met gp(R)-Sker.
Merk tenslotte op dat als S triviaal gegradeerd is dat dan p(S)-Ker = gp(S)-Ker = gp(S)-Sker = p(S)-Sker .

(4.3) We willen nu kernfunktoren in gp(R) bekijken die lokaal beschreven kunnen worden als gegradeerde kernfunktoren in moduul-kategorieën à la paragraaf 3:
Voor elke U open in X geven we een kernfunktor K(U) in R(U)-sker. Voor alle $V \subset U$ opens in X zijn volgende voorwaarden voldaan :

(L_1) Stel M_U in R(U)-gr en M_V in R(V)-gr en $f: M_U \to M_V$ een semilineaire afbeelding tov. R_V^U ,dan is volgend diagram kommutatief :

$$\begin{tikzcd} K(U)(M_U) \arrow[r, "f_{res}"] \arrow[d] & K(V)(M_V) \arrow[d] \\ M_U \arrow[r, "f"] & M_V \end{tikzcd}$$

(L_2) Stel M_U en M'_U in $R(U)$-gr , g_U in $\mathrm{Hom}_{R(U)\text{-gr}}(M_U, M'_U)$, en M_V en M'_V in $R(V)$-gr , g_V in $\mathrm{Hom}_{R(V)\text{-gr}}(M_V, M'_V)$. Zij verder f_1 en f_2 graadbehoudende semilineaire afbeeldingen tov. R_V^U zodat volgend diagram kommutatief is:

$$\begin{tikzcd} M_U \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "g_U"] & M_V \arrow[d, "g_V"'] \\ M'_U \arrow[r, "f_2"] & M'_V \end{tikzcd}$$

dan is ook volgend diagram kommutatief:

$$\begin{tikzcd} K(U)(M_U) \arrow[r, "f_{1,res}"] \arrow[d, "K(U)(g_U)"] & K(V)(M_V) \arrow[d, "K(V)(g_V)"'] \\ K(U)(M'_U) \arrow[r, "f_{2,res}"] & K(V)(M'_V) \end{tikzcd}$$

(4.4) <u>definitie</u>

Een familie kernfunktoren $K(U)$ waar U de opens in X doorloopt die voldoet aan voorwaarden L_1 en L_2 noemen we een <u>gegradeerde lokale kernfunktor</u> in gp(R)

We moeten nu eerst nagaan dat de familie $K(U)$ wel degelijk een kernfunktor in gp(R) definiëert:

(4.5) <u>stelling</u>

Zij $K(U)$ een familie kernfunktoren als in (4.3) die voldoen aan L_1 en L_2, dan bestaat er een unieke starre kernfunktor in gp(R) zodat voor alle M in gp(R): $K(M)(U)=K(U)M(U)$.

bewijs

Zij M in gp(R). Als we in (L_1) $f = M_V^U$ stellen dan hebben we een preschoof K(M) gedefinieërd die aan iedere U open in X toevoegt : K(M)(U) = K(U)(M(U)) .
Semilineariteit van f_{res} en het feit dat K(U) in R(U)-gker is impliceert dat K(M) in gp(R) is.
(L_2) laat zich dan vertalen in : K is een subfunktor van de identiteit.
Vermits sekties nemen over U ,open in X, een exacte funktor is van gp(R) $\longrightarrow$ R(U)-gr volgt uit de links-exactheid van K(U) voor alle U open in X de links-exactheid van K.
Verder geldt natuurlijk eveneens M/K(M) in gp(R) en we hebben voor elke U open in X :

$$\begin{aligned} K(M/K(M))(U) &= K(U)(M/K(M))(U) \\ &= K(U)(M(U)/K(U)M(U)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Er rest ons dus nog enkel de starheid van K te bewijzen:

$$\begin{aligned} K(M(n))(U) &= K(U)(M(n)(U)) \\ &= K(U)(M(U)(n)) \\ &= (K(U)(M(U)))(n) \qquad (K(U) \text{ in } R(U)\text{-sker}) \\ &= (K(M))(n)(U) \end{aligned}$$

gevolg

Zij S een schoof van ringen.Als voor iedere U in Open(X) een kernfunktor K(U) in S(U)-ker gegeven wordt zodat de "ongegradeerde" voorwaarden L_1 en L_2 voldaan zijn dan bestaat er een unieke kernfunktor in p(S) zodat voor alle M in p(S) geldt K(M)(U) = K(U)(M(U))

(4.6) Een kernfunktor K in gp(R)-Sker die gegeven wordt door een familie K(U) die voldoet aan L_1 en L_2 noemen we dus een <u>(starre) gegradeerde lokale kernfunktor in gp(R)</u>.

Een kernfunktor in p(S)-Ker die gegeven wordt door een familie K(U) die voldoen aan de ongegradeerde voorwaarden L_1 en L_2 noemen we een <u>lokale kernfunktor in p(S)</u>.

(4.7) definitie

Een starre gegradeerde kernfunktor K in gp(R)-Sker noemen we lokaal in U ,U open in X, als voor alle M,M' in gp(R) met M(U) = M'(U) geldt :
K(M)(U) = K(M')(U)

(4.8) stelling

K in gp(R)-Sker , equivalent zijn
1. K is een gegradeerde lokale kernfunktor
2. K is lokaal in iedere U open in X

---

bewijs

De implicatie 1. dan 2. is triviaal . Om de omgekeerde implikatie te bewijzen moeten we starre gegradeerde kernfunktoren K(U) in R(U)-sker konstruëren voor iedere U open in X zodanig dat voor alle M in gp(R) geldt: K(M)(U)=K(U)M(U).
Zij M_U in R(U)-gr en stel $K(U)M_U$ = K(M)(U) met M een element in gp(R) zodat M(U) = M_U .Omdat K lokaal is geldt dat de definitie niet afhangt van de keuze van M.
Zij verder $(R^U_V)_*$ de funktor van R(V)-gr naar R(U)-gr door restriktie van skalairen tov. R^U_V met V U,opens in X.
Definiëer nu een preschoof $C(M_U)$ als volgt :

$C(M_U)(V) = (R^V_U)_*(M_U)$ als $U \subset V$ en $C(M_U)(V) = 0$ als $U \not\subset V$.

De restriktie afbeeldingen $C(M_U)^V_W$ voor $W \subset V$,opens,zijn:

(1) 0-afbeeldingen als $U \not\subset W$ en
(2) $C(M_U)(V) \longrightarrow C(M_U)(W)$
$rm \longrightarrow R^V_W(r)m$ anders,

waarin $rm = R^V_U(r)m$ en $R^V_W(r)m = R^W_U\ R^V_W(r)m$.

Het is duidelijk dat $C(M_U)(U) = M_U$ en dat $C(M_U)$ in pg(R) zit (restriktieafbeeldingen voldoen aan voorwaarde omdat de R^V_W 's eraan voldoen) en bijgevolg kunnen we $C(M_U)$ gebruiken voor de definitie van K(U).
Verder is het duidelijk dat een morfisme $M_U \longrightarrow M'_U$ in R(U)-gr een morfisme $C(M_U) \longrightarrow C(M'_U)$ in pg(R) induceert.
Daarom is het gemakkelijk na te gaan dat K(U) een sub-

funktor van de identiteit is .

Zij $0 \longrightarrow M'_U \longrightarrow M_U \longrightarrow M''_U \longrightarrow 0$ exact in R(U)-gr dan zijn ook volgende rijën exact :

$\bar{0} \longrightarrow C(M'_U) \longrightarrow C(M_U) \longrightarrow C(M''_U) \longrightarrow \bar{0}$ in pg(R)

$\bar{0} \longrightarrow K(C(M'_U)) \longrightarrow K(C(M_U)) \longrightarrow K(C(M''_U))$ in pg(R)

$0 \longrightarrow K(C(M'_U))(U) \longrightarrow K(C(M_U))(U) \longrightarrow K(C(M''_U))(U)$ in R(U)-gr

$0 \longrightarrow K(U)M'_U \longrightarrow K(U)M_U \longrightarrow K(U)M''_U$ in R(U)-gr

bijgevolg is K(U) links-exact.Verder geldt :

$M_U/K(U)M_U = (C(M_U)/K(C(M_U)))(U)$ en dus :

$K(U)(M_U/K(U)M_U) = K(C(M_U)/K(C(M_U)))(U) = 0$

Merk tenslotte op dat de starheid van K , starheid impliceert voor alle K(U).

klaar!

gevolg

K in p(S)-Ker , equivalent zijn :

1. K is een lokale kernfunktor in p(S)
2. K is lokaal in iedere U open in X

(4.9) stelling

Zij U_i een open overdekking van X en laat R_i de restriktie van R tot U_i zijn. Beschouw nu kernfunktoren (resp. star, lokaal) K_i in gp(R_i) zodat voor alle M in gp(R) geldt :

$f_{ij} : K_i(M \mid U_i \cap U_j) \longrightarrow K_j(M \mid U_i \cap U_j)$ is een graadbehoudend isomorfisme zodat voor elk trippel (i,j,k) :

$f_{ik} = f_{jk}f_{ij}$, dan bestaat er een kernfunktor (resp. star, lokaal) in gp(R) zodat $K(M) \mid U_i = K_i(M \mid U_i)$.

bewijs

schooftheoretisch! Men gaat eerst K(M) definiëren op een basis van open delen met restriktieafbeeldingen komend van de f_{ij} en daarna gaat men op elk open deel K(M)(U) definiëren door projektieve limieten.Voor meer details cfr. Grothendieck-Dieudonné EGA I .

(4.10) De verzameling van alle gegradeerde lokale starre kernfunktoren noteren we gp(R)-Lker.De lokale kernfunktoren op p(S) met p(S)-Lker.

5. VERBAND TUSSEN pg(R)-Lker en p($\underline{R}$)-Lker

(5.1) R is een preschoof van gegradeerde ringen. In deze paragraaf willen we informatie verkrijgen over gegradeerde lokale kernfunktoren in gp(R) die afkomstig zijn van lokale kernfunktoren op p($\underline{R}$). Overeenkomstig afspraak (2.5) zullen we wanneer we werken in p($\underline{R}$) dit aanduiden door $\underline{\cdot}$.

(5.2) <u>definitie</u>

Een lokale kernfunktor $\underline{K}$ in p($\underline{R}$)-Lker noemen we <u>gegradeerd</u> als voor alle U open in X geldt : $L(\underline{K}(U))$ heeft een basis bestaande uit gegradeerde links R(U)-idealen.

(5.3) <u>stelling</u>

$\underline{K}$ in p($\underline{R}$)-Lker gegradeerd, M in pg(R) dan :
1. $\underline{K}(\underline{M})$ is in gp(R)
2. $\underline{M}/\underline{K}(\underline{M})$ is in gp(R)
3. $\underline{M} \to \underline{M}/\underline{K}(\underline{M})$ is een morfisme in gp(R)

<u>bewijs</u>

1. Omdat de restriktiemorfismen van $\underline{K}(\underline{M})$ afkomstig zijn van die van M zijn ze graadbehoudend en hoeven we dus enkel te bewijzen dat voor alle U open in X geldt : $\underline{K}(U)(\underline{M}(U))$ is een gegradeerd links R(U)-moduul. Neem m in $\underline{K}(U)(\underline{M}(U))$ dan bestaat er een gegradeerd links R(U)-ideaal L zodat $Lm = 0$. Schrijf nu $m = \Sigma m_i$ en $L = \oplus L_n$, dan geldt voor alle i en n : $L_n m_i = 0$ en dus voor alle i : $Lm_i = 0$ en dus m_i in $\underline{K}(U)(\underline{M}(U))$. Klaar!
2. en 3. volgen nu onmiddellijk uit 1.

(5.4) <u>stelling</u>

$\underline{K}$ in p($\underline{R}$)-Lker gegradeerd , dan induceert $\underline{K}$ een gegradeerde lokale kernfunktor K in gp(R)-Lker zodat : $\underline{K}(\underline{M}) = K(M)$ voor alle M in gp(R)

bewijs

Stel $K(U)(M(U)) = \underline{K}(U)(\underline{M}(U))$. Vorige stelling bewijst dat $K(U)$ in $R(U)$-gker zit. $K(U)$ is ook star vermits $M(U)(n)$ en $M(n)(U)$ als $\underline{R}(U)$ modulen ismorf zijn en het lokaal-zijn van K volgt uit het lokaal-zijn van $\underline{K}$.

(5.5) Omgekeerd kunnen we natuurlijk aan iedere gegradeerde lokale kernfunktor K in gp(R)-Lker een lokale kernfunktor $\underline{K}$ in p($\underline{R}$)-Lker toevoegen als volgt :
Neem U een open deel van X . Vermits $K(U)$ in $R(U)$-sker is is $K(U)$ bepaald door een gegradeerde filter $L_g(K(U))$ van gegradeerde links $R(U)$-idealen (cfr. § 3).Laat nu $\underline{K}(U)$ de kernfunktor in $R(U)$-ker zijn bepaald door de filter links-$R(U)$-idealen L voortgebracht door $L_g(K(U))$. Het is duidelijk dat $\underline{K}$ in p($\underline{R}$)-Lker zit en gegradeerd is. Het bovenstaande laat zich samenvatten in :

(5.6) stelling

Er is een 1-1 korrespondentie tussen gp(R)-Lker en de gegradeerde (à la 5.2) kernfunktoren van p($\underline{R}$)-Lker.

---

bij wijze van verontschuldiging

Omwille van zowel symetrie- als sympathieoverwegingen is er in deze thesis haast enkel sprake van linkse objekten. Meer fascistoïede typpetjes kunnen deze thesis natuurlijk ook lezen , zij het dan in spiegelschrift. Waarvoor natuurlijk andermaal mijn verontschuldigingen.

6. LOKALIZATIE IN GROTHENDIECK-KATEGORIEEN

(6.1) We volgen in deze paragraaf F. Van Oystaeyen en A. Verschoren op de voet ("Reflectors and Lokalization"). Indien de lezer vertrouwd is met de abstrakte theorie der lokalizatie in Grothendieck-kategorieën raden we hem/haar aan over te springen naar § 7 .

(6.2) In deze paragraaf zal $\underline{C}$ een Grothendieck-kategorie zijn en K een kernfunktor (à la 3.1) in $\underline{C}$. Een element M van $\underline{C}$ noemen we <u>torsie</u> indien K(M) = M en <u>torsie-vrij</u> indien K(M) = 0 .

(6.3) <u>definitie</u>

Een objekt E van $\underline{C}$ noemen we <u>K - injektief</u> als ieder exact diagram :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[r] \arrow[dl, "g"] & C'' \arrow[r] & 0 \\ & E & & & \end{tikzcd}$$

met C" K-torsie vervolledigd kan worden door een morfisme $g : C \longrightarrow E$ zodat $gi = f$. Als dit op unieke wijze kan , dan noemen we E <u>trouw K-injektief</u>.

(6.4) <u>stelling</u>

equivalent zijn :
1. E is K-injektief en K-torsie vrij
2. E is trouw K-injektief

<u>bewijs</u>

1. dan 2. : beschouw volgend exact diagram :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[r, "p"] \arrow[dl, "g"] & C'' \arrow[r] & 0 \\ & E & & & \end{tikzcd}$$

met C" K-torsie.Vermits E K-injektief is bestaat er minstens een $g : C \longrightarrow E$ zodat $gi = f$ .Stel nu dat g_1 en g_2 zo zijn, dan volgt $(g_1-g_2)i = 0$ en dus faktorizeert g_1-g_2

dus, er bestaat een morfisme $h : C'' \longrightarrow E$ zodat $g_1 - g_2 = hp$. Vermits nu C'' K-torsie is en E K-torsievrij geldt $h = 0$ en dus $g_1 = g_2$.

2. dan 1. : beschouw volgend exact diagram :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[dr, "o"'] & K(E) \arrow[r] & K(E) \arrow[r] & 0 \\
 & E & &
\end{tikzcd}$$

met o de nul-afbeelding. Omdat $K(E)$ K-torsie is bestaat er dus een unieke uitbreiding van o tot $K(E)$, en het moet dus de nul-afbeelding zijn. Omdat het ook een monomorfisme moet zijn geldt dus : $K(E) = 0$. klaar!

(6.5) stelling

Zij $0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$ een exacte rij zodat E K-injektief is en E'' K-torsie dan is E' K-injektief.

bewijs

Beschouw hetvolgende diagram met exacte rijën en een gegeven morfisme f' :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E' \arrow[r, "i"] & E \arrow[r, "p"] & E'' \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "j"'] \arrow[u, "f'"] & C \arrow[r] \arrow[u, "f"] & C'' \arrow[r] \arrow[u, "f''"] & 0
\end{tikzcd}$$

met C'' K-torsie . f wordt verkregen door K-injektiviteit van E en f'' is het geïnduceerde quotiënt-morfisme. Omdat C'' K-torsie is en E'' K-torsievrij geldt $f'' = 0$ en f kan dus gefaktoriseerd worden via E' . We hebben dus een morfisme $f_1 : C \longrightarrow E'$ met $f = if_1$. Men gaat nu eenvoudig na dat $f_1 j = f'$ en dus zijn we klaar.

(6.6) stelling

Zij $0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$ een exacte rij zodat E' K-injektief is , E'' K-torsie en E K-torsievrij , dan is E isomorf met E' .

bewijs

Beschouw volgend exact diagram :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "1"'] & E \arrow[r, "p"] \arrow[dl, "j"] & E'' \arrow[r] & 0 \\ & E' & & & \end{tikzcd}$$

K-injektiviteit geeft een morfisme j : $ji = 1_{E'}$. j is uniek omdat E' ook K-torsievrij is.Verder kan men bewijzen dat i een essentiëel morfisme is (cfr. reflectors) en dat j een monomorfisme is bijgevolg : E iso met E' .

(6.7) De klasse van alle trouwe K-injektieve objekten van $\underline{C}$ vormt een volle deelkategorie van $\underline{C}$ die we $\underline{C}(K)$ noteren en de kwotiënt kategorie van $\underline{C}$ tov. K noemen.De kanonieke inklusie noteren we $i_K : \underline{C}(K) \longrightarrow \underline{C}$. Voor een C K-torsie vrij noemen we E in $\underline{C}(K)$ een K-injektief omhullende van C als $C \longrightarrow E$ een essentiële extentie is zodat E K-injektief is en E/C K-torsie.

(6.8) stelling

Iedere C , K-torsievrij , heeft een op isomorfie na unieke K-injektief omhullende : $E_K(C)$

---

bewijs

Laat E een injektief omhullende zijn van C in $\underline{C}$ (dit kan omdat $\underline{C}$ een Grothendieck kategorie is) , dan is ook E K-torsievrij.Beschouw nu de exacte rij :

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} E/C \longrightarrow 0$$

en definiëer $E_K(C)$ als de pull-back van :

$$\begin{tikzcd} E_K(C) \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ K(E/C) \arrow[r] & E/C \end{tikzcd}$$

Men kan bewijzen dat men $E_K(C)$ kan opvatten als deelobjekt van E en bijgevolg is dus $E_K(C)$ K-torsievrij. Bovendien is $E/E_K(C)$ isomorf met $(E/C)/K(E/C)$ en dus is ook

$E/E_K(C)$ K-torsievrij . Pas nu stelling (6.5) toe op

$$0 \longrightarrow E_K(C) \longrightarrow E \longrightarrow E/E_K(C) \longrightarrow 0$$

en bijgevolg is $E_K(C)$ K-injektief. Tenslotte is $E_K(C)/C$ isomorf met $K(E/C)$ en is dus K-torsie.
Rest ons nog de uniciteit aan te tonen. Stel E'_1 en E'_2 K-injektief omhullenden van C , dan is E'_2 isomorf met een deelobjekt E''_2 van E'_1 dat C als deelobjekt bevat. We kunnen nu stelling (6.6) toepassen om te besluiten : $E'_1 = E''_2 = E'_2$. Klaar!

(6.9) <u>stelling</u>

De inklusie-funktor $i_K : \underline{C}(K) \longrightarrow \underline{C}$ heeft een links-toegevoegde $\underline{\underline{a}}_K$

<u>bewijs</u>
Definiëer voor C in $\underline{C}$: $\underline{\underline{a}}_K(C) = E_K(C/K(C))$. $\underline{\underline{a}}_K$ is ten duidelijkste een funktor van $\underline{C}$ naar $\underline{C}(K)$. Zij nu f een morfisme $C \longrightarrow i_K(D)$ met C in $\underline{C}$ en D in $\underline{C}(K)$. Omdat $i_K(D)$ K-torsievrij is breidt f zich uit tot een morfisme van $C/K(C) \longrightarrow i_K(D)$: f_1 .Vermits $\underline{\underline{a}}_K i_K(D)$ trouw K-injektief is en $\underline{\underline{a}}_K(C)/(C/K(C))$ K-torsie is kan f_1 uitgebreid worden tot een morfisme $f' : \underline{\underline{a}}_K(C) \longrightarrow \underline{\underline{a}}_K i_K(D) = D$ .Het is duidelijk dat dit een isomorfisme definieert tussen $\mathrm{Hom}_{\underline{C}}(C, i_K(D))$ en $\mathrm{Hom}_{\underline{C}(K)}(\underline{\underline{a}}_K(C), D)$.Daarom,klaar!

(6.10) Stel nu tenslotte $Q_K = i_K \underline{\underline{a}}_K$. Voor iedere C in $\underline{C}$ noemen we $Q_K(C)$ tezamen met het kanonieke morfisme :

$$j_K : C \longrightarrow Q_K(C)$$

het $\underline{C}$ -kwotiëntobjekt van C tov. K of nog anders de gelokaliseerde van C tov. K.
Uit wat abstrakt geknoei met volle inbeddingen en links toegevoegden kan men bewijzen :

<u>Stelling</u>

Q_K is een links exacte endofunktor in $\underline{C}$

---

7. LOKALIZATIE IN gp(R)

(7.1) We kunnen de abstrakte theorie van paragraaf 6 nu toepassen op de Grothendieck-kategorie R-gr , R een gegradeerde ring , en kijken naar de lokalizaties tov. starre kernfunktoren in R-sker . Deze lokalizaties werden bestudeerd door F. Van Oystaeyen in "On Graded Rings and Modules of Quotients".
Zij k een starre kernfunktor in R-gr met geassocieerde gegradeerde filter $L_g(k)$. Het kwotiënt-objekt van M in R-gr, $Q_k^g(M)$, tov. de kernfunktor k wordt gegeven door :

$$Q_k^g(M) = \varinjlim \mathrm{HOM}_R(L, M/k(M))$$

waar de induktieve limiet genomen wordt over alle L in $L_g(k)$. Men gaat eenvoudig na dat $Q_k^g(R)$ een gegradeerde ring is en dat voor alle M in R-gr geldt : $Q_k^g(M)$ in $Q_k^g(R)$-gr. Verder is $Q_k^g(.)$ een links-exacte funktor in R-gr en voor alle M in R-gr geldt: $Q_k^g(M(n)) = Q_k^g(M)(n)$.

(7.2) In deze paragraaf zullen we steeds veronderstellen dat R een <u>slappe</u> preschoof van gegradeerde ringen is. Alle restriktiemorfismen R_V^U ,met $V \subset U$ opens in X, zijn dus surjektief. Zij nu k_U in R(U)-sker met geassocieerde gegradeerde filter $L_g(k_U)$ dan zullen we met $\bar{R}_V^U(k_U)$ de kernfunktor in R(V)-sker aanduiden geassocieerd met de gegradeerde filter voortgebracht door $\{ R_V^U(I) : I \text{ in } L_g(k_U)\}$.

(7.3) <u>stelling</u>

K in gp(R)-Lker dan geldt $\bar{R}_V^U(K(U)) \leqslant K(V)$ voor alle $V \subset U$ opens in X .

<u>bewijs</u>
Stel in voorwaarde (L_1) : $M = M_U = M_V$ en $f = 1_M$ dan volgt $\bar{R}_V^U(K(U))(M) \subset K(V)(M)$. Klaar.

(7.4) <u>definitie</u>
Een gegradeerde lokale kernfunktor K in gp(R)-Lker

$\underline{\text{reduceert } R}$ indien : $\mathrm{Ker}(R^U_V) \subset K(U)(R(U))$, voor alle $V \subset U$ opens in X.

(7.5) <u>stelling</u>

K in gp(R)-Lker die R reduceert, dan geldt:
$Q^g_K(R)$ is een preschoof van gegradeerde ringen en de ringstruktuur van $Q^g_K(R)$ ligt volkomen vast door zijn struktuur als element van gp(R). Bovendien hebben we:
$Q^g_K(R)(U) = Q^g_{K(U)}(R(U))$.

<u>bewijs</u>
Het zal volstaan de laatste bewering te bewijzen. Omdat K R reduceert volgt dat $K(U)(R(U))$ juist het inverse beeld is van $K(U)(R(V))$ onder R^U_V. Omdat K lokaal is hebben we : $\bar{R}^U_V(K(U)) \leqslant K(V)$ (vorige stelling) zijn de restriktiemorfismen goed gedefiniëerd en surjektief :

$$\begin{tikzcd} R(U)/K(U)(R(U)) \arrow[r, "\cong"] \arrow[dr, "(R/K(R))^U_V"'] & R(V)/K(U)(R(V)) = R(V)/\bar{R}^U_V(K(U))(R(V)) \arrow[d] \\ & R(V)/K(V)(R(V)) \end{tikzcd}$$

Dit betekent dus dat $R/K(R)$ eveneens een slappe schoof van gegradeerde ringen is en het kanonieke epimorfisme $\bar{j}_K : R \longrightarrow R/K(R)$ bepaalt een gegradeerde kernfunktor $\bar{j}_K K$ in gp($R/K(R)$)-Lker als volgt : $(\bar{j}_K K)(U) = \bar{j}_{K(U)} K(U)$ met $j_{K(U)}$ het kanonieke morfisme $R(U)$ $R(U)/K(U)(R(U))$.
Omdat $K(V) \geqslant \bar{R}^U_V(K(U))$ hebben we kanonieke gegradeerde ringmorfismen : $Q^g_{K(U)}(R(U)) \longrightarrow Q^g_{K(V)}(R(V))$
Deze morfismen breiden de $(R/K(R))^U_V$ uit. We hebben dus bewezen dat Q met $Q(U) = Q^g_{K(U)}(R(U))$ een schoof(pre) is van gegradeerde ringen en tevens geldt Q in gp(R). Door lokale observatie gaat de ervaren schoofiloloog gemakkelijk na dat Q K-torsievrij is, K-injektief, en dat $Q/(R/K(R))$ K-torsie is. Uit dit alles en paragraaf 6 nog vers in de gedachten weten we : $Q = Q^g_K(R)$. Klaar!

gevolg

Zij K een lokale kernfunktor in p(S) die S reduceert. $Q_K(S)$ is een Ring waarvan de struktuur bepaald wordt door de S-Moduul struktuur, $Q_K(S)(U) = Q_{K(U)}(S(U))$.

(7.6) stelling

K in gp(R)-Lker die R reduceert. M in gp(R), dan is $Q^g_K(M)$ in $gp(Q^g_K(R))$ en $Q^g_K(M)(U) = Q^g_{K(U)}(M(U))$.

---

bewijs

Het zal wederom volstaan de laatste bewering te bewijzen. Noteer $\bar{R}^U_V(K(U))$ door $K'(U)$. Zij $V \subset U$ opens in X en beschouw $Q^g_{K(U)}(M(V))$. Merk om te beginnen op dat de R(U)-(gegradeerde)-moduul struktuur van $Q^g_{K(U)}(M(V))$ overgaat op een R(V)-moduulstruktuur via R^U_V , immers stel r in Ker R^U_V en x in $Q^g_{K(U)}(M(V))$ dan geldt:

$r.x$ in Ker R^U_V . $Q^g_{K(U)}(M(V)) \subset K(U)(Q^g_{K(U)}(M(V))) = 0$

Dus is $Q^g_{K(U)}(M(V))$ een R(V) gegradeerd moduul dat K(U)-injektief is maar dan is hét ook K'(U)-injektief. Stel dat we een exact diagram in R(V)-gr hebben :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N/N' & \longrightarrow & 0 \\ & f & \downarrow & \swarrow & g & & & & \\ & & Q^g_{K(U)}(M(V)) & & & & & & \end{array}$$

met N/N' K'(U)-torsie, dan is N/N' K(U)-torsie als gegradeerd R(U)-moduul. Dus kunnen we f uitbreiden tot een morfisme g in R(U)-gr. Maar omdat zowel N als $Q^g_{K(U)}(M(V))$ in R(V)-gr zitten is g natuurlijk ook een morfisme in R(V)-gr. Merk verder op dat: $M(V)/K(U)(M(V)) = M(V)/K'(U)(M(V))$. Omdat $Q^g_{K(U)}(M(V))/K(U)(M(V))$ K(U)-torsie is is het ook K'(U)-torsie als R(V)-moduul. Bovendien is $Q^g_{K(U)}(M(V))$ K'(U)-torsievrij en dus krijgen we : $Q^g_{K(U)}(M(V)) = Q^g_{K'(U)}(M(V))$. Het restriktiemorfisme M^U_V wordt dus uitgebreid tot een goed gedefinieerd morfisme :

$$Q^U_V : Q^g_{K(U)}(M(U)) \longrightarrow Q^g_{K(U)}(M(V)) = Q^g_{K'(U)}(M(V)) \longrightarrow Q^g_{K(V)}(M(V))$$

Men gaat gemakkelijk na dat Q mèt $Q(U) = Q^{g}_{K(U)}(M(U))$ en de hierboven gedefiniëerde restriktiemorfismen een preschoof van gegradeerde modulen is, die $M/K(M)=M'$ bevat. Verder is natuurlijk Q K-torsie vrij en Q/M' K-torsie. Om de K-injektiviteit te bewijzen kunnen we weer lokaal gaan kijken. Uit dit alles volgt dus : $Q = Q^{g}_{K}(M)$ en klaar!

<u>gevolg</u>

Zij K een lokale kernfunktor in p(S) die S reduceert. $Q_K(M)$ is dan op natuurlijke wijze een $Q_K(S)$-Moduul voor alle M in p(R). Verder : $Q_K(M)(U) = Q_{K(U)}(M(U))$

(7.7) Zij K nu in gp(R)-Lker dan weten we uit paragraaf 5 dat we met K een kernfunktor $\underline{K}$ uit p($\underline{R}$)-Lker kunnen associëren die gegradeerd is. Uit het gevolg van voorgaande stelling weten we dat $Q_{\underline{K}}(\underline{M})(U) = Q_{\underline{K}(U)}(\underline{M}(U))$. Neem nu M in gp(R) , de vraag die iedere lezer die enige interesse voor wiskunde heeft zich nu spontaan stelt: is er verband tussen $Q^{g}_{K}(M)$ en $Q_{\underline{K}}(\underline{M})$?

(7.8) <u>enkele afspraken</u>

Voor het vervolg van deze paragraaf nemen we aan dat R een slappe preschoof van <u>positief</u> gegradeerde ringen is. K zal steeds een kernfunktor uit gp(R)-Lker en $\underline{K}$ de ermee geassociëerde gegradeerde kernfunktor uit p($\underline{R}$)-Lker. Verder is M steeds in gp(R).

(7.9) Voor elke m in Z definiëren we :

$$N_m(M)(U) = \{\, x \text{ in } Q_{\underline{K}(U)}(\underline{M}(U)) : \text{er is een gegradeerd links ideaal } L \text{ in } L(\underline{K}(U)) : L_n x \quad (\underline{M}/\underline{K}(U)(\underline{M}))_{n+m} \text{ voor alle } n \,\}$$

Men gaat gemakkelijk na dat dit alles goed gedefiniëerd is, i.ė. eenzelfde x kan niet in twee verschillende N_m'en zijn.

Tenslotte is $gQ_{\underline{K}}(\underline{M})$ als volgt gedefiniëerd :

$$gQ_{\underline{K}}(\underline{M})(U) = \oplus N_m(M)(U)$$

(7.10) <u>stelling</u>

---

1. M in gp(R) dan ook $gQ_{\underline{K}}(\underline{M})$ in gp(R)
2. $gQ_{\underline{K}}(\underline{R})$ is een preschoof van gegradeerde ringen die $\underline{R}/\underline{\overline{K}}(\underline{R})$ als gegradeerde deelring bevat.De ringstruktuur van $gQ_{\underline{K}}(\underline{R})$ is uniek bepaald door z'n $\underline{R}$ -moduulstruktuur.
3. M in gp(R) dan : $gQ_{\underline{K}}(\underline{M})$ in $gp(gQ_{\underline{K}}(\underline{R}))$

<u>bewijs</u>

1.) Het is duidelijk dat voor iedere U open in X : $gQ_{\underline{K}}(\underline{M})(U)$ is een gegradeerd R(U)-moduul.Rest ons dus nog te bewijzen dat er geschikte restriktiemorfismen bestaan. Voor alle V U,opens in X,hebben we volgende situatie:

$$\begin{tikzcd}
\underline{M}(U)/\underline{K}(U)(\underline{M}(U)) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \underline{M}(V)/\underline{K}(V)(\underline{M}(V)) \arrow[d, hook] \\
Q_{\underline{K}(U)}(\underline{M}(U)) \arrow[r, "Q_V^U"] & Q_{\underline{K}(V)}(\underline{M}(V))
\end{tikzcd}$$

Als we dus kunnen bewijzen dat $Q_V^U(N_m(M)(U)) \subset N_m(M)(V)$ dan zijn we klaar.Zij x in $N_m(M)(U)$ dan bestaat er een L in $L(\underline{K}(U))$: L gegradeerd en $L_n x \subset (\underline{M}(U)/\underline{K}(U)(\underline{M}(U)))_{m+n}$

Omdat Q_V^U semi-lineair is tov R_V^U krijgen we :

$Q_V^U(L_n x) = R_V^U(L_n)Q_V^U(x) \subset Q_V^U(\underline{M}/\underline{K}(U)\underline{M})_{n+m} \subset \underline{M}(V)/\underline{K}(V)\underline{M}(V)_{n+m}$

Tenslotte volgt uit het lokaal zijn van $\underline{K}$ dat $R_V^U(L)$ in $\mathcal{L}(\underline{K}(V))$ zit en dus $Q_V^U(x)$ in $N_m(M)(V)$.klaar.

2.) Uit 1. volgt dat $gQ_{\underline{K}}(\underline{R})$ in gp(R) zit en verder is het duidelijk dat het $\underline{R}/\underline{K}(\underline{R})$ als gegradeerd deelModuul bevat en zelf een $\underline{R}$-deelModuul is van $Q_{\underline{K}}(\underline{R})$. We moeten nu bewijzen dat $gQ_{\underline{K}}(\underline{R}) = gQ(R)$ een schoof van gegradeerde ringen is.Zij U een open in X en x in $gQ(R)_m$,y in $gQ(R)_n$. Zij verder I,J gegradeerde links-idealen in $\mathcal{L}(\underline{K}(U))$ zodat

$$I_k x \subset (R/\underline{K}(U)R)_{m+k}$$

$$J_1 y \subset (R/\underline{K}(U)R)_{n+1}$$

Indien $(J:x) \cap I = 0$ dan is $\underline{K}(U)$ triviaal en zijn we klaar. Als $L = (J:x) \cap I \neq 0$ dan is er een h en een niet-nul c in L_h. Dan : cxy in $I_{h+m}y \subset R_{h+m+n}$. Bijgevolg is $L_h xy \subset R_{h+m+n}$ en dus xy in $(gQ(R))_{m+n}$.

$gQ_{\underline{K}}(\underline{R})(U)$ is dus een gegradeerde ring waarvan de struktuur vastligt door de gegradeerde R(U)-moduulstruktuur. Uniciteit van de Ring struktuur volgt uit het feit dat $gQ_{\underline{K}}(\underline{R})$ een deelring is van $Q_{\underline{K}}(\underline{R})$.

3.) analoog als in 2.

(7.11) <u>stelling</u>

Voor alle M in gp(R) :

$Q^g_K(M) = gQ_{\underline{K}}(\underline{M})$

<u>bewijs</u>

Voor iedere U open in X geldt :

$$Q_{\underline{K}(U)}(\underline{M}(U)) = \varinjlim \mathrm{Hom}(L, \underline{M}/\underline{K}(U)(\underline{M}(U)))$$

waar de induktieve limiet genomen wordt over alle L in $L(\underline{K}(U))$. x is in $(gQ_{\underline{K}(U)}(\underline{M}(U)))_m$ als en alleen als x gerepresenteerd wordt door een gegradeerd morphisme van graad m : $m_x : L \to \underline{M}(U)/\underline{K}(U)(\underline{M}(U))$ voor een gegradeerd links ideaal L in $\underline{K}(U)$ dus in K(U). We hebben dus :

$$(gQ_{\underline{K}}(\underline{M}))(U)_m = \varinjlim \mathrm{HOM}_R(L, \underline{M}(U)/\underline{K}(U)(\underline{M}(U)))_m$$

waar de induktieve limiet genomen wordt over alle L in L(K(U)). Pas nu stelling (5.4),(7.1),(7.6) en gevolg toe om tot de konklusie te komen dat we klaar zijn.

(7.12) <u>stelling</u>

Zij R een slappe preschoof van positief gegradeerde Noetherse ringen dan geldt voor alle M in gp(R):

$$Q^g_K(M) = Q_{\underline{K}}(\underline{M})$$

---

8. T-FUNKTOREN IN gp(R)-Lker

(8.1) R is een slappe pre-schoof van positief gegradeerde ringen.K zal steeds in gp(R)-Lker zijn zodat K R reduceert.

(8.2) <u>stelling</u>

---

equivalent zijn :

1. Iedere M in gp(Q_K^g(R)) is trouw K-injektief
2. Q_K^g(.) is exact en kommuteert met direkte sommen
3. Iedere M in gp(Q_K^g(R)) is K-torsie vrij

<u>bewijs</u>

1. dan 2. : Beschouw volgende exacte rij in gp(R) :

$$\bar{0} \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow \bar{0} \qquad (*)$$

Omdat Q_K^g(.) links-exact is kunnen we $Q_K^g(M)/Q_K^g(N)$ inbedden in $Q_K^g(M/N)$.Als we erin slagen aan te tonen dat de $\mathrm{Ker}(M/N \rightarrow Q_K^g(M)/Q_K^g(N))$ K-torsie is dan volgt hieruit dat $Q_K^g(M/N) = Q_K^g(M)/Q_K^g(N)$ omdat bij onderstelling : $Q_K^g(M)\ /\ Q_K^g(N)$ K-trouw injektief.

We hebben de exacte rij in gp(R) :

$$\bar{0} \longrightarrow K(N) \longrightarrow K(M) \longrightarrow K(M/N)$$

Verder hebben we :

$$(M/K(M))/(N/K(N)) = M/N + K(M) = (M/N)/(K(M)/K(N))$$

En dus is $\mathrm{Ker}((M/K(M))/(N/K(N)) \longrightarrow (M/N)/K(M/N))$ isomorf met $K(M/N)/(K(M)/K(N))$ en dus K-torsie .Dit impliceert:

$$Q_K^g(M/N) = Q_K^g((M/K(M))/(N/K(N))$$

en dus mogen we in (*) M K-torsievrij veronderstellen .
We krijgen bijgevolg een exacte rij in gp(R):

$$\bar{0} \longrightarrow M \cap Q_K^g(N) \longrightarrow M \longrightarrow Q_K^g(M)/Q_K^g(N)$$

En omdat Q_K^g(.) links exact is,ook :

$$\bar{0} \longrightarrow M \cap Q_K^g(N)/N \longrightarrow M/N \longrightarrow Q_K^g(M)/Q_K^g(N)$$

en dus krijgen we een injektie van $Q_K^g(M/N)$ in $Q_K^g(M)/Q_K^g(N)$ omdat $\bar{0} = Q_K^g(M \cap Q_K^g(N)/N)$.En bijgevolg is $Q_K^g(.)$ rechts exact.Omdat wegens de veronderstelling $\oplus\, Q_K^g(M_i)$ trouw K-injektief is en $+ Q_K^g(M_i)/+ M_i$ K-torsie krijgen we $Q_K^g(\oplus M_i) = \oplus\, Q_K^g(M_i)$.

2. dan 3. : Gegeven een exacte rij in R(U)-gr :

$$0 \longrightarrow M'_U \longrightarrow M_U \longrightarrow M''_U \longrightarrow 0$$

Gebruik na de konstruktie van $C(M_U)$ in (4.8) om een exacte rij te krijgen in gp(R) :

$$\bar{0} \longrightarrow C(M'_U) \longrightarrow C(M_U) \longrightarrow C(M''_U) \longrightarrow \bar{0}$$

Hierop $Q_K^g(.)$ loslatend krijgen we :

$$\bar{0} \longrightarrow Q_K^g(C(M'_U)) \longrightarrow Q_K^g(C(M_U)) \longrightarrow Q_K^g(C(M''_U)) \longrightarrow \bar{0}$$

Sekties nemen over U levert :

$$0 \longrightarrow Q_{K(U)}^g(M'_U) \longrightarrow Q_{K(U)}^g(M_U) \longrightarrow Q_{K(U)}^g(M''_U) \longrightarrow 0$$

Dit bewijst dat $Q_{K(U)}^g(.)$ exact is voor alle U open in X. Omdat C kommuteert met direkte sommen kan men op analoge wijze aantonen dat ook $Q_{K(U)}^g(.)$ met direkte sommen kommuteert.We krijgen dus dat K(U) een T-funktor is in R(U)-gr voor alle U open in X.Neem nu M in $gp(Q_K^g(R))$ dan is M(U) een gegradeerd $Q_{K(U)}^g(R(U))$ -moduul en dus $K(U)(M(U)) = 0$ omdat K(U) een T-funktor is.Bijgevolg : $K(M) = 0$.

3. dan 1. : Als M in $gp(Q_K^g(R))$ K-torsie vrij is dan is $j_K : M \rightarrow Q_K^g(M)$ is een injektief morfisme in $gp(Q_K^g(R))$:

$$\bar{0} \longrightarrow M \longrightarrow Q_K^g(M) \longrightarrow Q_K^g(M)/j_K(M) \longrightarrow \bar{0}$$

Omdat nu ook nog $Q_K^g(M)/j_K(M)$ bij onderstelling K-torsie vrij is volgt $Q_K^g(M) = M$ en M is dus trouw K-injektief.

<u>gevolg</u>

---

equivalent zijn :

1. Iedere M in $p(Q_K(S))$ is trouw K-injektief
2. $Q_K(.)$ is exact en kommuteert met direkte sommen
3. Iedere M in $p(Q_K(S))$ is K-torsie vrij

(8.3) <u>definitie</u>

Een K in gp(R)-Lker die R reduceert en aan de equivalente eigenschappen van (8.2) voldoet noemen we een <u>T-funktor</u> in gp(R)-Lker

(8.4) <u>stelling</u>

K een T-funktor in gp(R)-Lker, dan :

1. Voor alle I in L(K) : $Q_K^g(R)j_K(I) = Q_K^g(R)$, j_K is de kanonieke afbeelding : $R \longrightarrow Q_K^g(R)$
2. De kanonieke inklusie i_K: gp(R,K) $\longrightarrow$ gp(R) heeft een rechts toegevoegde, gp(R,K) is de volle deelkategorie van alle trouwe K-injektieve obj.in gp(R)

<u>bewijs</u>

1. Omdat $Q_K^g(R)j_K(I)$ in gp($Q_K^g(R)$) is, is het ook in gp(R,K) wegens voorgaande stelling. Daarom is : $Q_K^g(R)j_K(I) = Q_K^g(j_K(I)) = Q_K^g(I)$ en omdat I in L(K) zit volgt natuurlijk nu $Q_K^g(I) = Q_K^g(R)$.klaar.

2. Kategorie-Kletskoek

(8.5) <u>stelling</u>

---

equivalent zijn :

1. K een T-funktor in gp(R)-Lker
2. K(U) een T-funktor in R(U)-gr voor alle U open in X

<u>bewijs</u>

Dat 1. ,2. impliceert hebben we reeds bewezen in (8.2). De omgekeerde implikatie volgt uit het feit dat de voorwaarden van (8.2.2) lokaal voldaan zijn.

(8.6) Voorgaande stelling heeft enkele prettige gevolgen:

1.) K T-funktor, dan $Q_K^g(M) = Q_K^g(R) \otimes_R M$

2.) K T-funktor in gp(R)-Lker als en slecht dan als $\underline{K}$ een T-funktor is in p($\underline{R}$)-Lker.

9. GEGRADEERDE IDEMPOTENTE FILTERS

(9.1) Herinner dat s in R ,R een preschoof van gegradeerde ringen, noteert dan s een Punt van R is, i.e. er bestaat een globale sektie x in R(X) : $s(U) = R_U^X(x)$ voor alle U open in X.

(9.2) <u>definitie</u>

Een verzameling L bestaande uit gegradeerde links pre-Idealen noemen we een <u>gegradeerde idempotente filter</u> als :

1. Als I in L is en s in h(R) dan (I:s) in L
2. Als I een gegradeerd links pre-Ideaal is zodat er een J in L bestaat waarvoor (I:s) in L voor alle s in h(J) dan ook I in L.

(9.3) <u>stelling</u>

L een gegradeerde idempotente filter dan :
1. I,J in L dan ook $I \cap J$ in L
2. I in L en $I \subset J$ met J een gegradeerd links pre-Ideaal dan ook J in L

1. Zij s in h(J) dan geldt :

$$\begin{aligned}((I \cap J):s)(U) &= \{x \text{ in } R(U) : xs(U) \text{ in } (I \cap J)(U)\} \\ &= \{x \text{ in } R(U) : xs(U) \text{ in } I(U) \cap J(U)\} \\ &= (I:s)(U) \cap (J:s)(U) = (I:s)(U)\end{aligned}$$

Bijgevolg is $((I \cap J):s) = (I:s)$ in L voor alle s in h(J) met J in L en dus ook $I \cap J$ in L.
2. Zij s in h(I) dan geldt voor elke U open in X en voor elke x in R(U) : xs(U) in I(U) en dus in J(U) . Bijgevolg : (J:s) = R. Als we s = 0 nemen dan hebben we dat R in L zit , maar dan wegens het voorgaande ook J.

(9.4) Zij K een starre gegradeerde kernfunktor in gp(R), Definiëer dan $L(K) = \{$ I gegradeerd links pre-Ideaal van $R : K(R/I) = R/I \}$

(9.5) <u>stelling</u>

M in gp(R), m in h(M), equivalent zijn :

1. m in K(M)
2. Er is een I in L(K) : $Im = \bar{0}$

<u>bewijs</u>

1. dan 2. : Zij $I = Ann(m) = (\bar{0}:m)$, dan geldt : $(R/I)(U) = R(U)/I(U) = Rm(U)$. Omdat Rm K(M) geldt $K(R/I)=R/I$ en omdat m in h(M) is, is I gegradeerd. klaar!

2. dan 1. : Als $Im = 0$ dan is $I \subset (\bar{0}:m)$ en dus is Rm isomorf met een homomorf beeld van R/I . Bijgevolg is Rm K-torsie en dus $Rm \subset K(M)$. klaar.

(9.6) Devolgende eigenschappen van L(K) zijn eenvoudige verifikaties :

1. Voor iedere s in h(R) en iedere I in L(K): (I:s) in L(K)
2. I in L(K) en J gegradeerd links pre-Ideaal : $I \subset J$, dan ook J in L(K)
3. I en J in L(K) dan ook $I \cap J$
4. Als I in L(K) is en $J \subset I$ zodat $K(I/J)=I/J$ dan J in L(K)

(9.7) L(K) hoeft echter in het algemeen niet te voldoen aan de tweede voorwaarden voor gegradeerde idempotente filters , tenzij we slapheidsvoorwaarden op R opleggen . Zie daarvoor volgende paragraaf.

10. PUNTSGEWIJZE GEGRADEERDE LOKALIZATIE VAN PRESCHOVEN

(10.1) R zal steeds een slappe preschoof van gegradeerde ringen zijn, alle filters veronderstellen we gegradeerd idempotent. De eerste stellingen tonen aan dat L(K) een gegradeerde idempotente filter is voor alle K in pg(R)-Lker

(10.2) stelling

L een filter die aan 9.2.1 voldoet, equivalent:
1. L is gegradeerd idempotent
2. L heeft een basis van slappe gegradeerde links pre-Idealen.

bewijs
1. dan 2. : Neem I in L en s in h(I) dan is natuurlijk s in PI en (PI:s) = R en dus in L, bijgevolg ook PI in L. klaar.
2. dan 1. : Zij I een gegradeerd links pre-Ideaal van R zodat (I:s) in L is voor alle s in h(J), J in L.
Dan is I + PJ / I gegradeerd en slap en ieder homogeen Punt van I + PJ / I kan geannihileerd worden door een element van L. We krijgen bijgevolg volgende exacte rij in gp(R) :

$$\bar{0} \longrightarrow I + PJ / I \longrightarrow R/I \longrightarrow R / I + PJ \longrightarrow \bar{0}$$

met zowel I + PJ / I als R / I + PJ slap en dus ook R/I slap.
Zij $\bar{e}$ het beeld van 1 in R in R/I , dan bestaat er een I_1 in L zodat $I_1\bar{e} \subset I + PJ / I$ (omdat ook ieder homogeen element van R/I+PJ geannihileerd kan worden door een element van L). Aldus :
(Ann $\bar{e}$: s) is in L voor alle s in $h(I_1)$ en dus Ann $\bar{e}$ in L. Tenslotte geldt : (Ann $\bar{e}$).1 $\subset$ I en dus I in L.

(10.3) stelling

K in gp(R)-Lker dan is L(K) een gegradeerde idempotente filter

bewijs

Zij I in L(K) dan is per definitie R/I K-torsie. Verder is R/I slap en alle restriktiemorfismen $(R/I)^X_U$, U open in X, zijn dus surjektief. Daarom krijgen we graadbehoudende surjektieve morfismen f en g :

$$(R/I)(X) \xrightarrow{f} R(U)/R^X_U(I(X)) \xrightarrow{g} (R/I)(U)$$

Omdat K lokaal is hebben we verder $(\bar{R}^X_U(K(X)) \leqslant K(U)$, voor alle U open in X. Verder hebben we :
$K(X)(R(X)/I(X)) = R(X)/I(X)$ omdat R/I K-torsie is . Surjektiviteit van f impliceert dan dat $R(U)/R^X_U(I(X))$ K(X)-torsie is en dus ook K(U)-torsie als gegradeerd R(U)-moduul.
Verder is de preschoof R/PI ten duidelijkste bepaald door $(R/PI)(U) = R(U)/R^X_U(I(X))$ en dus R/PI K-torsie of PI in L. Voorgaande stelling maakt het bewijs dan verder af.

gevolg

K in p(S)-Lker, dan is L(K) een idempotente filter

(10.4) K in gp(R)-Lker en M in gp(R). We noemen M PK-vrij als $PK(M) = \bar{0}$. We noemen M PK-torsie als PK(M) = M , i.e. M is slap en K-torsie. Merk op dat PK(-) wel een funktor is maar i.h.a. niet links exact. Dus PK is iha. niet in gp(R)-Ker. Nochtans kunnen we PK-injektief en PK-trouw injektief op analoge wijze als in § 6 definiëren. Merk tenslotte op dat voor alle M in gp(R) : $PK(M/PK(M)) = \bar{0}$.

(10.5) stelling

E in gp(R), equivalent zijn
1. E is PK-injektief en PK-vrij
2. E is trouw PK-injektief

---

bewijs

Beschouw volgende exacte situatie in gp(R) :

$$\begin{tikzcd}
\overline{0} \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[r, "p"] \arrow[dl, "g"] & M/N \arrow[r] & \overline{0} \\
 & E & & &
\end{tikzcd}$$

met M/N PK-torsie.

1. dan 2. : stel $g \neq g'$ in gp(R) die beiden f uitbreiden tot M. Dan bestaat er een U open in X en een x in $h(M(U))$: $g(U)(x) \neq g'(U)(x)$.

Zij y het beeld van x in $(M/N)(U)$ onder $p(U)$. Omdat M/N slap is (want PK-torsie) bestaat er een Punt q in $h(M/N)$ met : $q(U) = y$ .Verder is p surjektief en kunnen we dus een Punt m in $h(M)$ nemen zodat : $p(X)m(X) = q(X)$.

Omdat p kompatiebel is met de restriktiemorfismen hebben we : $m(U) = x + z$ met z in $N(U)$.Dus :

$$g(U)m(U) = g(U)(x) + g(U)(z) = g(U)(x) + f(U)(z)$$
$$g'(U)m(U) = g'(U)(x) + g'(U)(z) = g'(U)(x) + f(U)(z)$$

en dus vallen de Punten gm en g'm niet samen in E. Verder is er een I in L(K) : $Iq = \overline{0}$ en dus $Im \subset N$.

Bijgevolg is gm - g'm een niet-nul Punt van h(E) waarvoor geldt : $I(gm - g'm) = \overline{0}$ en dus is gm-g'm in K(E)=0 kontradiktie!!

2. dan 1. : analoog aan het bewijs van stelling 6.4.

gevolg

E in p(S),equivalent zijn :

1. E is PK-injektief en PK-vrij
2. E is trouw PK-injektief

(10.6) stelling

Zij $\overline{0} \to E' \to E \to E'' \to \overline{0}$ een exacte rij in gp(R).
Veronderstel dat E PK-injektief is en E" PK-vrij , dan is E' PK-injektief .

---

bewijs

Beschouw hetvolgende diagram in gp(R) met exacte rijën:

$$\begin{tikzcd} \bar{0} \arrow[r] & N \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f'"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & M/N \arrow[r] \arrow[d, "f''"'] & \bar{0} \\ \bar{0} \arrow[r] & E' \arrow[r, "i"] & E \arrow[r] & E'' \arrow[r] & \bar{0} \end{tikzcd}$$

en M/N PK-torsie.Voor een gegeven f bestaat er wegens PK-injektiviteit van E een f zodat : $fj = if'$ en neem f'' de geïnduceerde kwotiënt-afbeelding.Omdat $f''(M/N)$ PK-torsie is in E" en E" PK-vrij is geldt $f''(M/N) = 0$ en bijgevolg : $f(M) \subset E'$ en f kan dus gefactoriseert worden via E'.klaar.

gevolg

$\bar{0} \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow \bar{0}$ een exacte rij in p(S). E PK-injektief,E" PK-vrij dan : E' PK-injektief.

(10.7) stelling

Zij $\bar{0} \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow \bar{0}$ een exacte rij in gp(R) met E' PK-injektief,E PK-vrij en E" PK-torsie dan geldt : $E = E'$.

bewijs

Omdat E' zowel PK-injektief als PK-vrij is,is E' trouw PK-injektief.Bijgevolg breidt de identiteit $1_{E'}$ zich op unieke wijze uit tot een morfisme f in gp(R) dat hetvolgende diagram kommutatief maakt :

$$\begin{tikzcd} \bar{0} \arrow[r] & E' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "1_{E'}"'] & E \arrow[r] \arrow[dl, "f"] & E'' \arrow[r] & \bar{0} \\ & E' & & & \end{tikzcd}$$

Neem nu e in h(E) . Stel dat $E'' \neq \bar{0}$ dan mogen we $e \neq \bar{0}$ veronderstellen vermits E" slap is (want PK-torsie) en E   E" surjektief is en niet-nul.Dan bestaat er een I in L(K) zodat : $Ie \subset iE'$ en $Ie \neq \bar{0}$ (want E PK-vrij).Het is duidelijk dat het Punt if(e)-e in h(E) geannihileerd wordt door I maar omdat $PK(E) = 0$ geldt $if(e) = e$. Het voorgaande toont aan dat PE   iE' en omdat $E'' = PE''$ het beeld is van PE volgt $E'' = \bar{0}$ .klaar!

gevolg

$\bar{0} \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E'' \rightarrow \bar{0}$ exact in $p(S)$ met E' PK-inj., E PK-vrij en E'' PK-torsie dan $E = E'$.

(10.8) stelling

Zij $N' \subset N \subset M$ in gp(R) zodat M/N en M/N' PK-torsie zijn.Zij verder gegeven : E in gp(R) PK-vrij en een morfisme $f : N \rightarrow E$ zodat de restriktie $f\ N'$ zich laat uitbreiden tot een $f^* : M \rightarrow E$,dan breidt f ook uit tot f^*.

bewijs

Stel dat f zich niet laat uitbreiden tot f^*, dan bestaat er een U,open in X,en een x in $N(U)$: $f(U)(x) \neq f^*(U)(x)$. Noem dan het beeld van x in $(M/N')(U)$ onder p : y .

$$\begin{tikzcd} \bar{0} \arrow[r] & N' \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[r, "p"] \arrow[dl, "f^*"] & M/N' \arrow[r] & \bar{0} \\ & E & & & \end{tikzcd}$$

Omdat M/N' PK-torsie is is M/N' ook slap en er is dus een punt a in M/N' zodat $a(U) = y$.
Verder is $p(X)$ surjektief en er bestaat dus een b in M : $p(X)(b(X)) = a(X)$.Omdat p kompatiebel is met restriktiemorfismen komt er : $b(U) = x + n'$ met n' in $N'(U)$.Nu :

$$f(b(U)) = f(x) + f(n')$$
$$f^*(b(U)) = f^*(x) + f^*(n') = f^*(x) + f(n')$$

$fb - f^*b$ is dus een niet-nul Punt in E. Er is een I in $L(K)$ zodat $Ia = \bar{0}$ (M/N' PK-torsie) en dus $Ib \subset N'$.
Daarom geldt : $I(fb-f^*b) = \bar{0}$ en dus $fb-f^*b$ in $PK(E)=\bar{0}$.
klaar.

(10.9) stelling

Zij M in gp(R) K-torsie vrij, dan kan M ingebed worden in een $E^g_{PK}(M)$ in gp(R),trouw PK-injektief en K-torsie vrij,zodat $E^g_{PK}(M)/M$ PK-torsie is.E^g_{PK} is op isomorfisme na uniek bepaald

bewijs

Als iedere Grothendieck-kategorie heeft gp(R) genoeg injektief omhullenden. Noteer E^g voor $E^g(M)$, de injektief omhullende van M in gp(R). Beschouw de exacte rij:

$$\bar{0} \longrightarrow M \longrightarrow E^g \xrightarrow{p} E^g/M \longrightarrow \bar{0}$$

Definiëer nu :

$$E^g_{PK}(M) = p^{-1}(PK(E^g/M))$$

Omdat M K-torsie vrij is, geldt hetzelfde voor E^g en dus ook voor $E^g_{PK}(M)$. Verder is $PK(E^g/M)$ isomorf met $E^g_{PK}(M)/M$ en dus is $E^g_{PK}(M)/M$ PK-torsie. We hebben dus de exacte rij :

$$\bar{0} \longrightarrow E^g_{PK}(M) \longrightarrow E^g \longrightarrow E^g/E^g_{PK}(M) \longrightarrow \bar{0}$$

Uit stelling (10.6) volgt nu dat $E^g_{PK}(M)$ PK-injektief is. De uniciteit volgt onmiddellijk .

gevolg

M in p(S) K-torsie vrij, dan kan M ingebed worden in een $E_{PK}(M)$ in p(S) zodat $E_{PK}(M)$ K-torsie vrij en trouw PK-injektief is en $E_{PK}(M)/M$ PK-torsie.

(10.10) definitie

M in gp(R), dan is $Q^g_{PK}(M) = E^g_{PK}(M/K(M))$ het gegradeerde puntsgewijze kwotienten-Moduul van M tov. K .

(10.11) stelling

Zij K in gp(R)-Lker en M slap in gp(R) dan : $Q^g_{PK}(M) = PQ^g_K(M)$

---

bewijs

We hebben volgend exact rijtje in gp(R) :

$$\bar{0} \longrightarrow M/K(M) \longrightarrow Q^g_K(M) \longrightarrow K(E^?(M/K(M))/(M/K(M))) \longrightarrow \bar{0}$$

Omdat $M/K(M)$ slap is levert dit :

$$\bar{0} \longrightarrow M/K(M) \longrightarrow PQ_K^g(M) \longrightarrow PK(E/(M/K(M)) \longrightarrow \bar{0}$$

Met $E = E^g(M/K(M))$.Anderzijds hebben we een exacte rij in gp(PR) :

$$\bar{0} \longrightarrow M/K(M) \longrightarrow Q_{PK}^g(M) \longrightarrow PK(E/M/K(M)) \longrightarrow \bar{0}$$

Omdat de uitersten isomorf zijn geldt wegens het slangenlemma : $PQ_K^g(M) = Q_{PK}^g(M)$ .klaar.

<u>gevolg</u>

K in p(S)-Lker en M in p(S) en slap dan : $Q_{PK}(M) = PQ_K(M)$

(10.12) <u>stelling</u>

$Q_{PK}^g(.)$ is een links semi-exacte endofunktor in gp(R)

<u>bewijs</u>

Zij N   M in gp(R).Noteer $N/K(N)$ resp. $M/K(M)$ met $\bar{N}$,resp. $\bar{M}$ en zij $E^g(\bar{N})$ resp. $E^g(\bar{M})$ de injektief omhullenden van $\bar{N}$ resp. $\bar{M}$ in gp(R).Omdat $\bar{0} \longrightarrow N \longrightarrow M$ exact is,geldt hetzelfde voor $\bar{0} \longrightarrow \bar{N} \longrightarrow \bar{M}$ en $\bar{0} \longrightarrow E^g(\bar{N}) \longrightarrow E^g(\bar{M})$.Omdat $Q_K^g(.)$ links-exact is hebben we de exacte situatie :

$$\begin{tikzcd}
\bar{0} \arrow[r] & \bar{M} \arrow[r] & Q_K^g(M) \arrow[r, "p^M"] & K(E^g(\bar{M})/\bar{M}) \arrow[r] & \bar{0} \\
\bar{0} \arrow[r] & \bar{N} \arrow[r] \arrow[u] & Q_K^g(N) \arrow[r, "p^N"] \arrow[u, "i"'] & K(E^g(\bar{N})/\bar{N}) \arrow[r] \arrow[u, "p"'] & \bar{0} \\
& \bar{0} \arrow[u] & \bar{0} \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

Bij definitie wordt $Q_{PK}^g(N)$ onder p^N op $PK(E^g(\bar{N})/\bar{N})$ gemapt en dus onder $p_\circ p^N$ in $PK(E^g(\bar{M})/\bar{M})$. Dus : $iQ_{PK}^g(N) \quad Q_{PK}^g(M)$.

<u>gevolg</u>

$Q_{PK}(.)$ is een links semi-exacte endofunktor in p(S)

---

11. PUNTSGEWIJSE GEGRADEERDE KWOTIENTEN-RING

(11.1) We zullen de puntsgewijse gegradeerde kwotiënten-ring in twee gevallen onderzoeken :

geval 1 : R een slappe gegradeerde Ring,K in gp(R)-Lker, maar we veronderstellen niet dat K , R reduceert

geval 2 : R een slappe gegradeerde Ring,K in gp(R)-Sker, en K is samentrekbaar ,dwz. L(K) is een gegradeerde idempotente filter en K heeft volgende eigenschap : voor alle M in gp(R) : $K(M|U) = K(M)|U$.

Voor een M in gp(R) en U open in X noteren we met $M|U$ het element van gp(R) met boven elke V open in X : $(M|U)(V) = M(U \cap V)$.

(11.2) stelling

R een gegradeerde Ring,K in gp(R)-Lker,equivalent:
1. K is samentrekbaar
2. $\bar{R}_V^W(K(W)) = K(V)$ voor alle $V \subset W$ open in X

---

bewijs

1. impliceert 2. : Zij M in gp(R),U en W open in X :

$(K(M)|U)(W) = (K(M))(U \cap W) = K(U \cap W)M(U \cap W)$

en anderzijds hebben we ook :

$K(M|U)(W) = K(W)((M|U)(W)) = K(W)M(U \cap W) = \bar{R}^W_{U \cap W}K(W)(M(U\cap W))$

en omdat K samentrekbaar is mogen we beide gelijkheden aan elkaar knopen en krijgen we :

$$K(V)(M(V)) = \bar{R}_V^W K(W)(M(V))$$

waarin we natuurlijk V hebben geschreven voor U W .
En nu kunnen we weer de truuk van stelling (4.8) toepassen om te besluiten : $K(V) = \bar{R}_V^W K(W)$ in R(V)-gr.

2. impliceert 1. : Omdat K in gp(R)-Lker is,is L(K) een idempotente filter (10.3).Zij nu $V \subset W$ opens in X :

$$(K(M)|W)(V) = K(M)(V) = K(V)(M(V)) = \bar{R}^{W}_{V}K(W)(M(V)) =$$
$$K(W)(M|V) = K(M|W)(V).$$

<u>gevolg</u>

Als R een constante gegradeerde Ring is dan zijn alle samentrekbare K in gp(R)-Lker ook constant !

(11.3) <u>stelling</u> (geval 1)

R slappe gegradeerde Ring, K in gp(R)-Lker dan is $Q^g_{PK}(R)$ een slappe preschoof van gegradeerde ringen waarvan de ringstruktuur vastligt door de moduul struktuur .

<u>bewijs</u>

Omdat R slap is, is Q^g_{PK} dat ook. Neem een q in $Q^g_{PK}(R)$, dan bestaat er een gp(R)-morfisme $f_q : R \longrightarrow Q^g_{PK}(R)$ zodat : $f_q(X)(1) = q$ in $Q^g_{PK}(R)(X)$, dwz. het punt $\bar{1}$ wordt op $\bar{q}$ gemapt. Verder bestaat er een uniek gp(R)-morfisme $\bar{f}_q$ dat hetvolgende diagram kommutatief maakt :

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[rr, "f_q"] \arrow[d, "j_K"'] & & Q^g_{PK}(R) \\
Q^g_{PK}(R) \arrow[urr, "\bar{f}_q"'] & &
\end{tikzcd}$$

met j_K het morfisme geïnduceerd door $R \longrightarrow R/K(R)$ en bijgevolg is dus $Q^g_{PK}(R)/j_K(R)$ PK-torsie.

Zij nu $\bar{p}$ in $(Q^g_{PK}(R))$, definiëer dan $\bar{p}.\bar{q} = \bar{f}_q(\bar{p})$ door : $(\bar{p}.\bar{q})(U) = \bar{f}_q(U)(\bar{p}(U))$. Zij verder I in L(K) zodanig dat : $I.\bar{p} \subset R$, dan :

$$\bar{f}_q(I.\bar{p}) = f_q(I.\bar{p}) = (I.\bar{p}).\bar{q}$$

maar anderzijds hebben we ook :

$$\bar{f}_q(I.\bar{p}) = I.\bar{f}_q(\bar{p}) = I(\bar{p}.\bar{q})$$

En dus zien we dat de zojuist gedefiniëerde vermenigvuldiging van Punten in $Q^g_{PK}(R)$ kompatiebel is met de Moduulstruktuur.

Zij nu $\bar{r}, \bar{I}$ en $\bar{m}$ in $h(Q^g_{PK}(R))$.Bij definitie is $\bar{r}.(\bar{I}.\bar{m}) = \bar{f}_n(\bar{r})$, met $\bar{n} = \bar{I}.\bar{m}$. Kies I in L(K) zodanig dat : $I.\bar{r}$ in R/K(R) zit en $(I.\bar{r}).\bar{I}$ in R/K(R).Dit kan want $(I.\bar{r}).\bar{I} = I(\bar{r}.\bar{I})$ en verder mogen we veronderstellen dat I slap is omdat L(K) een idempotente filter is.We hebben :

$$I(\bar{r}.(\bar{I}.\bar{m})) = \bar{f}_n(I.\bar{r}) = (I.\bar{r})(\bar{I}.\bar{m}) = (I.\bar{r})\bar{f}_m(\bar{I})$$

$$= \bar{f}_m((I.\bar{r}).\bar{I}) = ((I.\bar{r}).\bar{I}).\bar{m} = (I(\bar{r}.\bar{I})).\bar{m} = I((\bar{r}.\bar{I}).\bar{m})$$

Omdat $Q^g_{PK}(R)$ K-torsievrij is, $(\bar{r}.\bar{I}).\bar{m} = \bar{r}.(\bar{I}.\bar{m})$.Distributiviteit kan men gemakkelijker nagaan.

Zij nu x,y in $h(Q^g_{PK}(R)(U))$ met U open in X.Neem $\bar{n},\bar{m}$ in $Q^g_{PK}(R)$ zodat $\bar{n}(U) = x$ en $\bar{m}(U) = y$ en definiëer : $x.y = (\bar{n}.\bar{m})(U)$. Als dit goed gedefiniëerd is dan hebben we een ringstruktuur op $Q^g_{PK}(R)(U)$ gezet zodanig dat de restriktiemorfismen, ringhomos zijn.De verkregen Ring struktuur is natuurlijk uniek bepaald door de gp(R)-struktuur van $Q^g_{PK}(R)$.
Rest ons dus nog te bewijzen dat de definitie van x.y onafhankelijk is van de gekozen Punten $\bar{n},\bar{m}$. Het is niet al te moeilijk om in te zien dat het voldoende is te bewijzen dat als $f : R \longrightarrow Q^g_{PK}(R)$ een gp(R)-morfisme is met f(U) de nulafbeelding voor een U open in X en $\bar{f} : Q^g_{PK}(R) \longrightarrow Q^g_{PK}(R)$ de extentie van f, dan is $\bar{f}(U)$ eveneens de nulafbeelding.

Zij dus $\bar{m}$ in $Q^g_{PK}(R)$ dan is er een I in L(K) : $I.\bar{m} \subset R$:

$$\bar{f}(U)(I(U)\bar{m}(U)) = f(U)(I(U)\bar{m}(U)) = 0$$

$\bar{f}(U)(\bar{m}(U))$ wordt geannihileerd door I(U) in L(K(U)).Omdat $Q^g_{PK}(R)$ slap is :

$$\{\bar{m}(U) \ , \ \bar{m} \text{ in } Q^g_{PK}(R)\} = Q^g_{PK}(R)(U)$$

bijgevolg is $\bar{f}(U)(Q^g_{PK}(R)(U))$ K(U)-torsie,en omdat $Q^g_{PK}(R)$, K-torsievrij is volgt hieruit $\bar{f}(U) = 0$.

(11.4) <u>stelling</u>

M in gp(R) , K in gp(R)-Lker :
$PQ^g_K(M)$ is op natuurlijke wijze een $Q^g_{PK}(R)$-Moduul

bewijs

$Q^g_{PK}(PM)$ is slap en wegens links-exactheid van Q^g_K krijgen we de inklusie : $Q^g_{PK}(PM) \to PQ^g_K(M)$. Verder, stel m een Punt in $Q^g_K(M)$ en homogeen dan bestaat er een slappe I in L(K) met $I.m \subset M/K(M)$ en dus :

$$I.m \subset P(M/K(M)) = PM + K(M)/K(M) = \overline{PM}$$

rechts-vermenigvuldigen met m definiëert een gp(R)-morf. :

$$f : I \longrightarrow \overline{PM} \longrightarrow Q^g_{PK}(PM)$$

en dit morfisme kan men uitbreiden tot een gp(R)-morfisme $\bar{f} : R \longrightarrow Q^g_{PK}(PM)$ (wegens devolgende stelling) .Het Punt $\bar{f}(1) - m$ van $Q^g_K(M)$ wordt geannihileerd door I in L(K) en bijgevolg krijgen we : $\bar{f}(1) = m$ en dus m in $Q^g_{PK}(PM)$.

Bijgevolg hebben we $Q^g_{PK}(PM) = PQ^g_K(M)$ en we hebben het probleem al gereduceerd tot het geval dat M slap is,vervolgens gaan we op dezelfde manier te werk als in voorgaande stelling om te bewijzen dat $Q^g_{PK}(M)$,voor slappe M, een gegradeerd $Q^g_{PK}(R)$-Moduul is met skalaire vermenigvuldiging geinduceerd door een skalaire vermenigvuldiging van Punten van $Q^g_{PK}(M)$ met Punten van $Q^g_{PK}(R)$.

(11.5) stelling

$f : I \longrightarrow Q^g_{PK}(PM)$ kan men uitbreiden tot
$\bar{f} : R \longrightarrow Q^g_{PK}(PM)$ voor I in L(K)

bewijs

I slap in L(K) dan is R/I PK-torsie en dan volgt de stelling onmiddellijk uit het PK-injektief zijn van $Q^g_{PK}(PM)$.

(11.6) stelling (geval 2)

R slap, K in gp(R)-Sker samentrekbaar dan is $Q^g_{PK}(R)$ een gegradeerde Ring waarvan de Ring struktuur vastligt door de gegradeerde Moduul-struktuur.

bewijs

Wie zin heeft mag het bewijs van stelling (11.3) hier kopiëren tot het moment waarop we moeten bewijzen dat $\bar{f}(U) = 0$ als $f(U) = 0$. We bewijzen eerst dat als M in gp(R), I in L(K) slap dan hebben we voor alle homogene Punten m van h(M) :

$$I(m|U) = (I|U) = (I|U)(m|U) \text{ voor alle } U \text{ open}$$

Immers neem een V open in X dan is $(I(m|U))(V) = I(V)m(U \cap V)$ en door de gp(R)-struktuur van I geldt :

$$I(V)m(U \cap V) = R^V_{U \cap V}(I(V))m(U \cap V)$$

en wegens de slapheid van I hebben we verder :

$$\begin{aligned}(I(m|U))(V) &= I(U \cap V)m(U \cap V)\\ &= ((I|U)(m|U))(V)\end{aligned}$$

En nu zetten we het bewijs voort (notaties zijn die van stelling (11.3)):

Als m in $h(Q^g_{PK}(R))$ is, dan bestaat er een slappe I in L(K) waarvoor $I.m \subset R/K(R)$. Omdat in dit geval : $\bar{f}(I.m) = f(I.m)$ hebben we : $\bar{f}(I.m)\ U = \bar{0}$, en verder:

$$(I.\bar{f}(m))|U = (I|U)(\bar{f}(m)|U) = I(\bar{f}(m)|U)$$

Bijgevolg : $(I.\bar{f}(m))|U = \bar{0}$ of : $\bar{f}(m)|U$ in $Q^g_{PK}(R)$ U. Samentrekbaarheid van K impliceert dan :

$$K(Q^g_{PK}(R)|U) = K(Q^g_{PK}(R))|U = \bar{0}$$

zodat : $\bar{f}(m)|U = \bar{0}$ voor alle m in $Q^g_{PK}(R)$ homogeen en $\bar{f}(Q^g_{PK}(R))$ is slap, dus $\bar{f}(U) = 0$. Klaar !

(11.7) Zoals in stelling (11.4) kunnen we nu hetvolgende afleiden :

stelling

Zij K in gp(R)-Sker samentrekbaar dan is voor iedere M in gp(R) : $PQ^g_K(M)$ is een $Q^g_{PK}(R)$ gegradeerd Moduul.

---

12. PUNTSGEWIJSE GEGRADEERDE T-FUNKTOREN

(12.1) Zij I een links (pre)-Ideaal van R en gegradeerd. Wegens links-exactheid van $Q^g_{PK}(-)$ hebben we steeds : $Q^g_{PK}(PI) \subset Q^g_{PK}(I)$. Verder volgt uit stellingen (11.3) en (11.6) (afhangend van het beschouwde geval) dat $PQ^g_K(I)$ een gegradeerd links Ideaal is van $Q^g_{PK}(R)$. We hebben steeds:

$$Q^g_{PK}(R)j_K(PI) \subset PQ^g_K(I)$$

(12.2) <u>definitie</u>

Een kernfunktor K in gp(R)-Sker is een gT(P)-funktor of een gegradeerde puntsgewijse T-funktor indien voor alle I in L(K) :

$$Q^g_{PK}(R)j_K(PI) = PQ^g_K(I)$$

(12.3) <u>triviaaltje</u>

K is een gT(P)-funktor als voor alle I in L(K) : $Q^g_{PK}(R)j_K(I) = Q^g_{PK}(R)$

<u>bewijs</u>

Voor alle I in L(K) geldt : $Q^g_K(I) = Q^g_K(R)$ en dus ook $PQ^g_K(I) = PQ^g_K(R) = Q^g_{PK}(R)$. Klaar!

(12.4) <u>stelling</u> (geval 1)

R een slappe gegradeerde Ring , K in gp(R)-Lker, equivalent zijn :

1. K is een gT(P)-funktor
2. Voor elk links pre-ideaal van $Q^g_{PK}(R)$, J, geldt:
   $J = Q^g_{PK}(j_K^{-1}(J)) = Q^g_{PK}(R)J^c$ met $J^c = J \cap j_K(R)$
   natuurlijk moet J een gegradeerd links Id zijn

<u>bewijs</u>

Beschouw hetvolgende commutatieve diagram met exacte rijën en exacte kolommen :

$$
\begin{tikzcd}
 & \overline{0} \arrow[d] & \overline{0} \arrow[d] \\
\overline{0} \arrow[r] & J^c \arrow[r] \arrow[d] & J \arrow[d] \\
\overline{0} \arrow[r] & Q^g_{PK}(J^c) \arrow[r] & Q^g_{PK}(R)
\end{tikzcd}
$$

J/J^c is als deelobjekt van $Q^g_{PK}(R)/j_K(R)$ K-torsie en $Q^g_{PK}(J^c)/J^c$ is PK-torsie bij construktie.

J/J^c is een deelpreschoof van $Q^g_{PK}(R)/j_K(R)$ en de gp(R)-struktuur van beiden wordt vastgelegd door het morfisme j_K . Als a in $h((J/J^c)(U))$ zit dan bestaat er een homogeen Punt m in $h(Q^g_{PK}(R)/j_K(R))$ zodat : $m(U) = a$. Verder bestaat er een I in L(K) zodat $I.m = \overline{0}$. Noteer J^{ce} voor $Q^g_{PK}(R)J^c$.

Als b in $h(J(U))$ op a gemapt wordt modulo $J^c(U)$, zij dan n een homogeen punt van $Q^g_{PK}(R)$ zodat $n(U) = b$ en dan is $n = m \pmod{j_K(R)}$. We hebben ook : $I.n \subset j_K(R)$ en $I(U).b \subset J^c(U)$. Vervolgens krijgen we :

$$b \text{ in } (Q^g_{PK}(R)j_K(I))(U)b = (Q^g_{PK}(R))(U)b$$

en deze laatste is bevat in $(Q^g_{PK}(R)J^c\ U)$, maw : $J = Q^g_{PK}(R)J^c = J^{ce}$. Anderzijds is $Q^g_{PK}(J^c)/J^c$ PK-torsie en hetzelfde geldt voor $Q^g_{PK}(J^c)/J^{ce}$.

Als m in $Q^g_{PK}(J^c)$ als homogeen element zit dan bestaat er een I in L(K) waarvoor : $I.m \subset J^{ce}$ en omdat J^{ce} een $Q^g_{PK}(R)$-moduul is : $Q^g_{PK}(R)I.m \subset J^{ce}$.

Omdat de gp(R)-struktuur kompatiebel is met de gegradeerde Ring struktuur komt er :

$$Q^g_{PK}(R)I.m = Q^g_{PK}(R)j_K(I)m$$

en tenslotte, omdat K een gT-funktor is : m in J^{ce} en dus : $Q^g_{PK}(J^c) = J^{ce}$.

(12.5) <u>stelling</u> (geval 2)

R slappe gegradeerde Ring, K samentrekbaar, equivalent zijn :

1. K een gT(P)-funktor
2. Voor alle gegradeerde links pre-Idealen J van $Q^g_{PK}(R)$: $J = Q^g_{PK}(R)J^c$

---

bewijs

Stel T gelijk aan J^c of aan $Q^g_{PK}(J^c)$,dan is T/J^c K-torsie.En beschouw nu het diagram van vorige stelling beperkt tot een U open in X. Het is duidelijk dat T/J^{ce} K-torsie is en dus ook $(T|U)/(J^{ce}|U)$.Neem nu a in h(T(U)) als $\bar{a}$ een homogeen Punt is van $T|U$,dan bestaat er een slappe I in L(K) met $I.\bar{a} \subset J^{ce}|U$. Omdat $J^{ce}|U$ een gegradeerd $Q^g_{PK}(R)$-Moduul is hebben we : $Q^g_{PK}(R)j_K(I)\bar{a} \subset J^{ce}|U$ en bijgevolg is $\bar{a}$ in J^{ce} U dus a in J^{ce} voor alle a in h(T(U)).Dus : $T = J^{ce}$.

Omgekeerd nu, als I in L(K) zit dan :

$$Q^g_{PK}(PI) = PQ^g_K(I) = PQ^g_K(R) = Q^g_{PK}(R)$$

en $Q^g_{PK}(I) = Q^g_{PK}(R)$. Als nu $J = Q^g_{PK}(R)j_K(I)$ dan is $J = Q^g_{PK}(j_K^{-1}(J))$ maar $I \subset j_K^{-1}(J)$ en dus is $j_K^{-1}(J)$ in L(K) , zodat : $J = Q^g_{PK}(R)$.

(12.6) stelling

K in gp(R)-Lker , equivalent :

1. K is een gT(P)-funktor
2. Iedere M in $gp(Q^g_{PK}(R))$ is PK-vrij

bewijs

1. impliceert 2. : Zij m een homogeen Punt in PK(M) dan bestaat er een I in L(K) : $I.m = \bar{0}$. Hieruit volgt dat $Q^g_{PK}(R)j_K(I).m = \bar{0}$ omdat PM op natuurlijke wijze een gegradeerd $Q^g_{PK}(R)$-Moduul is en omdat de Moduul-struktuur van M en PM kompatiebel is met de gegradeerde R-Moduul struktuur van M en PM. Uit 1. volgt nu : $m = \bar{0}$.

2. impliceert 1. : Tenduidelijkste geldt :

$$Q^g_{PK}(R)j_K(PI) \subset Q^g_{PK}(j_K(PI)) = Q^g_{PK}(PI)$$

voor alle I in L(K).Hieruit volgt een inklusie :

$$Q^g_{PK}(PI)/Q^g_{PK}(R)j_K(PI) \longrightarrow K(Q^g_{PK}(R)/Q^g_{PK}(R)j_K(PI))$$

Het kleinste Moduul is slap en wegens 2. ook PK-vrij.Dus: $Q^g_{PK}(PI) = Q^g_{PK}(R)j_K(PI)$.Links-exactheid van $Q^g_{PK}(-)$ levert:

$$Q^g_K(R)/Q^g_K(PI) \longrightarrow Q^g_K(R/PI)$$

Omdat PI in L(K) zit : $Q_K^g(R/PI) = \bar{0}$ en $Q_K^g(R) = Q_K^g(PI)$ en als we nu tenslotte Puntjes nemen komt er :

$$Q_{PK}^g(R) = PQ_{PK}^g(PI) = Q_{PK}^g(PI) = Q_{PK}^g(R)j_K(PI)$$

(12.7) <u>afspraak</u>

Zij M,N in gp(R). Met $HOM_R(M,N)$ zullen we de abelse gegradeerde groep $\oplus HOM_R(M,N)_n$ noteren waarin $HOM_R(M,N)_n$ die deelverzameling is van de preschoofmorfismen in p(R) tussen M en N zodat voor alle U open in X en alle m :

$$f(U)(M(U))_m \subset (N(U))_{n+m}$$

(12.8) <u>stelling</u>

E in gp(R), equivalent zijn :

1. E is PK-injektief
2. voor alle I in L(K) en alle h in $HOM_R(I,E)$ bestaat er een g in $HOM_R(R,E)$ zodat :

$$\begin{tikzcd} \bar{0} \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[dl, "g"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

<u>bewijs</u>

1. impliceert 2. : het zal volstaan dit te bewijzen voor alle f in $HOM_R(I,E)_n$. Voor $HOM_R(I,E)_0$ zijn we klaar. Neem nu

$$\begin{tikzcd} \bar{0} \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[dl, phantom, "g"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

met f in $HOM_R(I,E)_n$ en beschouw dan :

$$\begin{tikzcd} \bar{0} \arrow[r] & I(n) \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & R(n) \\ & E & \end{tikzcd}$$

dan is nu f in $HOM_R(I(n),E)_0$ en wegens starheid zit ook I(n) in L(K) en dus zijn we klaar !

2. impliceert 1. : Beschouw de exacte rij in gp(R) :

$$\bar{0} \longrightarrow N \longrightarrow M \xrightarrow{p} M/N \longrightarrow \bar{0}$$

met M/N PK-torsie.

Zij verder $f : N \longrightarrow E$ een morfisme in $gp(R)$.Kies nu een maximaal element (N',f') in de verzameling :

$$\{(N'',f''), N \subset N'' \subset M, f'':N'' \longrightarrow E \text{ in } HOM_R(N'',E) : f''|N = f\}$$

Omdat M/N slap is,wordt $N + PM$ onder p op M/N gemapt en dus is $M = N + PM$. Als we er nu in zouden slagen dat N' alle Punten van M bevat dan zou $N' = N$. Zonder afbreuk te doen aan de algemeenheid mogen we onderstellen dat $N = N'$.

Zij m een Punt van M, en stel $I = (\overline{0} : pm)$.Dan: $R/I \cong Rpm$. $Im \subset N$ en dus $I \subset (N : m)$.Stel nu m een homogeen Punt en definiëer $h(V) : I(V) \longrightarrow E(V)$ door : $a \mapsto f(V)(am(V))$ dan is h in $HOM_R(I,E)_{deg(m)}$.Wegens onderstelling 2. kunnen we een g^* in $HOM_R(R,E)$ vinden die het volgende diagram kommutatief maakt :

$$\begin{tikzcd} \overline{0} \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & R \arrow[dl, "g^*"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

Neem nu $g' = (g^*)_{deg(m)}$ en bekijk het Punt n : $n = g'(1)$. Voor alle U open verzamelingen in X, a in $I(U)$ homogeen :

$$h(U)(a) = g'(U)(a) = a\, g'(U)(1) = an(U)$$

Zij nu $N + Rm$ het gegradeerde R-Moduul voortgebracht door N en m in M en definiëer $g : N + Rm \longrightarrow E$ als volgt :

$$g(U)(y + am(U)) = f(U)(y) + an(U)$$

Dit is een goed gedefiniëerde afbeelding want als a in $I(U)$ zit,dwz. $am(U)$ in $N(U)$ dan hebben we :

$$f(U)(am(U)) = h(U)(a) = g'(U)(a) = an(U)$$

Verder is het duidelijk dat : g in $HOM_R(N + Rm,E)$ en $g|N = f$. Wegens maximaliteit is m in N en bijgevolg $N = M$. Uiteindelijk krijgen we dus een g'' in $HOM_R(M,E)$ en als we dan tenslotte $h = (g'')_0$ nemen zijn we klaar !

(12.9) <u>stelling</u>

Zij K in $gp(R)$-Sker samentrekbaar,equivalent :

1. K een $gT(P)$-funktor
2. M in $gp(Q^g_{PK}(R))$ dan M is PK-vrij
3. M in $gp(Q^g_{PK}(R))$ dan is M K-torsie vrij
4. M in $gp(Q^g_{PK}(R))$ dan M PK-injektief en K-torsievrij

bewijs

Dat 1. en 2. equivalent zijn kunnen we bewijzen als in stelling (12.6).
De implikaties 4. dan 3. en 4. dan 2. zijn triviaal.

1. impliceert 3. : Neem een punt m in $K(M)|U$, U open in X. Omdat K samentrekbaar is bestaat er een I in L(K) : $Im = \bar{0}$ (als we m homogeen onderstellen).Maar dan geldt ook: $Q^g_{PK}(R)j_K(I)m = \bar{0}$, dus $Q^g_{PK}(R)m = \bar{0}$ waaruit natuurlijk : $m = \bar{0}$ (want $Q^g_{PK}(R)$ heeft een eenheidsPunt).Men ziet gemakkelijk dat er met elke $n \neq 0$ in $h(K(M)(U))$ een niet nul Punt in $K(M)|U$ korrespondeert.Bijgevolg: $K(M)(U) = \bar{0}$, voor alle U open,waaruit het gestelde.

1. impliceert 4. : Er rest ons nog enkel te bewijzen dat uit 1. volgt dat iedere M in $gp(Q^g_{PK}(R))$ PK-injektief is. Zij I in L(K) en $f:I \longrightarrow M$ in $HOM_R(I,M)_n$ .Omdat M K-torsievrij is,kunnen we f faktoriseren langst $I/K(I)$ en we krijgen dus een element in $HOM_R(I/K(I),M)_n$ dat we opnieuw met f noteren.Als $j_K : R \longrightarrow Q^g_{PK}(R)$ het kanonieke morfisme is, dan is $j_K(I) = I/K(I)$. Omdat $Q^g_{PK}(R)j_K(I) = Q^g_{PK}(R)$ bestaan er homogene Punten a_i in $j_K(I)$ en homogene Punten q_i in $Q^g_{PK}(R)$ met $deg(a_i) = - deg(q_i)$: $1 = \sum q_i a_i$. Definiëer nu :

$$H = P(I \cap (\bigcap_i (j_K(R) : q_i))$$

H zit natuurlijk in L(K).Stel nu : $x = \sum q_i.f(a_i)$ en zij $g : j_K(R) \longrightarrow M$ gedefiniëerd door $g(1) = x$ en lineaire uitbreiding. g zit in $HOM(j_K(R),M)_n$.Zij h een homogeen Punt van H ,dan :

$$g(h) = h.\sum q_i.f(a_i) = \sum(hq_i)f(a_i) = \sum f(hq_ia_i) =$$

$$f(h\sum q_ia_i) = f(h)$$

f en g vallen dus samen op een H in L(K) en $g|I - f$ induceert dus een element van $HOM_R(I/H,M)_n$ dat de nulafbeelding moet zijn omdat $K(I/H) = I/H$, $K(M) = \bar{0}$ en K star. Stelling (12.8) maakt het bewijs dan af!

12.10 : stelling

R een slappe gegradeerde Ring,K in gp(R)-Lker en gT(P)-funktor, dan is $Q^g_{PK}(-)$ links- en rechts-semi exact en kommuteert met direkte sommen

<u>bewijs</u>

Zij $M \xrightarrow{p} M' \longrightarrow \bar{0}$ een exacte rij in gp(R).Om rechts-semi-exactheid van $Q^g_{PK}(-)$ na te gaan mogen we veronderstellen dat M en M' K-torsie vrij zijn.Uit de definitie volgt:

$$Q^g_{PK}(M) = M + PQ^g_{PK}(M) \; ; \; Q^g_{PK}(M') = M' + PQ^g_{PK}(M')$$

Om de surjektiviteit van $\bar{p} : Q^g_{PK}(M) \longrightarrow Q^g_{PK}(M')$ na tegaan, volstaat het dus aan te tonen dat $PQ^g_{PK}(M)$ op $PQ^g_{PK}(M')$ gemapt wordt onder $\bar{p}$. Neem een homogeen Punt m in $Q^g_{PK}(M')$, dan bestaat er een slappe I in L(K) met $Im \subset M'$. Zij nu : $N = P(p^{-1}(Im))$ in M. Dan : $Q^g_{PK}(R)N \subset PQ^g_{PK}(M)$, omdat deze laatste op natuurlijke wijze een gegradeerd $Q^g_{PK}(R)$-Moduul is.(stelling (11.4)).

$\bar{p}$ beperken tot $PQ^g_{PK}(M) \longrightarrow PQ^g_{PK}(M')$ levert een gp(R)-morfisme, met $PQ^g_{PK}(M')$ PK-vrij en een gegradeerd $Q^g_{PK}(R)$-Moduul. Zij 1 een homogeen Punt van $Q^g_{PK}(R) = PQ^g_{K}(R)$ dan is er een I_1 in L(K) waarvoor $I_1 1 \subset j_K(R)$. Voor een homogeen Punt n van $PQ^g_{PK}(M)$ hebben we :

$$\bar{p}(I_1 1.n) = (I_1.1)\bar{p}(n) = I_1\bar{p}(1.n) \quad \text{, en dus :}$$

$$\bar{p}(1.n) - 1.\bar{p}(n) \text{ in } PKPQ^g_{PK}(M') = \bar{0}$$

en $\bar{p}$ beperkt zich dus tot een $gp(Q^g_{PK}(R))$-morfisme,dus :

$$\bar{p}(Q^g_{PK}(R)N) = Q^g_{PK}(R)\bar{p}(N) \supset Q^g_{PK}(R)(Im)$$

en dus ook : $\bar{p}(Q^g_{PK}(R)N) \supset Q^g_{PK}(R)m$ (gT(P)-funktor) , en tenslotte bestaat er dus een Punt in $Q^g_{PK}(R)N$ dat onder $\bar{p}$ op m gemapt wordt.klaar!

We weten reeds hetvolgende :

$$PQ^g_{PK}(\oplus M_i) = Q^g_{PK}(P(\oplus M_i)) = Q^g_{PK}(\oplus PM_i)$$

kijk nu naar devolgende exacte rij :

$$\bar{0} \longrightarrow \oplus PM_i \longrightarrow \oplus Q^g_{PK}(PM_i) \longrightarrow \oplus(Q^g_{PK}(PM_i)/PM_i) \longrightarrow \bar{0}$$

hierin is $\oplus(Q^g_{PK}(PM_i)/PM_i)$ PK-torsie en $\oplus Q^g_{PK}(PM_i)$ K-torsievrij en een $Q^g_{PK}(R)$-gegradeerd Moduul.We kunnen nu analoog tewerkgaan als in het bewijs van stelling (12.9) om te bewijzen dat $\oplus Q^g_{PK}(PM_i)$ trouw PK-injektief is.Tot hier hebben we volgende gelijkheid bewezen : $\oplus Q^g_{PK}(PM_i) = Q^g_{PK}(\oplus PM_i)$
Men kan verder gemakkelijk nagaan dat voor alle M in gp(R): $PQ^g_{PK}(M) = Q^g_{PK}(PM)$ en dus krijgen we hetvolgende :

$$\oplus\, Q^g_{PK}(PM_i) = \oplus\, PQ^g_{PK}(M_i) \quad \text{en bovendien :}$$

$$\oplus\, Q^g_{PK}(PM_i) = Q^g_{PK}(P(\oplus\, M_i)) = PQ^g_{PK}(\oplus\, M_i)$$

omdat $Q^g_{PK}(\oplus\, M_i) = \oplus\, \bar{M}_i + PQ^g_{PK}(+\, M_i)$ waarin de som genomen is in $Q^g_K(\oplus\, M_i)$ en dus krijgt men :

$$Q^g_{PK}(\oplus\, M_i) = \oplus\, (\bar{M}_i + PQ^g_{PK}(M_i)) = \oplus\, Q^g_{PK}(M_i)$$

met $\bar{M}_i$ natuurlijk gelijk aan $M_i/K(M_i)$.En dus zijn we klaar!

(2.11) stelling

R een slappe gegradeerde Ring, K in gp(R)-Sker samentrekbaar en een gT(P)-funktor dan : $Q^g_{PK}(-)$ is links- en rechts-semiexact en kommuteert met direkte sommen.

bewijs

het bewijs van vorige stelling kunnen we volledig kopiëren,als we ipv. de aangehaalde stellingen de corresponderende stellingen voor samentrekbare kernfunktoren invullen.

I got no illusions about the political left any more than the right,just a shrewd idea which of the two side's gonna stomp on us first.All of us,you,me,rock'n'rollers,punks,longhairs, dope smokers,squatters,students,unmarried mothers,prisoners, gays,the jobless,immigrants,gipsies,...to stand aside is to take sides. If music can ease even a tiny fraction of the prejudice and intolerance in this world,then it's worth trying. I don't call that "unnecessary overtones of violence".I call it standing up for your rights.
And if we fail,if we all get swallowed up by big biznis before we achieve a thing,then we'll havta face the scorn of tomorrow's generation.But we're gonna have a good try.
Fancy joining us ? (Tom Robbinson)

13. GEGRADEERDE KERNFUNKTOREN IN gs(R)

(13.1) Uit stelling (2.7) weten we dat gs(R) een strikte Giraud-deelkategorie is van gp(R). In deze paragraaf zullen we trachten de lokalisatie in gs(R) in verband te brengen met lokalisatie in gp(R). De inklusie-funktor : $gs(R) \longrightarrow gp(R)$ noteren we i, de reflektor $\underline{\underline{a}}$.

(13.2) <u>stelling</u>

E in gs(R) is injektief in gs(R) desda iE injektief is in gp(R).

<u>bewijs</u>

Wegens de links-exactheid van i volgt uit iE injektief in gp(R) dat E injektief is in gs(R). Omgekeerd nu , zij E injektief in gs(R) en beschouw volgend diagram in gp(R) :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f"'] & C \\ & iE & \end{tikzcd}$$

Dit diagram kan uitgebreid worden tot volgend in gp(R) :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C' \arrow[rr, "j"] \arrow[d, "q_{C'}"'] \arrow[dr, "f"] & & C \arrow[d, "q_C"] \\ & & iE & \\ 0 \arrow[r] & i\underline{\underline{a}}C' \arrow[rr, "i\underline{\underline{a}}(j)"'] \arrow[ur, "i\underline{\underline{a}}(f)"] & & i\underline{\underline{a}}C \arrow[ul, "\bar{g}"'] \end{tikzcd}$$

Het bestaan van $\bar{g}$ volgt uit het injektief zijn van E in gs(R) en we hebben dus : $i\underline{\underline{a}}(f) = \bar{g} \circ i\underline{\underline{a}}(j)$. Als we nu $g = \bar{g} \circ q_C$ stellen dan krijgen we :

$$g \circ j = \bar{g} \circ q_C \circ j = \bar{g} \circ i\underline{\underline{a}}(j) \circ q_{C'} = i\underline{\underline{a}}(f) \circ q_{C'} = f \text{ en klaar!}$$

(13.3) <u>notatie</u>

Zij C in gs(R), resp. C in gp(R) dan noteren we de injektief omhullende in gs(R), resp. gp(R) van C met $E^{gs}(C)$, resp. $E^{gp}(C)$.

(13.4) stelling

Zij M in gs(R) , dan is $iE^{gs}(M) = E^{gp}(iM)$

bewijs

Zij N een deelpreschoof van $iE^{gs}(M)$ in gp(R) en stel dat $N \cap iM = \bar{0}$ (beiden als deelpreschoven van $iE^{gs}(M)$ opgevat) Wegens exactheid van de reflektor $\underline{\underline{a}}$ hebben we dan ook :

$$\bar{0} = \underline{\underline{a}}(\bar{0}) = \underline{\underline{a}}(N \cap iM) = \underline{\underline{a}}N \cap \underline{\underline{a}}iM = \underline{\underline{a}}N \cap M$$

Maar dit is in kontradiktie met het feit dat $E^{gs}(M)$ een essentiële uitbreiding is van M in gs(R) omdat $\underline{\underline{a}}N$ in gs(R) zit.
$iE^{gs}(M)$ en $E^{gp}(iM)$ zijn dus beiden essentiële extenties van iM en dus krijgen we volgend kommutatief diagram in gp(R) :

$$\begin{tikzcd} iM \arrow[r] \arrow[d] & E^{gp}(iM) \arrow[dl, shift left, "f"] \\ iE^{gs}(M) \arrow[ur, shift left, "g"] & \end{tikzcd}$$

Waar het bestaan van f uit stelling (13.2) volgt en f en g beiden monomorfismen zijn.Omdat nu $E^{gp}(iM)$ een maximale essentiële extentie van iM is in gp(R) volgt uit :

$0 \longrightarrow E^{gp}(iM) \xrightarrow{f} iE^{gs}(M)$; dat $E^{gp}(iM) \cong iE^{sg}(M)$

(13.5) definitie

K,K' in gp(R)-Sker , we zeggen dat K' Q_K-kompatiebel is als : $K'Q_K = Q_K K'$

(13.6) stelling

M in gp(R),K' is Q_K-kompatiebel,dan :

1. Als M K'-torsievrij is,dan is $Q_K(M)$ K'-torsievrij, het omgekeerde geldt als M K-torsie-vrij is
2. Als M K'-torsie is,dan is $Q_K(M)$ K'-torsie, het omgekeerde geldt als M K-torsie is

bewijs

Kletskoek!

(13.7) definitie

Een kernfunktor K in gp(R)-Sker is gs(R)-kompatiebel als : $i\,\underline{\underline{a}}\,K = K\,i\,\underline{\underline{a}}$.

Een kernfunktor K in gp(R)-Sker noemen we inner als : $i\,\underline{\underline{a}}\,K\,i\,\underline{\underline{a}} = K\,i\,\underline{\underline{a}}$

Als K in gp(R)-Sker inner is dan noteren we de funktor Ki met K^{gs}

(13.8) stelling

Zij K een gs(R)-kompatiebele kernfunktor in gp(R), dan is K^{gs} een kernfunktor in gs(R)

---

bewijs

Zij M in gs(R) , dan : $K(iM) = K(i\underline{\underline{a}}iM) = i\underline{\underline{a}}K(iM)$, dus K^s is inner in gs(R).Daarom geldt : $K^s(M) = \underline{\underline{a}}K(iM)$ en omdat $\underline{\underline{a}}$ exact is en K een kernfunktor in gp(R) volgt onmiddellijk dat K^s een links-exacte subfunktor van de identiteit is in gs(R).Verder geldt :

$$\begin{aligned} K^s(M/K^s(M)) &= \underline{\underline{a}}K(i\underline{\underline{a}}(iM/iK^s(M))) \\ &= \underline{\underline{a}}K(iM/iK^s(M)) \\ &= \underline{\underline{a}}K(iM/K(iM)) = \underline{\underline{a}}(\bar{0}) = \bar{0} \end{aligned}$$

Rest ons nog de starheid te bewijzen :

$$K^s(M(n)) = \underline{\underline{a}}K(iM(n)) = \underline{\underline{a}}(K(iM)(n)) = (K^s(M))(n)$$

Merk tenslotte op dat we in het bewijs K^s ipv K^{gs} hebben getypt,maar nevertheless zijn we klaar!

(13.9) definitie

Zij K in gp(R)-Lker,kompatiebel met gs(R) dan noemen we K^{gs} een gegradeerde lokale kernfunktor in gs(R)

(13.10) Zij R een schoof van gegradeerde ringen, K een gs(R)-kompatiebele kernfunktor in gp(R)-Sker, dan definiëren we $L(K^{gs}) = \{ I$ gegradeerd links-Ideaal van R : $K(R/I) = R/I \}$

(13.11) stelling

In de situatie van (13.10) :
$L(K^{gs}) = \underline{\underline{a}}L(K)$

bewijs

Dit is een direkt gevolg van stelling (13.6) en de definities, omdat ieder gegradeerd links-pre-Ideaal van R gesepareerd is, als R het is.

(13.12) stelling

K een $gs(R)$-kompatiebel element van $gp(R)$-Sker, M in $gs(R)$, equivalent zijn :
1. M is (trouw)-K^{gs}-injektief
2. iM is (trouw)-K-injektief

bewijs

Zij iM K-injektief in $gp(R)$ en beschouw volgend diagram in $gs(R)$:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & S_1 & \longrightarrow & S_2 & \longrightarrow & S_2/S_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & & & & & \\ & & M & & & & & & \end{array}$$

met $K^{gs}(S_2/S_1) = S_2/S_1$. In $gp(R)$ hebben we dan :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & iS_1 & \longrightarrow & iS_2 & \longrightarrow & iS_2/iS_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle if} & & & & & & \\ & & iM & & & & & & \end{array}$$

i is links-exact en dus is iS_2/iS_1 een deelpreschoof van $i(S_2/S_1)$ en verder is $\underline{\underline{a}}(iS_2/iS_1) = S_2/S_1$. Omdat S_2/S_1 K^{gs}-torsie is volgt uit stelling (13.6) dat iS_2/iS_1 K-torsie is en dus bestaat er een morfisme $g' : iS_2 \longrightarrow iM$ die het diagram kommutatief maakt, het is duidelijk dat dan $g = \underline{\underline{a}}(g')$ het eerste diagram kommuteert.
Omgekeerd nu, zij M K^{gs}-injektief en beschouw volgend diagram in $gp(R)$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & P_2 \arrow[r] & P_2/P_1 \arrow[r] & 0 \\ & iM & & & \end{tikzcd}$$

Met P_2/P_1 K-torsie. Omdat $\underline{\underline{a}}$ exact is krijgen we een diagram in gs(R) :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \underline{\underline{a}}P_1 \arrow[r] \arrow[d, "\underline{\underline{a}}f"] & \underline{\underline{a}}P_2 \arrow[r] & \underline{\underline{a}}(P_2/P_1) \arrow[r] & 0 \\ & M & & & \end{tikzcd}$$

Uit stelling (13.6) volgt andermaal dat $\underline{\underline{a}}(P_2/P_1)$ K^{gs}-torsie is, en dus bestaat er een morfisme $g' : \underline{\underline{a}}P_2 \longrightarrow M$ die het diagram kompleteert. Zij nu $g = (ig')\circ q_{P2}$ dan gaat men gemakkelijk nu dat g het eerste diagram kommutatief maakt.

Omdat iM K-torsievrij is als en slechts als M K^{gs}-torsievrij is (tot treurens toe nogmaals stelling (13.6) en iM gesepareerd) maakt stelling (6.4) het bewijs af !

(13.13) <u>stelling</u>

K een gs(R)-kompatiebel element van gp(R)-Sker,
M in gs(R) K^{gs}-torsievrij : $iE^g_{K^{gs}}(M) = E^g_K(iM)$

<u>bewijs</u>

U mag zelf es raden welke stelling ons andermaal komt vertellen dat iM K-torsievrij is. Omdat $E^g_K gs(M)$ trouw K^{gs}-injektief is, is $iE^g_K gs(M)$ trouw K-injektief. Verder is ook $iE^g_K gs(M)/iM$ K-torsie omdat $E^g_K gs(M)/M$ K^{gs}-torsie is. Maar zoals we allemaal weten is $E^g_K(iM)$ op isomorfisme na het unieke element in gp(R) met deze eigenschappen, dus klaar!

(13.14) <u>stelling</u>

K een gs(R)-kompatiebel element van gp(R)-Sker,
M in gs(R) dan : $iQ^g_{K^{sg}}(M) = Q^g_K(iM)$

bewijs

Als M K^{gs}-torsievrij is,dan zijn we klaar wegens voorgaande stelling.In het algemene geval :

$$iQ^g_K gs(M) = iE^g_K gs(M/K^{gs}(M)) = E^g_K(i\underline{\underline{a}}(iM/K(iM)))$$

iM/K(iM) is gesepareerd,en dus is $i\underline{\underline{a}}$(iM/K(iM)) een essentiële uitbreiding van iM/K(iM) in gp(R).Bijgevolg is $i(M/K^{gs}(M))$ is K-torsievrij en dus :

$$Q^g_K(iM) = E^g_K(iM/K(iM)) = E^g_K(i\underline{\underline{a}}(iM/K(iM))$$

(13.15) definitie

R een schoof van gegradeerde ringen,K een gs(R)-kompatiebel element van gp(R)-Lker, we zeggen dat K^{gs} reduceert R als K iR reduceert .

(13.16) stelling

Zij R een slappe schoof van gegradeerde ringen en K een gs(R)-kompatiebel element van gp(R)-Lker dat R reduceert.

$Q^g_K gs(R)$ is een schoof van gegradeerde ringen waarvan de Ring-struktuur vastligt door de gegradeerde R-Moduulstruktuur.

Voor alle M in gs(R) is $Q^g_K gs(M)$ op natuurlijke wijze een gegradeerd $Q^g_K gs(R)$-Moduul,verder,voor alle U open in X :

$$Q^g_K gs(M)(U) = Q^g_{K(U)}(M(U))$$

bewijs

Volgt onmiddellijk uit voorgaande stelling en stelling (7.6).

14. GEGRADEERDE T-FUNKTOREN IN gs(R)

(14.1) Laat ons eerst even stilstaan bij volgend probleem : geef een generator voor gs(R) ! Noteer met R_U de schoof met als staken : $(R_U)_x = 0$ als x niet in U zit en $(R_U)_x = R_x$ als x wel in U zit (maw. R_U is R beperkt tot het open deel U).Nu nemen we :

$$G = \bigoplus_{U \text{ in } \mathrm{Open}(X)} \left(\bigoplus_n R_U(n) \right)$$

(14.2) lemma

G is een generator voor gs(R)

bewijs

Zij M en N in gs(R) en f: $M \longrightarrow N$ een niet-nul morfisme ,het zal volstaan een niet nul morfisme g: $G \longrightarrow M$ te construeren zodat volgend diagram kommutatief wordt :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N \\ G \arrow[u, "g"] \arrow[ur, "f_\circ g \neq 0"'] & \end{tikzcd}$$

f is niet-nul en dus bestaat er een open omgeving U zodat $f(U) : M(U) \longrightarrow N(U)$ niet-nul is.Maar omdat $\oplus R_U(U)(n)$ een generator is voor R(U)-gr kunnen we kunnen we een niet-nul morfisme $g(U)\colon \oplus R_U(U)(n) \longrightarrow M(U)$ vinden zodat $f(U)_\circ g(U) \neq 0$. Door samenstellen met restriktiemorfismen hebben we natuurlijk eveneens een morfisme $\oplus R_U(n) \longrightarrow M$ en dus ook van G naar M met $f_\circ g \neq 0$.klaar!

(14.3) stelling

Zij K een gegradeerde lokale kernfunktor in gs(R) die R reduceert en R slappe schoof van gegradeerde ringen,equi:
1. K is een gegradeerde T-funktor in gs(R)
2. $Q_K^g(M) = Q_K^g(R) \otimes_R M$ voor alle M in gs(R)

bewijs

Zij G als in (14.1).We hebben een kanoniek morfisme :

$$Q^g_K(R) \otimes_R G \longrightarrow Q^g_K(G)$$

als we de staken berekenen krijgen we :

$$\begin{aligned}(Q^g_K(R) \otimes_R G)_x &= Q^g_K(R)_x \otimes_{R_x} G_x \\ &= \bigoplus_U (Q^g_K(R)_x \otimes_{R_x} (\bigoplus_n R_{U,x}(n))) \\ &= \bigoplus_U (\bigoplus_n (Q^g_K(R)_x \otimes_{R_x} R_{U,x}(n)))\end{aligned}$$

en anderzijds :

$$Q^g_K(G)_x = \bigoplus_U (\bigoplus_n Q^g_K(R_U)_x(n))$$

We splitsen onze aandacht, schizofrenen als we zijn, in twee gevallen :

<u>1° geval</u> : Als x in U zit dan hebben we voor alle V open in X zodat x in $V \subset U$: $Q^g_K(R)(V) = Q^g_K(R_U)(V)$, immers :

$$Q^g_K(R_U)(V) = Q^g_{K(V)}(R_U(V)) = Q^g_{K(V)}(R(V)) = Q^g_K(R)(V)$$

en dus geldt voor alle x in U :

$Q^g_K(R)_x = Q^g_K(R_U)_x$ en $R_{U,x} = R_x$ en bijgevolg krijgen we :

$$Q^g_K(R)_x \otimes_{R_x} R_{U,x} = Q^g_K(R_U)_x$$

<u>2° geval</u> : Als x niet in U zit dan : $R_{U,x} = 0$ en het zal dus voldoende zijn te bewijzen : $Q^g_K(R_U)_x = 0$.

Hiervoor halen we een oude koe uit de gracht : een induktieve limiet van ringen met eenheid en ringmorfismen (A_a, f_{ab}) is 0 als en slechts als er een c bestaat zodat $A_b = 0$, voor alle b groter dan c. Als dus : $R_{U,x} = \varinjlim R_U(V) = 0$, dan bestaat er een open V in X : x in $V \subset U$ en $R_U(W) = 0$ voor alle $W \subset V$, bijgevolg hebben we voor alle W: x in $W \subset V$:
$Q^g_K(R_U)(W) = Q^g_{K(W)}(R_U(W)) = 0$ en dus ook $Q^g_K(R_U)_x = 0$.

Uit 1° en 2° en de eerste opmerkingen volgt nu :

$$Q^g_K(R) \otimes_R G = Q^g_K(G)$$

neem nu een M in $gs(R)$ dan hebben we I, J, f en g :

$$G^I \xrightarrow{f} G^J \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

rechts-exactheid van $Q^g_K(R) \otimes_R -$ levert :

$$Q^g_K(R) \otimes_R G^I \xrightarrow{id \otimes f} Q^g_K(R) \otimes_R G^J \xrightarrow{id \otimes g} Q^g_K(R) \otimes_R M \to 0$$

en anderzijds hebben we de rechts-exactheid van $Q^g_K(-)$, en dus krijgen we de volgende situatie :

$$\begin{array}{ccccccc}
Q^g_K(G)^J & \xrightarrow{id \otimes f} & Q^g_K(G)^I & \xrightarrow{id \otimes g} & Q^g_K(R) \otimes_R M & \longrightarrow & 0 \\
\| & & \| & & \downarrow & & \\
Q^g_K(G)^J & \xrightarrow{Q^g_K(f)} & Q^g_K(G)^I & \xrightarrow{Q^g_K(g)} & Q^g_K(M) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Omdat het linker-vierkant kommutatief is,volgt hieruit het gestelde. klaar!

(14.4) <u>stelling</u>

Zij B een basis voor de topologie op X.Zij K een gegradeerde lokale gs(R)-kompatiebele kernfunktor die iR reduceert en K(U) is een T-funktor voor alle U in B,dan geldt :
K^s is een gegradeerde T-funktor in gs(R)

<u>bewijs</u>

Zij M in gs(Q^g_K(R)),dan : K(iM)(U) = K(U)((iM)(U)).Omdat K(U) een gegradeerde T-funktor is en omdat (iM)(U) in Q^g_K(R)(U)-gr = $Q^g_{K(U)}$(R(U))-gr zit,volgt: K(U)((iM)(U)) = 0 voor alle U in B en omdat M een schoof is : K(iM) = $\bar{0}$ en dus K^s(M) = $\bar{0}$.

(14.5) <u>stelling</u>

Zij K een gT(B)-funktor (I.e. à la (14.4)) dan :
1. Ieder gegradeerd links-Ideaal van Q^g_Ks(R) wordt voortgebracht door een gegradeerd links-Ideaal van R
2. Voor alle M in gs(R) : Q^g_Ks(M) = Q^g_Ks(R) $\otimes_R$ M

<u>bewijs</u>

2. volgt onmiddellijk uit (14.3)
1. Zij I een gegradeerd links-Ideaal van Q^g_Ks(R) en stel : J = I ∩ j_Ks(R) dan is I/J K^s-torsie , dus iI/iQ^g_Ks(R)iJ is K-torsie en dan : I/$\underline{\underline{a}}$(i$Q^g_K$s(R)iJ) K^s-torsie en een gegradeerd Q^g_Ks(R)-Moduul waaruit tenslotte : I = $\underline{\underline{a}}$(i$Q^g_K$s(R)iJ).

(14.6) Voorbeelden van gT(B)-funktoren worden gegeven door Proj(R) voor R kommutatief of Zariski-centraal.

hoofdstuk vier : PROJEKTIEVE SCHEMA'S

IV.1 : Proj(R) , INLEIDENDE BESPIEGELINGEN

(1.1) In deze paragraaf volgen we F. Van Oystaeyen , "Graded and filtered rings and modules" .Tenzij uitdrukkelijk anders vermeld zal R steeds een positief gegradeerde links-Noetherse ring zijn.

(1.2) <u>stelling</u>

R positief gegradeerd links-Noethers dan is R een R_0-ring van eindig type.

<u>bewijs</u>

Laat $x_1,\dots,x_m$ de homogene elementen van R zijn die R_+ ($R_+ = \oplus_{i>0} R_i$) als links R-moduul voortbrengen.Noteer nu met S de ring voortgebracht door R_0 en $\{x_1,\dots,x_m\}$. Bij konstruktie bevat S , R_0 .We kunnen nu voortgaan per induktie.Stel dat S alle R_j bevat met j kleiner dan i. Zij nu x in R_i , dan kan x geschreven worden als :

$$x = \Sigma_{s=1}^{m} r_s x_s \text{ met } r_s \text{ in } R_{i-d_s} \text{ en } d_s = \deg(x_s)$$

Omdat voor alle s : d_s strikt groter dan 0 zitten dus alle r_s in S (wegens induktiehypothese) en dus ook x.klaar!

(1.3) <u>definities</u>

Met $\mathrm{Spec}_g(R)$ zullen we alle gegradeerde priemidealen van R aanduiden.

Proj(R) is de deelverzameling van $\mathrm{Spec}_g(R)$ bestaande uit die (gegradeerde) priemidealen die R_+ niet bevatten.

(1.4) <u>stelling</u>

M in R-gr eindig voortgebracht,equivalent :

1. $Q_{R-P}(M) = 0$ voor alle P in Proj(R)
2. $Q_{R+}(M) = 0$
3. er is een n : $M_m = 0$ voor $m > n$

---

bewijs

1. dan 2. : Zij P in $\mathrm{Proj}(R)$, $Q_{R-P}(M) = 0$ impliceert wegens het eindig voortgebracht zijn van M en het feit dat k_{R-P} een gegradeerde kernfunktor is dat er een gegradeerd ideaal $I_P \not\subset P$ bestaat : $I_P M = 0$. Stel nu $I = \sum_{P \text{ in } \mathrm{Proj}} I_P$. Het is duidelijk dat $\mathrm{rad}\ I = P_1 \cap \ldots \cap P_r$, met alle $P_i \supset R_+$, dus R_+ in rad I en bijgevolg bestaat er een $N : (R_+)^N \subset I$. Maar dan is $M = k_{R+}(M)$ en dus $Q_{R+}(M)=0$.

2. dan 1. : $M = k_{R+}(M)$ impliceert $Q_{R-P}(M) = 0$ voor alle P in $\mathrm{Proj}(R)$ omdat R_+ in $L(R-P)$ zit.

3. dan 2. : Als $M_m = 0$ voor alle m groter dan n en als m_1 tussen de eindig vele homogene elementen die M voortbrengen hetgene is met minimale graad dan geldt dat $R_+^N M = 0$ voor N groter dan $n\deg(m_1)$.Bijgevolg is $Q_{R+}(M) = 0$.

2. dan 3. : Uit stelling 1.2 volgt dat R als R_0-ring wordt voortgebracht door eindig veel homogene elementen,zeg r_1, $\ldots, r_m$ waar de r_i zo geordend zijn dat de graden stijgen. Verder wordt ook M door eindig veel homogene elementen voortgebracht,zeg $m_1, \ldots, m_t$ eveneens in stijgende graad-volgorde. Veronderstel nu dat $R_+^N M = 0$ voor zekere N . Als N_0 groter is dan $N.\deg(r_m)$ dan is $R_{N_0} \subset R_+^N$ (omdat $R = R_0\langle r_1, \ldots, r_m\rangle$). Beschouw nu N_1 groter dan het maximum van $N.\deg(r_m)$ en $\deg(m_t) + N.\deg(r_m)$.Neem nu x in M_{N_1} ,dwz. $x = x_1 m_1 + \ldots + x_t m_t$ met voor alle j : $\deg(x_j)$ groter dan $N.\deg(r_m)$ en bijgevolg zijn alle $x_i m_i = 0$ en dus klaar!

(1.5) stelling

Gegeven zijn additieve deelgroepen p_n van R_n voor alle n groter dan een gegeven n_0.Equivalent zijn:

1. Er is een unieke P in $\mathrm{Proj}(R)$ zodat $P \cap R_n = p_n$, voor alle n groter dan n_0
2. a) voor alle n en k en voor alle $m \geq n_0 : R_n p_m R_k \subset p_{n+m+k}$
   b) voor $n,m \geq n_0$ stel r in R_n ,t in R_m zodanig dat $rR_k t \subset p_{n+m+k}$ voor alle k dan of r in p_n of t in p_m
   c) $p_n \neq R_n$ voor een n groter dan n_0

---

bewijs

1. dan 2. : a) en b) zijn triviaal voldaan. Stel nu dat $p_n = R_n$ voor alle n groter dan n_0. Voor alle $k \neq 0$ en alle a in R_k hebben we

$$B = a.R_{l_1}.a\ldots a.R_{l_r}.a \text{ in } R_{k(r+1)+l_1+\ldots+l_r}$$

voor alle $l_1,\ldots,l_r$. Kies nu r zodanig dat $k(r+1) \geqslant n_0$, dan is B in P voor elke keuze der $l_1,\ldots,l_r$, bijgevolg is ook a in P , dus R_+ zit in P . Kontradiktie !

2. dan 1. : Uit c) volgt dat we een $n \geqslant n_0$ kunnen nemen en een element a in $R_n - p_n$. Voor elke m stellen we :

$$P'_m = \{ x \text{ in } R_m : \text{voor grote } t \text{ en alle } (l_1,\ldots,l_t) \text{ in } N^t : \; aR_{l_1}a\ldots aR_{l_t}x \text{ in } p_{m+tn+l_1+\ldots+l_t} \}$$

Voor $m \geqslant r_0$ volgt uit b) dat $P'_m = p_m$. Verder is elke P'_m een additieve deelgroep van R_m. Stel nu $P = \sum P'_m$, uit a) volgt dat P een ideaal van R is en $P_n \neq R_n$ omdat a niet in p_n zit. Zij nu s in R_l en w in R_m zo dat : sR_kw in P'_{l+m+k} zit voor alle k. Omdat R links-Noethers is, wordt RsRw voortgebracht door eindig veel homogene elementen die we mogen kiezen van de vorm : sr_kw. Daarom kunnen we $t \neq 0$ groot genoeg kiezen zodat voor alle $(l_1,\ldots,l_t)$ en voor alle generators sr_kw geldt :

$$aR_{l_1}a\ldots aR_{l_t}sr_kw \text{ in } p_{l+m+k+tn+l_1+\ldots+l_t}$$

Voor alle t' groter dan t en voor alle q geldt dus :

$$((RaR)^{t'})_q.sR_kw \quad \text{in} \quad p_{q+l+m+k}$$

Zij nu A = RaR , dan is voor alle k,q :

$$(A^{t'})_q s(A^{t'})_k w \quad \text{in} \quad p_{q+l+m+k}$$

$A^{t'} \neq 0$ omdat anders a in p_n zou zitten wegens b). Verder is $(A^{t'})_q \neq 0$ slechts voor q   nt' omdat deg(a)=n > 0 . Uit b) volgt verder dat of $(A^{t'})_q s$ in p_{q+l} zit of $(A^{t'})_k w$

in p_{k+m} zit ,waar zowel q+l als k+m groter kunnen genomen worden dan t'n $> n_0$. De konstruktie van P impliceert dat of s of w in P moeten zitten en bijgevolg hebben we bewezen dat P in Proj(R) zit.
Onderstel verder dat Q eveneens in Proj(R) zit,verschillend van P en toch voldoet Q aan de voorwaarden van 2..
Neem een b in Q-P homogeen.Als deg(b) > 0 is dan geldt voor alle $m \geqslant n_0$ en voor alle m-tuppels $(l_1,\ldots,l_m)$ dat:

$$bR_{l_1}b\ldots bR_{l_m}b \subset Q \cap R_l \subset p_l \subset P$$

met $l = md + l_1 + \ldots + l_m$. En dus :$(Rb)^m$ P en dus b in P.

(1.6) stelling

Zij I een gegradeerd ideaal van R en laat C de verzameling zijn vd. J : J ideaal van R maximaal tov. $J \notin L(I)$: $gC = \{(J)_g : J \text{ in } C\}$.Dan bestaat gC uit gegradeerde priemidealen en $L(I) = \cap L(R-P)$ (doorsnede genomen over alle P in gC).Als $I \subset R_+$, dan is gC een deel van Proj(R)

---

bewijs

Dat C uit priemidealen bestaat kunnen we in LNM 444 vinden, bijgevolg bestaat gC dus uit gegradeerde priemidealen.Het is duidelijk dat een ideaal H in L(I) zit als en slechts als $H \not\subset P$ voor alle P in C.Omdat beide filters die we willen vergelijken gegradeerd zijn volgt dat een filterbasis voor L(I) verkregen wordt door de gegradeerde idealen te nemen die in geen enkele van de $(P)_g$ in gC zitten.
Als $I \subset R_+$ dan hebben we voor elke P in gC : $I \not\subset P$ en dus zeker : $R_+ \not\subset P$ en dus is P in Proj(R).Klaar!

(1.7) afspraak

Voor elk gegradeerd ideaal I van R noteren we met
$I_+ = I_1 \oplus I_2 \oplus \ldots$

(1.8) stelling

I gegradeerd ideaal van R dan : $R_+ \cap \mathrm{rad}(I_+) = R_+ \cap \mathrm{rad}(I)$

---

bewijs

Zij P een gegradeerd priemideaal dat I_+ bevat , dan bevat P of I of R_+ .

(1.9) stelling

Noteer met $V_+(I) = \{P \text{ in } \mathrm{Proj}(R) : I \subset P\}$,
dan : $V_+(I) = V_+(I_+) = V_+(\mathrm{rad}\ I) = V_+((\mathrm{rad}\ I)_+) = V(\mathrm{rad}\ I_+)$

bewijs

Volgt onmiddellijk uit voorgaande stelling.

IV.2 : STRUKTUURSCHOOF OP Proj(R)

(2.1) Zij k_I de symetrische gegradeerde kern-funktor geassocieërd met de filter $L(I)$.$Q_I^g(-)$ de gegradeerde lokalisatiefunktor behorend bij k_I en $j_I : R \longrightarrow Q_I^g(R)$ het kanonieke gegradeerde ringmorfisme van graad 0.
Als $I \subset R_+$ dan zit J in $L(I)$ als en alleen als J_+ in $L(I)$ zit.We kunnen stelling (1.8) gemakkelijk veralgemenen:

Voor elk gegradeerd ideaal I van R en alle n_0 :
$R_+ \cap \mathrm{rad}(I) = R_+ \cap \mathrm{rad}(\bigoplus_{n \geqslant n_0} I_n)$.

(2.2) We zullen nu op Proj(R) de topologie zetten,geinduceerd door de Zariski-topologie op Spec(R).Noteer voor ieder ideaal (niet noodzakelijk gegradeerd) I van R met $V_+(I) = \{P \text{ in } \mathrm{Proj}(R) : I \subset P\}$; $X_+(I) = X - V_+(I)$ waar $X = \mathrm{Proj}(R)$.In deze definities kunnen we natuurlijk I vervangen door het kleinste gegradeerde ideaal dat I bevat.
Als we vanaf nu $V_+(I)$ of $X_+(I)$ schrijven dan zal I gegradeerd ondersteld zijn.
Uit stelling (1.9) volgt verder dat we $I \subset R_+$ mogen onderstellen en $V_+(I) = V_+(\bigoplus_{n \geqslant n_0} I_n)$, voor alle n_0.
Stelling (1.9) leert ons verder dat $V_+(I)$ enkel van het radikaal afhangt.

Volgende relaties zijn eenvoudig na te gaan :

$$V_+(I + J) = V_+(I) \cap V_+(J)$$

$$V_+(I.J) = V_+(I \cap J) = V_+(I) \cup V_+(J)$$

Hieruit volgt natuurlijk dat de verzamelingen $X_+(I)$,waar I de gegradeerde idealen van R doorloopt,een topologie definiëert die samenvalt met de geïnduceerde topologie van Spec(R).

(2.3) Met een open verzameling $X_+(I)$ associëren we de kernfunktor k_{I_+} , dus :

$$L(I_+) = \{ L \text{ in } L_g(R) : L \supset J \text{ in } L_g(R) : \text{rad} J \supset I_+ \}$$

en we krijgen volgende

stelling

Voor elke open verzameling $X_+(I)$ van Proj(R) :

$$L(I_+) = \cap \{ L(k_{R-P}), P \text{ in } X_+(I) \}$$

---

bewijs

Als P' in $X_+(I)$ zit,dan is $P' \notin L(I_+)$ en dus bestaat er een P in $gC(I_+)$ die P' omvat.Dan : $L(k_{R-P}) \subset L(k_{R-P'})$.
Als we nu kijken naar stelling (1.6) dan komt er :

$$L(I_+) = \cap \{ L(k_{R-P}) \ , \ P \text{ in } gC(I_+) \}$$
$$= \cap \{ L(k_{R-P'}) \ , \ P' \text{ in } X_+(I) \}$$

(2.4) Als R links-Noethers is dan geldt dat $X_+(I)$ quasi-kompakt is voor alle I. Volgende stelling kan op analoge wijze bewezen worden als stellingen (I.6.4) en (I.6.5), maar ook natuurlijk via methoden als in III :

stelling

Plaats voor elk gegradeerd ideaal I van R , $Q^g_{I+}(R)$ boven de open verzameling $X_+(I)$ dan definiëert dit een preschoof van gegradeerde ringen boven Proj(R) : $\underline{Q}^g(R)$

---

stelling

Als R een links-Noetherse gegradeerde ring is, dan is de preschoof $Q^g_-(R)$ gesepareerd .

(2.5) Door verschoven krijgen we natuurlijk een schoof van gegradeerde ringen die we noteren met : $LQ^g_-(R)$.

Op analoge wijze krijgen we natuurlijk voor elke M in R-gr een preschoof van gegradeerde modulen $Q^g_-(M)$ en de daarmee korresponderende schoof : $LQ^g_-(M)$.

Ook volgende stelling kan men analoog bewijzen als stelling (I.6.7) :

stelling

Als R een positief gegradeerde links Noetherse priemring is dan is $Q^g_-(R)$ al een schoof .

(2.6) Opluchting alom ! Nog 's een stelling met bewijs :

stelling

Zij P in Proj(R) dan hebben we :

1. $k_{R-P} = \sup\{ k_{I+}$, met P in $X_+(I)\}$
2. de staak van $LQ^g_-(R)$ in P is $Q^g_{R-P}(R)$

bewijs

1.) Als P in $X_+(I)$ zit, dan is $I_+ \not\subset P$ en dus $k_I \leqslant k_{R-P}$, voor elk gegradeerd ideaal I met P in $X_+(I)$. Omgekeerd, als J in $L(k_{R-P})$ zit dan bevat J een niet-nul gegradeerd ideaal I en dus $I_+ \not\subset P$, P in $X_+(I)$ en J in $L(k_I)$.

2.) De staak van $LQ^g_-(R)$ in P is bij definitie :

$$S = \varinjlim \{Q^g_I(R), P \text{ in } X_+(I)\}$$

Omdat R links-Noethers is, is $k_{R-P}(R)$ eindig voortgebracht en dus bestaat er een J in L(R-P) : $J.k_{R-P}(R) = 0$,en bijgevolg is $Q^g_J(R) \longrightarrow Q^g_{R-P}(R)$ een monomorfisme. Hieruit volgt dat de afbeeldingen $f_I : Q^g_I(R) \longrightarrow Q^g_{R-P}(R)$ monomorfismen worden voor voldoende kleine I. Daardoor krijgen we (wegens de universele eigenschap) een graadbehoudend monomorfisme : $f : S \longrightarrow Q^g_{R-P}(R)$.

Een element x in $(Q^g_{R-P}(R))_m$ kan gerepresenteerd worden door een gegradeerd morfisme van graad m , $m_x : I \longrightarrow R$, voor een I in $L(k_{R-P})$. Nou, deze m_x representeert natuurlijk ook een element y_I van $Q^g_I(R)$, en het beeld van y_I in S, zeg y, is natuurlijk van die aard om $f(y) = x$ te hebben. Maar dan is natuurlijk f een iso van graad 0. Klaar!

(2.7) Zij X een topologische ruimte, R een (pre) schoof van gegradeerde ringen boven X. Definiëer nu R_0 door : $R_0(U) = (R(U))_0$ voor alle U open in X , dan geldt :

<u>stelling</u>

R_0 is een deel (pre) schoof van R

<u>bewijs</u>

Zij $V \subset U$ opens in X en $R^U_V : R(U) \longrightarrow R(V)$ de restriktiemorfismen. Omdat R^U_V graadbehoudend is mapt het $R_0(U)$ in $R_0(V)$ Zij nu R een schoof. Omdat R_0 al een deelpreschoof van R is, is R_0 gesepareerd (S_1). Nu (S_2) nog : Zij U_i een open overdekking van U en f_i in $R_0(U_i)$ met goede kompatibiliteitsvoorwaarden. Deze f_i zijn natuurlijk ook in $R(U_i)$ en dan gebruiken we (S_2) van R om een f in R(U) te vinden met $R^U_i(f) = f_i$, omdat de R^U_i graadbehoudend zijn : f in $R_0(U)$.

(2.8) <u>definitie</u>

De schoof van ringen : $(LQ^g_-(R))_0$ boven Proj(R) noemen we de <u>struktuurschoof van Proj(R)</u>

Merk op dat voor alle P in Proj(R) : $\mathrm{Proj}_P = (Q^g_{R-P}(R))_0$ voor R positief-gegradeerd links-Noethers.

hoofdstuk vijf : STERREKUNDE

bij wijze van verontschuldiging (5)

Eindelijk nog es iets kreatiefs.De methode van homogenisatie en dehomogenisatie,die in kommutatieve algebraïsche meetkunde vooral gebruikt wordt om over te gaan van projektieve naar affiene variëteiten,werd door Fvo gebruikt om te bewijzen dat R[T] gegradeerd Zariski-centraal (resp. gegradeerd FBN) is als R Zariski-centraal (resp. FBN) is.De oorspronkelijke vraag was deze methode uit te breiden naar schoven teneinde mogelijk iets te kunnen afleiden over quasi-koherente schoven boven projektieve spectra.We hebben een zinvolle definitie kunnen geven voor (de)homogenisatie van een schoof en kunnen bewijzen dat schoven na versterren in schoven overgaan. Verrassend hierbij was dat we voor de dehomogenisatie voorwaarden (quasi-kompaktheid) moeten opleggen aan de topologische ruimte.Het belangrijkste resultaat,schooftheoretisch,is dat homogenisatie en dehomogenisatie kommuteren met verschoven.

Als men elementen en idealen kan versterren,dan leek het me waarschijnlijk dat men ook kernfunktoren kon homogeniseren en dehomogeniseren.Het grappige van de definitie is dat ze juist loopt in de andere richting dan men zou verwachten. Normaal zou men de filter van de gehomogeniseerde fuktor definiëren als de filter bestaande uit de gehomogeniseerde idealen uit de filter van de kernfunktor.Het jammerlijke (?) is dat dit geen goede filter definiëerd.

Maar wanneer we de goede definitie kiezen, dan kunnen we enkele aardige resultaten afleiden :
zo kunnen we de gelokaliseerden via op- en ondersterren met elkaar in verband brengen (resultaten die we daarna natuurlijk direkt schooftheoretisch kunnen veralgemenen) en verder krijgen we een bijektieve korrespondentie tussen kernfunktoren in R-mod en starre gegradeerde kernfunktoren in R[T]-gr die (T) bevatten.
Deze 1-1 korrespondentie is natuurlijk slechts bruikbaar als ze kernfunktoren die op natuurlijke wijze samenhangen met de ring (vb. goldie-kernfunktor, Lambek-kernfunktor , Lambek-Michler kernfunktoren, Murdoch-Van Oystaeyen kernfunktoren) in elkaar overvoert. Dit wordt nagegaan en men mag verwachten dat goede eigenschappen van deze kernfunktoren vaal bewaard blijven, dit werd bewezen voor Ore-voorwaarden.
Geometrisch bekeken levert de techniek ons weer de gezochte resultaten : een projektieve ruimte valt uiteen in een affien gedeelte en een projektief gedeelte "op oneindig" . Verder kunnen we bewijzen dat de Proj van polynoomringen een schema is.
De ster-techniek leent zich zeer goed om ongegradeerde voorwaarden op R over te hevelen tot gegradeerde voorwaarden op R[T]en via een andere techniek (bvb. interne homogenisatie) zou men dan kunnen trachten opnieuw de ongegradeerde voorwaarden op R[T] te krijgen.

<u>opmerking</u> : om te kunnen spreken over de gehomogeniseerde van een R-moduul M dient M natuurlijk een deelmoduul te zijn van een gegradeerd R-moduul N. Bij vele stellingen werd stilzwijgend aangenomen dat we in deze situatie verkeren !

V.1 : (DE)HOMOGENISATIE - RINGTHEORETISCH

(1.1) In deze paragraaf volgen we C.Nastasescu en F. Van Oystaeyen : "Graded and filtered rings and modules".

(1.2) Zij R een gegradeerde ring.We zullen nu van de polynoomring $R[T]$ eveneens een gegradeerde ring maken als volgt : $R[T]_n = \{ \sum_{i+j=n} r_i T^j \ , \ r_i \text{ in } R_i \}$.
Voor elk gegradeerd R-moduul M kunnen we natuurlijk op analoge wijze een polynoom-moduul $M[T]$ definiëren.

(1.3) Zij M in R-gr en x in M,we kunnen x ontbinden in homogene elementen zeg :

$$x = x_{-m} + \dots + x_o + \dots + x_n$$

dan kunnen we hiermede een homogeen element x^* van $M[T]$ associëren als volgt :

$$x^* = x_{-m}T^{m+n} + \dots + x_oT^n + \dots + x_n$$

x^* noemen we de <u>gehomogeniseerde</u> van x .

(1.4) Omgekeerd nu . Zij u een homogeen element van $M[T]$

$$u = u_{-k}T^{k+j} + \dots + u_oT^j + \dots + u_j$$

dan kunnen we hiermede een element van M associëren :

$$u_* = u_{-k} + \dots + u_o + \dots + u_j$$

u_* noemen we de <u>gedehomogeniseerde</u> van u

(1.5) Volgende zaken zijn eenvoudig na te gaan :

1. als f in $h(R[T])$ en u in $h(M[T])$ is,dan : $(fu)_* = f_*u_*$
2. als u,v in $h(M[T])$ van zelfde graad,dan: $(u+v)_* = u_* + v_*$
3. voor alle x in M geldt :$(x^*)_* = x$
4. als u in $h(M[T])$ is dan is $(u_*)^*T^k = u$ met $k=\deg u - \deg u_*^*$

(1.6) Noteer met d(r) resp d(m) voor r in R resp m in M de hoogste graad die in een homogene ontbinding van r resp m voorkomt,dan is hetvolgende duidelijk :

1. $r^*m^* = T^k(rm)^*$ met $k = d(r) + d(m) - d(rm)$

2. zij x en y in M met $d(x) > d(y)$, dan: $T^k(x+y)^* = x^* + T^l y^*$ met $l = d(x) - d(y)$ en $k = \max(d(x), d(y) - d(x+y))$

(1.7) Als nu N een R-deelmoduul is van M dan noteren we met N^* het deelmoduul van $M[T]$ voortgebracht door de n^*. Het is duidelijk dat N^* een gegradeerd deelmoduul is van $M[T]$. Verder is iedere x uit N^* van de vorm $T^k n^*$ met n in N.

(1.8) Wederom omgekeerd nu : met een gegradeerd $R[T]$- deelmoduul L van $M[T]$ kunnen we $L_* = \{u_* : u \text{ in } h(L)\}$ associëren en uit de bovenvermelde eigenschappen volgt onmiddellijk dat L_* een R-deelmoduul is van M .

(1.9) <u>stelling</u>

De korrespondentie $N \to N^*$ voldoet aan :

1. $(N^*)_* = N$
2. Als $L \subsetneq N$, dan $L^* \subsetneq N^*$
3. Als N een gegradeerd deelmoduul is dan : $N^* = N[T]$
4. I een links R-ideaal, dan : $(IN)^* = I^*N^*$
5. x in M, dan $(N:x)^* = (N^* : x^*)$
6. $(\cap N_i)^* = \cap N_i^*$

<u>bewijs</u> : eenvoudig gereken !

(1.10) <u>stelling</u>

De korrespondentie $L \to L_*$ voldoet aan :

1. $(L_*)^* \supset L$
2. Als $L \subset L'$ dan ook $L_* \subset L'_*$
3. $(\cap L_i)_* = \cap (L_i)_*$
4. J een gegradeerd links-ideaal van $R[T]$, $(JL)_* = J_* L_*$
5. u in $h(M[T])$ dan : $(L:u)_* = (L_* : u_*)$
6. $(\sum L_i)_* = \sum (L_i)_*$

<u>bewijs</u> : wederom geduldig rekenen !

(1.11) Uit vorige stelling volgt dat we een funktor hebben :

$$(-)_* : R[T]\text{-gr} \longrightarrow R\text{-mod}$$

zodat : $M_* = R[T]/(T-1) \otimes_{R[T]} M = M/(T-1)M$

(1.12) <u>stelling</u>

<u>$(-)_*$ is een exacte funktor</u>

<u>bewijs</u>

Rechts-exactheid volgt onmiddellijk uit het tensorprodukt. Zij nu M in $R[T]$-gr en laat M' een gegradeerd deelmoduul zijn van M. Om links-exactheid te bewijzen zal het volstaan om aan te tonen dat $M' \cap (T-1)M = (T-1)M'$. Neem een x uit $M' \cap (T-1)M$, dan is x van de vorm $(T-1)m$ met m in M. Splits nu m in homogene komponenten :

$$m = m_{-t} + \ldots + m_o + \ldots + m_s$$

en dus is $x = (T-1)m$ gelijk aan

$$-m_{-t} + Tm_{-t} - m_{-t+1} + Tm_{-t+1} - \ldots - m_s + Tm_s$$

omdat M' gegradeerd is geldt dus m_{-t} in M' en dus ook m_{-t+1} en zo voort tot we m in M' krijgen, bijgevolg x in $(T-1)M'$.

V.2 : (DE)-HOMOGENISATIE - SCHOOFTHEORETISCH

(2.1) In deze paragraaf zal X steeds een topologische ruimte zijn en O_X een (pre)schoof van gegradeerde ringen boven X.

(2.2) We kunnen nu boven elke U, open in X, $O_X^*(U) = (O_X(U))^*$ plaatsen. We willen nu natuurlijk dat O_X^* opnieuw een (pre)-schoof van gegradeerde ringen is boven X. Daarvoor zal het volstaan goede restriktiemorfismen te definiëren.
Neem $V \subset U$,opens in X. En neem x in $h((O_X(U))^*)$,dan is x vd. vorm : $x = T^{m+n}x_{-m} + \ldots + T^n x_o + \ldots + x_n$.
$(O_X^*)_U^V$ definiëren we nu natuurlijk als volgt :

$(O_X^*)_V^U(x) = T^{m+n}(O_X)_V^U(x_{-m}) + \dots + (O_X)_V^U(x_n)$

Omdat $(O_X)_V^U$ ringmorfisme is en graadbehoudend geldt hetzelfde ook voor $(O_X^*)_V^U$,en dus zijn we klaar.

(2.3) Zij nu M in gp(X,O_X) en N een deel-preschoof van M (dus niet noodzakelijk gegradeerd!) dan kunnen we wederom N^* definiëren door $N^*(U) = (N(U))^*$ (à la 1.7).

(2.4) <u>stelling</u>

N^* is in gp(X,O_X^*)

<u>bewijs</u>

Uit de definitie en paragraaf 1 volgt onmiddellijk dat voor alle U,open in X, geldt : $N^*(U)$ in $O_X^*(U)$-gr . Het zal dus volstaan goede restriktiemorfismen te definiëren : Omdat $N^*(U)$ voortgebracht wordt door de n^* met n in N(U) zal het volstaan het restriktiemorfisme te definiëren op zo'n n^* : $n^* = T^{m+p}n_{-m} + \dots + T^p n_o + \dots + n_p$. Nu zijn de n_i's echter niet steeds in N(U) maar wel in M(U),dus:

$(N^*)_V^U(n^*) = T^{m+p}M_V^U(n_{-m}) + \dots + T^p M_V^U(n_o) + \dots + M_V^U(n_p)$

Men gaat gemakkelijk na dat $(N^*)_V^U$ graadbehoudend is en semilineair tov skalaire vermenigvuldiging (eenvoudigweg omdat N_V^U dat is).klaar!

(2.5) Het probleem of schoven na opsterren in schoven overgaan in het onderwerp van volgende

<u>stelling</u>

N in s(X,O_X) dan is N^* in gs(X,O_X^*)

<u>bewijs</u>

(S_1) : Neem een open overdekking U_l van U. Zij n^* in $h(N^*(U))$ met $n = n_{-m} + \dots + n_o + \dots + n_p$ in N(U) en bijgevolg $n^* = T^{m+p}n_{-m} + \dots + T^p n_o + \dots + n_p$. Stel nu dat voor alle l geldt : $(N^*)_{Ul}^U(n^*) = 0$ dan komt er voor alle l :

$$T^{m+p}(M_{Ul}^U)(n_{-m}) + \dots + M_{Ul}^U(n_p) = 0$$

voor alle l geldt :

$0 = (N^*)^U_{Ul}(n^*) = (M^*)^U_{Ul}(n^*) = (M^U_{Ul}(n))^* = (N^U_{Ul}(n))^*$

en dus geldt voor alle l (omdat $(x^*)_* = x$) :

$(N^U_{Ul}(n)) = 0$ en dan gebruiken we de schoofeigenschap van N om te besluiten dan $n = 0$ en dus ook $n^* = 0$. Klaar!

(S_2) : Zij n_l' in $h(N^*(U_l))$ met goede compatibiliteitsvwn. Uit (1.7) volgt dat iedere n_l' van de vorm $T^k n_l^*$ is met n_l in $N(U_l)$. Voor alle l en k geldt dus :

$$T^u(M^l_{lk}(n_l))^* = M^{*\,l}_{\ lk}(T^u n_l^*) = M^{*\,k}_{\ lk}(T^v n_k^*) = T^v(M^k_{lk}(n_k))^*$$

beide uiterste leden dehomogeniseren levert voor alle l,k

$$M^l_{lk}(n_l) = M^k_{kl}(n_k)$$

We gebruiken nu de schoofeigenschap van N om een n in $N(U)$ te vinden zodat voor alle l geldt $N^U_{Ul}(n) = n_l$.
Uit bovenstaande gelijkheden volgt dat de exponent van T gelijk is voor alle l ,zeg u .Neem dan tenslotte $T^u n^*$ en dan zijn we klaar !

(2.6) Nu willen we natuurlijk nog kunnen dehomogeniseren. Zij dus M in $gp(X, O_X^*)$, dan kunnen we boven elk open deel

$$M_*(U) = M(U)_* \quad \text{plaatsen.}$$

(2.7) <u>stelling</u>

<u>M_* is in $p(X, O_X)$</u>

<u>bewijs</u>

Het volstaat geschikte restriktiemorfismen te definiëren. Neem x in $M_*(U)$, dan bestaat er een y in $h(M(U))$ met $y_* = x$. Men kan moeilijk iets anders bedenken dan :

$$(M_*)^U_V(x) = (M^U_V(y))_*$$

Rest ons natuurlijk nog te bewijzen dat dit onafhankelijk is van de keuze van y. Zij dus $y_* = y'_* = x$, dan bestaan er k en l zodat $y = T^k x^*$ en $y' = T^l x^*$. Stel nu k groter dan l

dan is $T^{k-l}y' = y$ en bijgevolg : $T^{l-k}M_V^U(y') = M_V^U(y)$ en tenslotte dus :$(M_V^U(y'))_* = (M_V^U(y))_*$. Klaar!

(2.8) Het probleem of schoven na ondersterren in schoven overgaan is het probleem van volgende stelling.Merk op dat men hiervoor eisen moet opleggen op de topologische ruimte!

stelling

X een kompakte ruimte ,
M in $gs(X,O_X^*)$ dan M_* in $s(X,O_X)$

bewijs

(S_1) : (hiervoor is kompaktheid niet noodzakelijk !).Zij U_l een open overdekking van U, en x in $M_*(U)$: $(M_*)_l^U(x)=0$. We weten dat er een y in h(M(U)) is met : $y_* = x$. Verder:

$$0 = (M_*)_l^U(x) = (M_l^U(y))_*$$

en dus voor alle l : $M_l^U(y) = 0$. Dan gebruiken we de schoof-eigenschap van M om te besluiten y = 0 en dus x = 0 .

(S_2) : wegens kompaktheid mogen we ons dus beperken tot een eindige overdekking U_i met i = 1,2,...,n .Neem nu x_i in $M_*(U_i)$ met :

$$(M_*)^i_{ij}(x_i) = (M_*)^j_{ij}(x_j) \quad , \text{ voor alle i en j}$$

Er bestaan dus y_i in $h(M(U_i))$ met$(y_i)_* = x_i$ .Noteer nu d_i voor $deg(y_i)$ en m voor het maximum der d_i. Vervang nu y_i door $y_i' = T^{n-d_i}(y_i)$, dan geldt nog steeds $y'_{i,*} = x_i$.

$$(M^i_{ij}(y_i'))_* = (M_*)^i_{ij}(x_i) = (M_*)^j_{ij}(x_j) = (M^j_{ij}(y_j'))_*$$

en omdat $deg(M^i_{ij}(y_i')) = deg(M^j_{ij}(y_j'))$ geldt voor alle i,j :

$$M^i_{ij}(y_i') = M^j_{ij}(y_j')$$

en dan gebruiken we de schoofeigenschap om een y in h(M(U)) te vinden en y_* is dan het gezochte element in $M_*(U)$.

(2.9) EEn ander interessant probleem in dit verband is : kommuteert $(-)_*$,resp. $(-)^*$, met de verschovingsfunktor . We zullen op dit probleem later terugkomen.

V.3 : HOMOGENISATIE VAN KERNFUNKTOREN

(3.1) We willen in deze paragraaf kernfunktoren in R-ker opkrikken tot gegradeerde starre kernfunktoren in $R[T]$-gr. Zij k in R-ker met filter $L(k)$. Laat nu k^* bepaald zijn door volgende filter v gegradeerde links $R[T]$-idealen:

$$L(k^*) = \{I \text{ gegradeerd links } R[T]\text{-ideaal}: I_* \text{ in } L(k)\}$$

Merk op dat (T) steeds in $L(k^*)$ zit, want $(T)_* = R$.

(3.2) <u>stelling</u>

k^* is een starre kernfunktor in $R[T]$-gr

<u>bewijs</u>

Uit stelling (III.3.3) is het voldoende te bewijzen dat $L(k^*)$ een gegradeerde filter is:

(F_1) : $I \subset J$, gegradeerde links $R[T]$-idealen en I in $L(k^*)$, dan is I_* in $L(k)$ en omdat $I_* \subset J_*$ dus ook J_* .ok!

(F_2) : I en J in $L(k^*)$ dan is $I_* \cap J_* = (I \cap J)_*$ in $L(k)$.ok!

(F_3) : I in $L(k^*)$ en x in $h(R[T])$ dan is $(I:x)_* = (I_*:x_*)$ in $L(k)$ en dus $(I:x)$ in $L(k^*)$.ok!

(F_4) : I in $L(k^*)$ en $(J:x)$ in $L(k^*)$ voor alle x in $h(I)$ dan is $(J_*:x_*) = (J:x)_*$ in $L(k)$ voor alle x_* in I_* in $L(k)$ dus J_* in $L(k)$ en dus J in $L(k^*)$. ok!

(3.3) <u>stelling</u>

voor alle M in $R[T]$-gr :
$k^*(M)_* = k(M_*)$

<u>bewijs</u>

Neem x in $(k^*(M))_*$ dan bestaat er een y in $h(k^*(M))$: $y_* = x$. Bij die y bestaat er een I in $L(k^*)$: $Iy = 0$ en dus ook $I_*x = 0$, I_* is in $L(k)$ dus x in $k(M_*)$.

Omgekeerd nu , neem x in $k(M_*)$ dan is er een I in $L(k)$: $Ix = 0$ en dus ook $I^*x^* = 0$, verder is x in M_* dus bestaat er een y in $h(M)$: $y_* = x$ en dus is $y = x^*T^k$, bijgevolg is ook $I^*y = 0$, I^* in $L(k^*)$ dus y in $k^*(M)$ en tenslotte is dus x in $(k^*(M))_*$

(3.4) Het is duidelijk dat het voorgaande slechts inleidende gevechten waren met als bekroning de volgende

<u>stelling</u>

Voor alle M in $R[T]$-gr geldt :

$Q_k(M_*) = (Q_k^{g*}(M))_*$

<u>bewijs</u>

We mogen ons natuurlijk beperken tot die M in $R[T]$-gr : M is k^*-torsievrij . Uit de vorige stelling volgt dan onmiddellijk dat M_* k-torsievrij is .

We hebben de volgende exacte rij in $R[T]$-gr (cfr. FVO) :

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow Q_k^{g*}(M) \longrightarrow k^*(E^g(M)/M) \longrightarrow 0$$

Omdat de funktor $(-)_*$ exact is (1.12) en rekening houdend met de vorige stelling komt er volgend exact diagram in R-mod :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M_* & \longrightarrow & (Q_k^{g*}(M))_* & \longrightarrow & k((E^g(M)/M)_*) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & & & & & \\ & & Q_k(M_*) & & & & & & \end{array}$$

Bijgevolg krijgen we een inklusie :

$$(Q_k^{g*}(M))_* \hookrightarrow Q_k(M_*)$$

Omgekeerd nu , neem x in $Q_k(M_*)$ dan bestaat er een I in L(k) zodat $Ix \subset M_*$ en bijgevolg ook I^*x^* in $(M_*)^*$.Nu krijgen we een trukje à la Fred Van Oystaeyen :

Beschouw voor alle i in $h(I^*)$ hetvolgende :

$$((M:x^*):i) = \{r \text{ in } R[T]: ri \text{ in } (M:x^*)\}$$
$$= \{r \text{ in } R[T]: rix^* \text{ in } M\}$$

We weten nu uit het voorgaande dat ix^* in $(M_*)^*$ zit,dus bestaat er een k : $T^k ix^*$ in M en bijgevolg ook :

$(T^k)ix^* \subset M$, dus $(T^k) \subset ((M:x^*):i)$ en omdat (T^k) in $L(k^*)$ zit geldt dit ook voor $((M:x^*):i)$ voor alle i in $h(I^*)$, en omdat natuurlijk I^* ook in $L(k^*)$ zit geldt tenslotte $(M:x^*)$ in $L(k^*)$ of maw. x^* is in $Q_{k^*}(M)$.

$(Q_k(M_*))^*$ is gegradeerd en een deelmoduul van $Q_{k^*}(M)$,dus is $(Q_k(M_*))^*$ een gegradeerd deelmoduul van $Q^g_{k^*}(M)$ en dus tenslotte $Q_k(M_*) \subset (Q^g_{k^*}(M))_*$.Klaar!

(3.5) <u>gevolg</u>

Voor alle M in R-mod geldt :
$Q_k(M) = (Q^g_{k^*}(M^*))_*$

<u>bewijs</u>
Kletskoek!

V.4 : DEHOMOGENISATIE VAN KERNFUNKTOREN

(4.1) Nu willen we starre gegradeerde kernfunktoren in $R[T]$-gr omlaaghalen tot een kernfunktor in R-mod. Zij k dus in $R[T]$-sker ,bepaald door de filter $L(k)$,dan kunnen we een k_* in R-ker door volgende filter vastleggen:

$$L(k_*) = \{ I \text{ links ideaal van } R : I^* \text{ in } L(k) \}$$

(4.2) <u>stelling</u>

k_* is een kernfunktor in R-mod

<u>bewijs</u>
Het zal wederom volstaan de filtereigenschappen na te gaan:

(T_1) : $I \subset J$ links R-idealen en I in $L(k_*)$,dan is $I^* \subset J^*$ en J dus ook in $L(k_*)$

(T_2) : I en J in $L(k_*)$ dan is ook $(I \cap J)^* = I^* \cap J^*$ in $L(k)$ en bijgevolg $I \cap J$ in $L(k_*)$

(T_3) : I in $L(k_*)$ en x in R dan $(I:x)^* = (I^*:x^*)$ in $L(k)$.

(T_4) : Zij $(I:x)$ in $L(k_*)$ voor alle x in J in $L(k_*)$ dan is $(I^*:x^*)$ in $L(k)$ voor alle x^* in $h(J^*)$,dus I^* in $L(k)$.

(4.3) triviaaltje

Voor alle k in R-ker : $(k^*)_* = k$

bewijs

I is in $L((k^*)_*)$ desda I^* in $L(k^*)$ is
desda $I = (I^*)_*$ in $L(k)$ is.

(4.4) stelling

Voor alle M in $R[T]$-gr geldt :
$(k(M))_* = k_*(M_*)$

bewijs

Zij x in $(k(M))_*$, dan bestaat er een y in $h(k(M))$ zodat $y_* = x$ .Dus bestaat er een I in $L(k)$ met $Iy = 0$ en dus ook $I_*x = 0$ .Tenslotte is I_* in $L(k_*)$ want $I \subset (I_*)^*$.

Omgekeerd nu, x in $k_*(M_*)$ dan bestaat er een I in $L(k_*)$: $Ix = 0$ en verder een y in $h(M)$: $y_* = x$ .Bijgevolg : $I^*x^*=0$ en dus ook $I^*x^*T^k = 0$ en dus $I^*y = 0$. y is dus in $k(M)$ en x dus in $(k(M))_*$. Klaar!

(4.5) stelling

Als (T^k) in $L(k)$ is(voor alle k)dan :
$Q^g_k(M) = (Q_{k^*}(M_*))^*$

bewijs

We mogen ons beperken tot M die k-torsievrij zijn.Wegens voorgaande stelling is M_* dan k_*-torsievrij .
We hebben de exacte rij in $R[T]$-gr :

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow Q^g_k(M) \longrightarrow k(E^g(M)/M) \longrightarrow 0$$

exactheid van de funktor $(-)_*$ en vorige stelling levert:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & M_* & \longrightarrow & (Q^g_k(M))_* & \longrightarrow & k_*((E^g(m)/M)_*) & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow & & & & & \\ & Q_{k_*}(M_*) & & & & & \end{array}$$

en dus : $Q^g_k(M) \subset ((Q^g_k(M))_*)^* \subset (Q_{k_*}(M_*))^*$

Omgekeerd nu, zij x in $Q_{k_*}(M_*)$ dan bestaat er een I in $L(k_*)$ zodat $Ix \subset M_*$, en dus $I^* x^* \subset (M_*)^*$. Nu passen we weer de FVO-truuk van bewijs (3.4) toe (en dit kan want (T^k) is in $L(k)$) om te kunnen besluiten dat $(M:x^*)$ in $L(k)$ zit en bijgevolg : $(Q_{k_*}(M_*))^* \subset Q^g_k(M)$.

Merk op dat we uit deze stelling natuurlijk opnieuw stelling (3.4) kunnen afleiden.

(4.6) <u>minder triviaaltje</u>

Zij k in $R[T]$-sker : (T^l) in $L(k)$ (voor alle l)
dan : $(k_*)^* = k$

<u>bewijs</u>

I in $L((k_*)^*)$ desda I_* in $L(k^*)$
desda $(I_*)^*$ in $L(k)$

Om het bewijs af te maken moeten we nu nog I in $L(k)$ praten als $(I_*)^*$ in $L(k)$ zit . Neem i in $h((I_*)^*)$ dan :

$$(I:i) = \{r \text{ in } R[T]: ri \text{ in } I\}$$

nu weten we dat er een l bestaat zodat $T^l i$ in I zit , en dus is $(T^l) \subset (I:i)$ en omdat (T^l) in $L(k)$ zit geldt dit ook voor $(I:i)$.Dit voor alle i in $h((I_*)^*)$ met $(I_*)^*$ in $L(k)$ dus ook I . Klaar!

(4.7) <u>stelling</u>

Er bestaat een 1-1 korrespondentie tussen kernfunktoren in R-mod en starre gegradeerde kernfunktoren in $R[T]$-gr met (T^l) in de filter (voor alle l).

<u>bewijs</u>

Dit volgt triviaal uit stellingen (4.3) en (4.6) en de opmerking in (3.1) .Klaar !

V.5 : HOMOGENISATIE VAN KERNFUNKTOREN - SCHOOFTHEORETISCH

(5.1) Zij X een topologische ruimte en R een slappe preschoof van gegradeerde ringen. We willen nu aan elke K in p(R)-Lker een K^* in pg(R^*)-Lker toevoegen. Eerst een

lemma

---

equivalent zijn :

1. R slappe preschoof van gegradeerde ringen
2. R^* slappe preschoof van gegradeerde ringen

---

bewijs

1. impliceert 2. : Zij u in h(R^*(U)) dan bestaan er u_i in R(U) zodat :

$$u = T^{m+n}u_{-m} + \dots + T^n u_0 + \dots + u_n$$

elk van deze u_i is wegens slapheid van R uit te breiden tot een globale sektie v_i in R(X). Neem nu voor v :

$$v = T^{m+n}v_{-m} + \dots + T^n v_0 + \dots + v_n$$

in R^*(X). Natuurlijk geldt nu $(R^*)^X_U(v) = u$. Klaar!

2. impliceert 1. : Neem een x in R(U) , x^* in h(R(U)) is uit te breiden tot een globale sektie y in R^*(X). Neem nu y_* in R(X). Er geldt natuurlijk $R^X_U(y_*) = x$.

(5.2) Zij nu K in p(R)-Lker . Voor elke U open in X hebben we dan een K(U) in R(U)-ker. Hiermee kunnen we à la 3 een K*(U) in R^*(U)-sker associëren. We willen nu zo bitter graag dat K^* in gp(R)-Lker zit. Dit is het onderwerp van volgende stelling:

(5.3) stelling

K in p(R)-Lker dan is K^* in pg(R^*)-Lker

---

bewijs

(L_1) : Zij M_U in R^*(U)-gr en M_V in R^*(V)-gr en zij

V.6 : DEHOMOGENISATIE VAN KERNFUNKTOREN - SCHOOFTH.

(6.1) Zij K in gp(R^*)-Lker , voor elke U open in X hebben we een K(U) in R^*(U)-sker.Volgens V.4 kunnen we hiermee een $K_*(U)$ in R(U)-ker associëren.

(6.2) <u>stelling</u>

K in gp(R^*)-Lker dan is K_* in p(R)-Lker

<u>bewijs</u>

(L_1) : Zij M_U in R(U)-mod en M_V in R(V)-mod en verder $f : M_U \longrightarrow M_V$ een semilineaire afbeelding tov. R_V^U .We moeten nu bewijzen dat $f(K_*(U)M_U) \subset K_*(V)M_V$.

Neem een x in $K_*(U)M_U$, dan bestaat er een I in $L(K_*)$: $I.x = 0$ en dus $f(I.x) = 0$ en tenslotte $R_V^U(I).x = 0$. Als we er nu in slagen $R_V^U(I)$ in $L(K_*(V))$ te praten dan zijn we klaar.Men gaat gemakkelijk na dat :

$$(R_V^U(I))^* = (R^*)_V^U(I^*)$$

We weten dat I^* in K(U) zit en wegens het lokaal zijn van K zit dus $(R^*)_V^U(I^*)$ in K(V) en dus zijn we klaar!

(L_2) : is wederom triviaal !

(6.3) <u>stelling</u>

K in pg(R^*)-Lker reduceert R^*,dan reduceert K_* , R

<u>bewijs</u>

Zij x in Ker(R_V^U) , dan is x^* in Ker$(R^*)_V^U$ en omdat K, R^* reduceert is x^* dus ook in $K(U)(R^*(U))$, en dan passen we tenslotte stelling (4.4) toe om te besluiten dat x in $K_*(U)(R(U))$ zit. Klaar !

(6.4) <u>stelling</u>

equivalent zijn : 1. K in p(R)-Lker
2. K^* in gp(R)-Lker

$f : M_U \longrightarrow M_{V_U}$ een graadbehoudende semilineaire afbeelding tov $(R^*)^U_V$. We moeten nu bewijzen dat $f(K^*(U)M_U)$ in $K^*(V)M_V$ zit .

Neem een x in $h(M_U)$: x zit in $K^*(U)(M_U)$, dan bestaat er een I in $L(K^*(U))$: $I.x = 0$ en dus ook $f(I.x) = 0$, wegens semilineariteit krijgen we dus eveneens $((R^*)^U_V(I)).f(x) = 0$. Rest ons dus nog te bewijzen dat $(R^*)^U_V(I)$ in $L(K^*(V))$ zit. Men gaat gemakkelijk na dat :

$$((R^*)^U_V(I))_* = R^U_V(I_*)$$

I_* is in $L(K(U))$ en dan is wegens het lokaal zijn van K $R^U_V(I_*)$ in $L(K(V))$ en dus zijn we klaar.

(L_2) : Rekening houdend met het voorgaande volstaat het te bewijzen dat voor alle M_U en M'_U in $R^*(U)$-gr en voor alle f in $\mathrm{Hom}_{R^*(U)\text{-gr}}(M_U, M'_U)$ dat $f(K^*(U)M_U)$ $K^*(U)M'_U$, maar dit is natuurlijk triviaal !

(5.4) <u>triviaaltje</u>

M in R-mod,k in R-ker dan : $(k(M))^* = k^*(M^*)$

<u>bewijs</u>

x in k(M) dan bestaat er een I in L(k) : $I.x = 0$ dus ook $I^*.x^* = 0$ en dus x^* in $k^*(M^*)$.

omgekeerd, x^* in $k^*(M^*)$ dan bestaat er een I in $L(k^*)$: $I.x^* = 0$ en dus ook $I_*.x = 0$ en dus x in k(M).

(5.5) <u>stelling</u>

K in p(R)-Lker reduceert R,dan reduceert K^*,R^*

<u>bewijs</u>

Zij x in $R^*(U)$: $x = T^{m+n}x_{-m} + \dots + T^n x_0 + \dots + x_{n_U}$
Stel $R^{*U}_V(x) = 0$ dan geldt voor alle i : x_i in $\mathrm{Ker}(R)^U_V$

x is dus in $(\mathrm{Ker}\ R^U_V)^* \subset (K(U)R(U))^* = K^*(U)R^*(U)$.Klaar!

bewijs

Volgt onmiddellijk uit stellingen (5.3),(6.2) en (4.3)

(6.5) stelling

Zij K in gp(R^*)-Lker zodat voor alle U open in X: (T^1) in L(K(U)) voor alle 1 dan zijn equivalent :

1. K in gp(R^*)-Lker
2. K_* in p(R)-Lker

bewijs

Volgt onmiddellijk uit stellingen (5.3),(6.2) en (4.6)

V.7 : LOKALISEREN - SCHOOFTHEORETISCH

(7.1) stelling

K in p(R)-Lker ; M in gp(R^*),dan

$$Q_K(M_*) = (Q^g_{K^*}(M))_*$$

bewijs

Volgt uit de stellingen (3.4) en (III.7.5) ,alhoewel we nog wel effe in de voorwaarden moeten bijvoegen dat K R reduceert en verder stelling (5.5)

(7.2) stelling

Zij K in gp(R^*)-Lker en reduceert R^* zodat voor alle U open in X : (T^1) in L(K(U)) voor alle 1,M in gp(R^*)

$$Q^g_K(M) = (Q_{K_*}(M_*))^*$$

bewijs

Volgt uit de stellingen (4.5) en (III.7.5) en (5.5)

V.8 : STERREN KOMMUTEREN MET VERSCHOVEN

(8.1) Zoals beloofd in (2.9) zullen we in deze paragraaf bewijzen dat de funktoren $(-)_*$ en $(-)^*$ kommuteren met verschoven, gebruikmakend van de stellingen (2.5) en (2.8).

(8.2) stelling

Voor alle punten p in X, voor alle M in $p(X,O_X)$:

$$S_p(M^*) = (S_p(M))^*$$

bewijs

Zij x in $h(S_p(M^*))$, dan kunnen we een U open in X vinden die p bevat en een y in $h(M^*(U))$ die x representeert. Zij $y = y_{-m}T^{m+n} + \dots + y_0T^n + \dots + y_n$, met alle y_i in $M(U)$. We kunnen nu volgende afbeelding beschouwen :

$$\begin{aligned} f : (S_p(M^*))_n &\longrightarrow ((S_p(M))^*)_n \\ x &\longmapsfrom M_p^U(y_{-m})T^{m+n}+\dots+M_p^U(y_0)T^n+\dots+M_p^U(y_n) \end{aligned}$$

We moeten nu eerst aantonen dat deze definitie niet afhangt van de bijzondere keuze der U of y :

Zij dus $y' = y'_{-r}T^{r+n} + \dots + y'_0T^n + \dots + y'_n$ in $h(M(V))$ een element dat eveneens x representeert. Dan bestaat er een omgeving W van p in $U \cap V$ zodat $M^{*U}_W(y) = M^{*V}_W(y')$.

Dit wil zeggen dat :

$$M_W^U(y_{-m})T^{m+n} + \dots + M_W^U(y_0)T^n + \dots + M_W^U(y_n) =$$
$$M_W^V(y'_{-r})T^{r+n} + \dots + M_W^V(y'_0)T^n + \dots + M_W^V(y'_n)$$

en we mogen bijgevolg onderstellen : m = r en voor alle i : $M_W^U(y_i) = M_W^V(y'_i)$ en dus geldt :

$$M_p^U(y_{-m})T^{m+n} + \dots + M_p^U(y_0)T^n + \dots + M_p^U(y_n) =$$
$$M_p^W(M_W^U(y_{-m})T^{m+n} + \dots + M_p^W(M_W^U(y_n)) =$$
$$M_p^W(M_W^V(y'_{-m})T^{m+n} + \dots + M_p^W(M_W^V(y'_n)) =$$
$$M_p^V(y'_{-m})T^{m+n} + \dots + M_p^V(y'_0)T^n + \dots + M_p^V(y'_n) .$$

Verder definiëert f een isomorfisme, want :

1°) f is injektief
stel dat $f(x) = 0$, dan : $M_p^U(y_i) = 0$ en dus representeren alle y_i in de homogene ontbinding van y nul en dus bestaat er een open omgeving W van p : $M_W^U(y_i) = 0$ voor alle i.En omdat de definitie niet afhing vd keuze : $x = 0$.

2°) f is surjektief
neem namelijk een y in $(S_p(M))_n^*$ dan is y van de vorm :

$$y = y_{-m}T^{m+n} + \ldots + y_0T^n + \ldots + y_n$$

met alle y_i in $S_p(M)$.Voor alle i kunnen we nu een open omgeving van p U_i vinden en een x_i in $M(U_i)$ die y_i representeren.Neem nu U de doorsnede der U_i en beschouw x :

$$x = M_U^{-m}(x_{-m})T^{m+n} + \ldots + M_U^0(x_0)T^n + \ldots + M_U^n(x_n)$$

in $M^*(U)$, dan representeert x , y en dus klaar .

Merk op dat we in het bewijs M in $gp(X,O_X)$ ondersteld hebben,om het bewijs helemaal af te maken kunnen we nu een N deelpreschoof van M beschouwen en zelfde redenering opbouwen.

(8.3) stelling

$(-)^*$ kommuteert met de verschovingsfunktor

bewijs
Zij M in $p(X,O_X)$ en noteer de verschovingsfunktor met S(-). We hebben dan twee schoven (cfr.(2.5)) in $gs(X,O_X^*)$: $(S(M))^*$ en $S(M^*)$.De gevraagde kommutativiteit wil dus zeggen dat deze schoven isomorf zijn.Omdat beide reeds schoven zijn volstaat het gelijkheid van de staken na te gaan :
Voor een p in X hebben we :

$S_p(S(M^*)) = S_p(M^*) = S_p(M)^*$ en anderzijds :
$S_p((S(M))^*) = (S_p(S(M)))^* = S_p(M)^*$ en dus zijn we klaar!

(8.4) Om de kommutativiteit van $(-)_*$ met S(-) zullen we weer topologische voorwaarden moeten opleggen,zoals stelling (2.8) al doet vermoeden.

(8.5) stelling

Voor alle punten p in X, voor alle M in $gp(X,O_X^*)$:

$$S_p(M_*) = (S_p(M))_*$$

bewijs

Zij x in $S_p(M_*)$ dan bestaat er een open omgeving U van p en een element y in $M_*(U)$ dat x representeert. Dus bestaat er ook een z in $h(M(U))$: $z_* = y$. Kijk nu naar :

$$\begin{aligned} f : S_p(M_*) &\longrightarrow (S_p(M))_* \\ x &\longmapsto (M_p^U(z))_* \end{aligned}$$

We moeten wederom eerst aantonen dat deze definitie onafhankelijk is van alle gemaakte keuzen. Zij dus V een andere open omgeving van p en y' (met korresponderende z') in $M_*(V)$ een element dat eveneens x representeert, dan bestaat er een open W in $U \cap V$ zodat $(M_*)_W^U(y) = (M_*)_W^V(y')$, en als we 's effe terugkijken naar (2.7) volgt hieruit :

$$(M_W^U(z))_* = (M_W^V(z'))_* \text{ en dus bestaat er een k zodat bv. }$$
$$M_W^U(z) = M_W^V(z')T^k$$

en tenslotte :

$$(M_p^U(z))_* = (M_p^W(M_W^U(z))_* = (M_p^W(M_p^V(z')T^k))_* =$$
$$(T^k M_p^V(z'))_* = (M_p^V(z'))_*$$

stel $f(x) = 0$ dan $M_p^U(z) = 0$ en dus representeert z en dus ook y nul dus : $x=0$ en de injektiviteit is bewezen.
neem een y in $(S_p(M))_*$, dan bestaat er een z in $h(S_p(M))$: $z_*= y$ en neem een representant van z , v in $h(M(U))$. neem dan voor $x =(M_*)_p^U(v_*)$ en ga na dat $f(x) = y$. Klaar!

(8.6) stelling

Zij X kompakt dan kommuteert $(-)_*$ met $S(-)$

bewijs

Uit (2.8) volgt dat zowel $(S(M))_*$ als $S(M_*)$ schoven zijn en:
$S_p((S(M))_*) = (S_p(S(M)))_* = (S_p(M))_* = S_p(M_*) = S_p(S(M_*))$.

9 : ALL IS WELL THAT ENDS WELL

Onder deze jezufet-achtige titel trachten we enkele,vooral ringtheoretische toepassingen te geven van deze sterrekunde. F. Van Oystaeyen heeft ze gebruikt om eigenschappen als FBN en Zariski-centraal van R over te dragen in gegradeerd FBN en gegradeerd Zariski-centraal van R[T].
Omdat we in deze thesis kernfunktoren hebben leren versterren,was het voor mij van belang na te gaan of deze definitie zinvol was,i.e. of kernkunktoren die op "natuurlijke" wijze gedefiniëerd worden (vb. goldies-kernfunktor,Lambek-Michler,Murdoch-Van Oystaeyen) door boven- en ondersterren in elkaar worden overgedragen.
Geometrisch gezien is natuurlijk §5 van belang,hierin wordt aangetoond dat onze sterrekunde het mogelijk maakt projektieve problemen te vertalen in affiene,in zoverre onze problemen beantwoord kunnen worden door te kijken naar de staken van de schoven.
Er wachten echter nog heel wat problemen op een oplossing, zoals bvb. gaan T-funktoren over in GT-funktoren,is Proj(R[T]) een schema als Proj(R) een schema is? kan versterren gebruikt worden om informatie over quasi-koherente schoven boven projektieve spectra te verkrijgen,als R Laskers is,is dan R[T] gegradeerd Laskers? enz. enz.
Tot een behoorlijk resultaat kwamen wel :

1. Goldies kernfunktor
2. Lambeks kernfunktor
3. Lambek-Michler kernfunktoren
4. Ore-voorwaarden
5. Affiene en Projektieve spectra
6. Primary Decomposition

De laatste paragraaf is een voorbeeld van het meta-mathematisch principepe : als iets kan bewezen worden voor de overgang $R \to R[X]$,met R triviaal gegradeerd,dan kan het door onze sterrekunde ook bewezen worden voor de overgang $R \to R[T]$ met R een willekeurige gradatie.

1. GOLDIES KERNFUNKTOR

(1.1) Zij R een gegradeerde ring en M in R-mod , we definiëren :

$$Z_R(M) = \{x \text{ in } M : \mathrm{Ann}_R(x) \text{ is essentiëel links id.}\}$$

(1.2) <u>stelling</u>

Als M in R-gr is,dan ook $Z_R(M)$

<u>bewijs</u>

Neem een $x \neq 0$ in $Z_R(M)$ en bekijk de homogene ontbinding : $x = x_{-m} + \ldots + x_0 + \ldots + x_n$. Zij $L = \mathrm{Ann}_R(x)$ en laat voor ieder links-ideaal J van R , J^h de verzameling zijn der y_j zodat er een y in J is met homogene ontbinding : $y = y_{-i} + \ldots + y_j$. Als J essentiëel is,dan geldt hetzelfde voor J^h vermits : $(J \cap I)^h \subset J^h \cap I^h$ en verder is $J^h = 0$ als en slechts als $J = 0$. Dit alles om te zeggen dat we nu natuurlijk naar L^h gaan kijken . L^h is essentiëel en $L^h \subset \mathrm{Ann}_R(x_n)$.Bijgevolg is x_n in $Z_R(M)$ en rekurentie maakt het bewijs nu af!

(1.3) <u>triviaaltje</u>

equivalent zijn :
1. I essentiëel gegradeerd links ideaal van R^*
2. I_* essentiëel links ideaal van R

<u>bewijs</u>

1. impliceert 2. : Zij J een links-ideaal van R zodat : $(I_* \cap J) = 0$, dan is $(I_*)^* \cap J^* = 0$ en omdat $I \subset (I_*)^*$ volgt hieruit dat $J^* = 0$ en dus ook $J = 0$.

2. impliceert 1. : zij J een gegradeerd links ideaal van R^* met $J \cap I = 0$ dan is $J_* \cap I_* = 0$ en dus $J_* = 0$, verder $(J_*)^* = 0$ waaruit tenslotte : $J = 0$. Klaar!

<u>gevolg</u>

I essentiëel links id. in R desda I^* essent. gegr. in R^*

(1.4) Volgende stellingen breiden LNM 758,II.12.2.2 uit.

stelling

M in R-mod , dan : $Z_{R^*}(M^*) = (Z_R(M))^*$

bewijs

Neem een x in $h((Z_R(M))^*)$,dan kunnen we x schrijven als :
$x = T^{m+n}x_{-m} + \ldots + T^n x_0 + \ldots + x_n$, met x_i in $Z_R(M)$.
$I = \mathrm{Ann}_R(x_{-m}) \cap \ldots \cap \mathrm{Ann}_R(x_n)$ is essentiëel links ideaal van R, dus wegens voorgaande stelling I^* essentiëel gegradeerd in R^* en verder $I^* \subset \mathrm{Ann}_{R^*}(x)$ want :

$$(I^*x)_* = I(x_{-m} + \ldots + x_0 + \ldots x_n) = 0$$

bijgevolg : $I^*x = 0$ en x dus in $Z_{R^*}(M^*)$.

Omgekeerd nu , zij x in $h(Z_{R^*}(M^*))$ dan is $\mathrm{Ann}_{R^*}(x)$ essentiëel in R^* en bijgevolg is $\mathrm{Ann}_R(x_*) \supset (\mathrm{Ann}_{R^*}(x))_*$ essentiëel in R. x_* zit dus in $Z_R(M)$, $(x_*)^*$ in $(Z_R(M))^*$ en dus ook $x = (x_*)^* T^k$.

(1.5) stelling

M in R^*-gr , dan : $(Z_{R^*}(M))_* = Z_R(M_*)$

bewijs

Zij x in $h(Z_{R^*}(M))$ dan is $\mathrm{Ann}_{R^*}(x)$ essentiëel gegradeerd links-ideaal van R^* en dus ook $\mathrm{Ann}_R(x_*)$ essentiëel links ideaal van R, dus x_* in $Z_R(M_*)$.

Omgekeerd, x in $h(M)$ zodat x_* in $Z_R(M_*)$ zit , so $\mathrm{Ann}_R(x_*)$ is ess. en dus ook $\mathrm{Ann}_{R^*}((x_*)^*)$ ess. en ook $\mathrm{Ann}_{R^*}(x)$. ok!

(1.6) Met de pre-radikalen $Z_R(-)$ resp. $Z_{R^*}(-)$ kunnen we radikalen en dus ook kernfunktoren associëren , resp. k_G en k_G^g op R-mod , resp. R^*-gr. k_G noemen we Goldies kernfunktor op R en k_G^g Goldies gegradeerde kernfunktor op R^*.Uit voorgaande stellingen kunnen we nu gemakkelijk hetvolgende afleiden :

(1.7) stelling

1. $(k_G)^* = k_G^g$
2. $(k_G^g)_* = k_G$

2. LAMBEKS (ON)GEGRADEERDE KERNFUNKTOR

(2.1) Zij R een gegradeerde ring. Lambek's kernfunktor k_L op R-mod is gegeven door de filter :

$L(k_L) = \{$ L links ideaal van R $:(L:a) \subset Ann_R b$, dan $b = 0\}$

Op $R[T]$-gr kunnen we nu Lambek's gegradeerde kernfunktor vastleggen door de gegradeerde filter :

$L(k_L^g) = \{$ L in $L_g(R[T])$: a,b in $h(R[T])$ en $(L:a) \subset Ann_{R[T]}(b)$ dan is $b = 0\}$

(2.2) stelling

1. $(k_L^g)_* = k_L$
2. $(k_L)^* = k_L^g$

bewijs

1. Zij I in $L(k_L)$ en stel dat er a,b in $h(R[T])$ zijn met $(I^*:a) \subset Ann_{R[T]}(b)$ dan geldt : $(I:a_*) \subset Ann_R(b_*)$, bijgevolg $b_* = 0$ en dus ook $b = 0$. Omgekeerd nu , stel I in $L((k_L^g)_*)$ en stel dat er a,b in R bestaan met $(I:a) \subset Ann_R(b)$, dan is natuurlijk $(I^*:a^*) \subset Ann_{R[T]}(b^*)$ dus $b^* = 0 = b$.

2. Zij I in $L((k_L)^*)$ en stel dat er a,b in $h(R[T])$ zijn : $(I:a) \subset Ann_{R[T]}(b)$ dan geldt : $(I_*,a_*) \subset Ann_R(b_*)$ dus b_* en daarom ook b is nul. Omgekeerd, I in $L(k_L^g)$ en stel dat er a,b in R zijn met $(I_*:a) \subset Ann_R(b)$ dan $((I_*)^*:a) \subset Ann_{R^*}(b^*)$ en omdat $I \subset (I_*)^*$ geldt b^* en dus $b = 0$.

3. (ON)GEGRADEERDE LAMBEK-MICHLER KERNFUNKTOREN

(3.1) Zij R een gegradeerde ring en zij S een multiplikatief gesloten verzameling in R. Dan kunnen we daarmee een kernfunktor in R-mod associëren met filter :

$L(k_S) = \{ L$ links id. van R: $(L:r) \cap S \neq \emptyset$ voor alle r in R $\}$

Zij U een multiplikatief gesloten verzameling van $R[T]$, bestaande uit homogene elementen, dan kunnen we hiermee een gegradeerde kernfunktor in $R[T]$-gr associëren met filter :

$L(k^g_U) = \{ L$ in $L_g(R[T])$: r in $h(R[T])$ dan $(L:r) \cap U \neq \emptyset \}$

(3.2) Zij S een multiplikatieve verzameling in R, dan noteren we met $S^* = \{ s$ in $h(R[T])$: s_* in S $\}$. Het is duidelijk dat S^* een multiplikatieve verzameling is in $R[T]$, bestaande uit homogene elementen. We hebben volgende

stelling

$$(k_S)^* = k^g_{S^*}$$

bewijs

Neem een I in $L((k_S)^*)$ en stel dat er een r in $h(R[T])$ zou bestaan met $(I:r) \cap S^* = \emptyset$. Dan geldt eveneens : $(I_*:r_*) \cap S = \emptyset$ (want stel dat s in $(I_*:r_*) \cap S$ zou zitten, dus sr_* in I_* en dus bestaat er een k : s^*T^kr in I, en s^*T^k in S^*) en we bekomen dus een kontradiktie!

Omgekeerd nu, neem I in $L(k^g_{S^*})$, voor alle r in $h(R[T])$ geldt dus $(I:r) \cap S^* \neq \emptyset$, dus : $(I_*:r_*) \cap S \neq \emptyset$ en bijgevolg zit I in $L((k_S)^*)$. Klaar !

(3.3) Zij U een multiplikatief gesloten verzameling in $R[T]$, bestaande uit homogene elementen dan noteren we met $U_* = \{ u_*$: u in U $\}$. Het is wederom duidelijk dat U_* een multiplikatieve gesloten verzameling in R is en we hebben devolgende

stelling

$$(k^g_U)_* = k_{U_*}$$

bewijs

Neem een I uit $L(k_{U_*})$ en stel dat er een r in $h(R[T])$ zou zijn met : $(I^*:r) \cap U \neq \emptyset$, dan : $(I:r_*) \cap U_* = \emptyset$, kontradiktie. Omgekeerd,neem I in $L((k^g_U)_*)$ en stel dat er een r in R bestaat met : $(I:r) \cap U_* = \emptyset$,dan geldt : $(I^*:r^*) \cap U = \emptyset$ en wederom een kontradiktie.

(3.4) <u>een voorbeeldje</u>

Zij R een positief gegradeerde links-Noetherse ring en P in Spec(R).Beschouw volgende multiplikatief gesloten verzamelingen in R ,resp. R[T]:

$G(P) = \{ i \text{ in } R : ri \text{ in } P \text{ dan } r \text{ in } P \}$

$h(G(P^*)) = \{ j \text{ in } h(R[T]) : r \text{ in } h(R[T]) \text{ en } rj \text{ in } P^*, \text{dan } r \text{ in } P^* \}$

<u>stelling</u>

$$(G(P))^* = h(G(P^*))$$

<u>bewijs</u>

Neem x in $((G(P))^*$ en stel dat er een r in $h(R[T])$ zou zijn met rx in P^* en r niet in P^*, dan is $r_* x_*$ in P en r_* niet in P.een kontradiktie!

Omgekeerd, neem x in $h(G(P^*))$ en stel dat er een r in R zou zijn met rx_* in P en r niet in P , dan geldt : er is een k zodat $r^*(x_*)^*T^k = r^*x$ in P^* en r^* niet in P^*,wederom een kontradiktie en dus klaar!

<u>gevolg</u>

Voor alle P in Spec(R) geldt : $(k_P)^* = k^g_{P^*}$

4. ORE-VOORWAARDEN

(4.1) Laat R effe een willekeurige ring zijn en S een multiplikatief gesloten verzameling in R. De linker-breukenring $S^{-1}R$ van R ten opzichte van S bestaat juist dan als R en S voldoen aan de zgn. Ore-voorwaarden :

(O_1) : s in S en r in R : rs = 0 dan bestaat er een s'
in S zodat : s'r = 0

(O_2) : r in R en s in S dan bestaan er r' in R en s' in
S zodat : s'r = r's

Zij nu R een gegradeerde ring dan zouden we kunnen kijken naar de homogene vorm van de Ore-voorwaarden die we maar effe de gegradeerde Ore-voorwaarden zullen noemen :

(O_1^g) : s in S en r in h(R) : rs = 0 , dan is er een s'
in S zodat : s'r = 0

(O_2^g) : r in h(R),s in S dan bestaan er r' in h(R) en s'
in S zodat : s'r = r's

Belangrijk in dit verband is volgende

(4.2) stelling

R een gegradeerde ring, S een multiplikatief gesloten deel van R bestaande uit homogenen,equivalent zijn :

1. S voldoet aan de Ore-voorwaarden
2. S voldoet aan de gegradeerde Ore-voorwaarden

---

bewijs

dat 1. 2. impliceert behoeft geen uitleg, hoop ik !
Omgekeerd , neem s in S en r in R en schrijf r in z'n homogene komponenten $r = r_1 + \dots + r_n$ .Als n = 1 dan zijn we klaar.We gaan dus verder met induktie op n , dus er bestaan r^1 in R en s^1 in S zodat : $s^1(r_1+\dots+r_{n-1}) = r^1s$. Neem nu s^2 in S en r^2 in R zodat : $s^2r_n = r^2s$.Beschouw verder u in S en v in h(R) : $us^1 = vs^2 = t$ en stel w gelijk aan ur^1+vr^2 dan geldt : tr = ws.
Nu nog (O_1) : stel as = 0 met $a = a_1 + \dots + a_n$ en s in S, dus : $(a_1 + \dots + a_{n-1})s = 0$ en $a_ns = 0$. De induktiehypothese levert ons een t_1 in S zodat : $t_1(a_1+\dots+a_{n-1}) = 0$. Omdat $t_1a_ns = 0$ bestaat er een t_2 in S met $t_2t_1a_n = 0$ en als we nu $s' = t_2t_1$ stellen dan : s'a = 0.

(4.3) In de voorwaarden van (4.2) kunnen we op de breukenring een gradatie definiëren als volgt

$$(S^{-1}R)_n = \{ a/s, a \text{ in } h(R), s \text{ in } S \text{ en } \deg(a)-\deg(s) = n \}$$

(4.4) stelling

In de notatie van (3.2) zijn equivalent :

1. S voldoet aan de Ore-voorwaarden in R
2. S^* voldoet aan de Ore-voorwaarden in $R[T]$

bewijs

1. impliceert 2. : Wegens voorgaande stelling (4.2) zal het volstaan te bewijzen dat S^* aan de gegradeerde Ore-voorwaarden in $R[T]$ voldoet :

(O_1^g) : zij r in $h(R[T])$ en s in S^* zodat : $rs = 0$, dan is r_* in R en s_* in S met $r_*s_* = 0$ en dus bestaat er een s' in S zodat : $s'r_* = 0$ en bijgevolg ook $(s')^*(r_*)^* = 0$ en dan bestaat er een k zodat : $(s')^*(r_*)^*T^k = (s')^*r = 0$ en omdat $(s')^*$ in S zit zijn we klaar !

(O_2^g) : Neem een r in $h(R[T])$ en een s in S^* dan geldt bij definitie dat r_* in R zit en s_* in S . Dan kunnen we de Ore-voorwaarden van S gebruiken om een r_1 in R en een s_1 in S te vinden zodat : $s_1r_* = r_1s_*$ en dus bestaat er een l met bvb. : $T^l(s_1)^*(r_*)^* = (r_1)^*(s_*)^*$. Verder bestaan er m en n zodat : $(r_*)^*T^m = r$ en $(s_*)^*T^n = s$, dus hebben we :
$$((s_1)^*T^{n+l})r = ((r_1)^*T^m)s$$
en dus zijn we klaar want $(s_1)^*T^{n+l}$ zit in S^* en verder $(r_1)^*T^m$ in $h(R[T])$.

2. impliceert 1. : is iets gemakkelijker , want :

(O_1) : neem een r in R en een s in S met : $rs = 0$ dan natuurlijk ook : $r^*s^* = 0$ en dus bestaat er een s' in S^* met $s'r^* = 0$ en dus ook $(s')_*r = 0$ dus klaar !

(O_2) : neem een r in R en een s in S dan zitten r^* in $h(R[T])$ en s^* in S^* en dus bestaan er r_1 in $h(R[T])$ en s_1 in S^* met : $s_1r^* = r_1s^*$ en dus ook : $(s_1)_*r = (r_1)_*s$ en dus zijn we klaar !

5. PROJEKTIEVE EN AFFIENE SCHEMA'S

(5.1) Homogeniseren en dehomogeniseren wordt in algebraïsche meetkunde gebruikt om projektieve problemen affien te maken en omgekeerd. We willen deze methode nu veralegemenen voor links-Noetherse positief gegradeerde ringen. De volgende stelling beschrijft de projektieve ruimte $\mathrm{Proj}(R[T])$ als bestaande uit iets affiens en een projektieve ruimte van lagere dimensie : de ruimte op oneindig :

(5.2) <u>stelling</u>

$\mathrm{Proj}(R[T]) = \mathrm{Proj}(R) \cup \mathrm{Spec}(R)$, waar $\mathrm{Spec}(R)$ homeomorf is met de open verzameling $X_+((T))$

<u>bewijs</u>

Als P een gegradeerd ideaal is van $R[T]$, en P bevat T , dan is P van de vorm : $P = p + (T)$ met $p = R \cap T$, een gegradeerd priemideaal van R. $R_+ + (T) = (R[T])_+$, als P dus in $\mathrm{Proj}(R[T])$ zit dan moet $p \not\subset R_+$, of m.a.w. p in $\mathrm{Proj}(R)$. We hebben bijgevolg een bijektieve korrespondentie tussen $\mathrm{Proj}(R)$ en $V_+(T)$ nml : $p \rightarrow p + (T)$.
Zij nu T niet in P dan is P_* een echt priemideaal van R. Immers, als $IJ \subset P_*$ voor idealen I en J in R dan hebben we $(IJ)^* \subset (P_*)^*$ en dus ook $I^*J^* \subset (P_*)^*$. Als x in I^*J^* zit , dan is er een n : $T^n x$ in P en omdat T een centraal element is en niet in P zit krijgen we : x in P , of maw: $I^*J^* \subset P$, nu gebruiken we het priem zijn van P om I^* of J^* in P te praten en dus zit I of J in P_* .
Omgekeerd, zij p in $\mathrm{Spec}(R)$ dan zit p^* in $\mathrm{Proj}(R[T])$, stel immers dat er gegradeerde idealen I en J in $R[T]$ zijn : $IJ \subset p^*$ dan $I_* J_* \subset p$ en dus of I_* of J_* in p , dus ook $I \subset (I_*)^* \subset p^*$ of $J \subset (J)_*^* \subset p^*$. Verder bewijzen we gemakkelijk : $(P_*)^* = P$, we hebben dus al een 1-1 korrespondentie tussen $X_+(T)$ en $\mathrm{Spec}(R)$, nu moeten we ze nog homeomorf praten : Zij I een ideaal van R , met $(X_I)^*$ noteren we $\{ p^* : p \text{ in } X_I \}$. Men gaat nu gemakkelijk na dat : $(X_I)^* = X_+(I^*) \cap X_+(T)$. Op analoge wijze kunnen we natuurlijk $(X_+(J))_*$ definiëren en dan : klaar!

(5.3) stelling

---

p in Spec(R) dan :
$k_{R[T]-p^*} = (k_{R-p})^*$

---

bewijs

I gegradeerd ideaal in $L(R[T]-p^*)$, dan bestaat er een homogeen element s in $R[T]-p^*$: $R[T]sR[T] \subset I$,dus ook $Rs_*R \subset I_*$ en s_* zit in R-p (want $s = (s_*)^*T^n$ en T niet in p^*),bijgevolg I_* in L(R-p) en dus I in $L((k_{R-p})^*)$
Omgekeerdnu : stel I gegradeerd ideaal in $L((k_{R-p})^*)$ dan bestaat er een s_* in R-p : $Rs_*R \subset I_*$dus ook $R[T]sR[T] \subset I$ voor s in $R[T]-p^*$.

(5.4) We willen nu ,zoals in het kommutatieve geval, de staak van Proj(R[T]) in p^* isomorf praten met de staak van Spec(R) in p:

(5.5) stelling

R positief gegradeerde links-Noetherse priemring
dan : $Q_k(R) = (\ Q^g_{k^*}(R[T])\ )_0$

---

bewijs

$Q^g_{k^*}(R[T])_0 = \varinjlim HOM(I,R[T])_0$ met de I in $L_g(k^*)$.Neem nu een a in $Q^g_{k^*}(R[T])_0$ gerepresenteerd door een graadbehoudend R[T]-morfisme $f : I \longrightarrow R[T]$, definiëer nu een afbeelding $f_* : I_* \longrightarrow R$ als volgt : x in I_* , y in I : $y_* = x$ dan : $f_*(x) = (f(y))_*$.We hebben nu wat te kontroleren :

1° f_* onafhankelijk van keuze van y

stel y en z in I : $y_* = z_* = x$ dan bestaat er een n zodat bvb : $yT^n = z$ en dus : $f(z) = f(y)T^n$ en dus $f(z)_* = f(y)_*$

2° f_* is R-lineair

Neem y en z in I : $y_* = v$, $z_* = w$ dan bestaat er een n : $y + T^nz$ homogeen element. Dan : $f_*(v+w) = (f(y+T^nz))_* = (f(y) + T^nf(z))_* = f(y)_* + f(z)_* = f(v) + f(w)$.
Neem y in I : $y_* = x$ dan : $f_*(rx) = f(r^*y)_* =(r^*f(y))_* = rf(y)_* = rf(x)$.

f_* zit dus in Hom(I_*,R).Zij b het element van $Q_k(R)$ gerepresenteerd door f_* dan kunnen we natuurlijk een afbeelding h : $Q_k^{g*}(R[T])_0 \to Q_k(R)$ definiëren : h(a) = b.

3° h is R_0-lineair

Zij a en a' gerepresenteerd op I door f en f' dan geldt ;
$((f+f')(y))_* = (f(y)+f(y'))_* = f(y)_*+f(y')_*$ en dus :
$h(a + a') = h(a) + h(a')$.
Zij r in R_0 dan :$((rf)(y))_* = (r.f(y))_* = rf(y)_*$ en dus :
$h(ra) = rh(a)$.

4° h is injektief

Zij a gerepresenteerd door een f op I en stel h(a) = 0 , dan bestaat er een J in L(k) : $f_*|J = 0$, maar dan is ook $f|J^* \cap I = 0$ en dus is a = 0 .

5° h is surjektief

Zij b in $Q_k(R)$ gerepresenteerd door f in Hom(I,R) met I in L(k).Zij $I = (i_1,\dots,i_n)$ en noteer $f(i_k) = y_k$.Zij nu
$r = \max(\deg(i_1^*),\dots,\deg(i_n^*),\deg(y_1^*),\dots,\deg(y_n^*))$.Neem nu :
$i'_k = i_k^*.T^{r-\deg(i_k^*)}$, $y'_k = y_k^*.T^{r-\deg(y_k^*)}$
Neem verder : $I' = R[T]i'_1 + \dots + R[T]i'_n$ (dus I' in $L_g(k^*)$)
en een graadbehoudende afbeelding $f^* : I' \to R[T]$ met :
$f^*(r_1 i'_1 + \dots + r_n i'_n) = r_1 y'_1 + \dots + r_n y'_n$
f^* is ten duidelijkste een $R[T]$-morfisme,rest ons nog te bewijzen dat f^* goed gedefinieerd is :
Stel $r_1 i'_1 + \dots + r_n i'_n = s_1 i'_1 + \dots + s_n i'_n$ met alle r_i en s_j homogeen en van zelfde graad, dan :

$r_{1,*}i_1 + \dots + r_{n,*}i_n = s_{1,*}i_1 + \dots + s_{n,*}i_n$

dus ook : $r_{1,*}y_1 + \dots + r_{n,*}y_n = s_{1,*}y_1 + \dots + s_{n,*}y_n$
maar dan moet ook : $f^*(+r_i i'_i) = f^*(+ s_i i'_i)$.
want stel immers : $r_1 y'_1 + \dots + r_n y'_n \neq s_1 y'_1 + \dots + s_n y'_n$,
dan geldt (omdat alles van zelfde graad is) :

$r_{1,*}i_1 + \dots + r_{n,*}i_n \neq s_{1,*}i_1 + \dots + s_{n,*}i_n$

6° h(1) = 1

1 wordt in beide ringen gerepresenteerd door de identiteit,
dus : $f_*(x) = (f(y))_* = y_* = x$.

Rest ons dan tenslotte nog te bewijzen dat produkten in produkten overgaan,maar dit laten we over aan le lecteur de bonne volonté.

(5.6) stelling

R links-Noetherse priemring,dan :
$Proj(R[T_1,\dots,T_n])$is een schema

bewijs

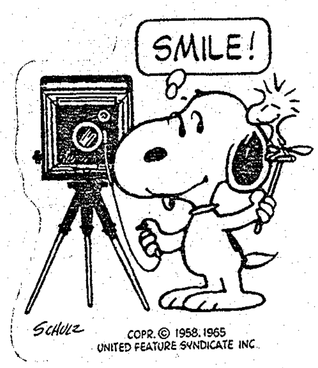
We overdekken $Proj(R[T_1,\dots,T_n])$ met de open verzamelingen : $X_+(T_1),\dots,X_+(T_n)$.
Neem nu voor alle i :
$S = R[T_1,\dots,T_{i-1},T_{i+1},\dots,T_n]$ dan is $S[T] = R[T_1,\dots,T_n]$
Uit voorgaande bespiegelingetjes volgt nu :
$X_+(T_i)$ is homeomorf met Spec(S) en ook als geringde ruimten zijn ze isomorf,want ze hebben isomorfe staken.

(5.7) Een ander probleem in dit verband is :

Is $Proj(R[T])$ een schema als Proj(R) het is ?

Rekening houdend met stellingen (5.2) en (5.5) is dit erg waarschijnlijk,maar een bewijs heb ik er nog niet van gevonden,U wel ?

overigens ben ik de mening toegedaan dat meerderjarig op achttien moet.



6 . PRIMARY DECOMPOSITION

(6.1) Zij R een willekeurige ring en $M \neq 0$ een R-moduul, een priemideaal P van R noemen we <u>geassocieerd</u> met M als er een deelmoduul M' van M is met : $P = \mathrm{Ann}(M') = \mathrm{Ann}(M'')$ voor alle niet-nul deelmodulen M'' van M'.
Met Ass(M) noteren we de verzameling van priemidealen die met M geassocieerd zijn. Een beruchte stelling uit de ring-theorie leert ons dat als R een links-Noetherse ring is voor elke $M \neq 0$ in R-mod : $\mathrm{Ass}(M) \neq \emptyset$.

(6.2) <u>stelling</u>

Zij R een gegradeerde ring , M niet-nul in R-gr en P in Ass(M) , dan geldt :
1. P is gegradeerd
2. Er is een x in h(M) met $P = \mathrm{Ann}(Rx)$

<u>bewijs</u>

1. : Bij definitie bestaat er een deelmoduul M' van M zodat $P = \mathrm{Ann}(M')$.Neem een l in P en x in M' en hun ontbinding in homogene componenten : $l = l_{-p} + \dots + l_m$ en $x = x_{-q} + \dots + x_n$. Neem nu een a in h(R) willekeurig , omdat la in P zit hebben we :$lax = 0$ en dus $l_m a x_n = 0$ en omdat a willekeurig gekozen was : $l_m R x_n = 0$.
Neem nu een b in h(R) , uit $lbx = 0$ volgt : $l_m b x_{n-1} + l_{m-1} b x_n = 0$. En als we hierin nu b vervangen door $b l_m a$ dan komt er : $l_m b l_m a x_{n-1} = 0$ en dus $(l_m R)^2 x_{n-1} = 0$. Ondertussen heeft iedereen al wel door hoe we nu verder kunnen gaan, omdat de hoeveelheid niet-nul componenten van x eindig is, bestaat er dus een p :$(l_m R)^p x_i = 0$ voor alle i . Bijgevolg $(l_m R)^p Rx = 0$ en dus : $(l_m R)^p \subset P$ en dus ook $l_m R \subset P$, dus tenslotte l_m in P en rekurrentie maakt het bewijs af !

2. : Neem $x \neq 0$ in M'. $P = \mathrm{Ann}(Rx)$ .Schrijf x in z'n homogene komponenten : $x = x_1 + \dots + x_k$. Stel nu : $J_i = \mathrm{Ann}(Rx_i)$
Men gaat gemakkelijk na dat $P = J_1 \cap \dots \cap J_k$ en dus is er een i : $P = J_i$ en daardoor : $P = \mathrm{Ann}(Rx_i)$

(6.3) Volgende stelling is een veralgemening van Theorem II.10.2 van LNM 758 :

stelling

Zij R een gegradeerde ring , M in R-mod , dan :

$$\mathrm{Ass}_{R[T]}(M^*) = \{P^* : P \text{ in } \mathrm{Ass}(M)\}$$

---

bewijs

Men gaat gemakkelijk na dat als $P = \mathrm{Ann}_R(N)$ dan $P^* = \mathrm{Ann}_{R^*}(N^*)$. Als nu P in $\mathrm{Ass}_R(M)$ zit , dan bestaat er een deelmoduul M' van M : $P = \mathrm{Ann}_R(M')$ en dus $P^* = \mathrm{Ann}_{R^*}(M')^*$. Zij verder x in $h((M')^*)$ dan geldt : $P = \mathrm{Ann}_R(Rx_*)$ en dus geldt ook :

$$P^* = \mathrm{Ann}_{R[T]}((Rx_*)^*) = \mathrm{Ann}_{R[T]}(R[T](x_*)^*)$$
$$= \mathrm{Ann}_{R[T]}(R[T]x)$$

En dus is P^* een element van $\mathrm{Ass}_{R[T]}(M^*)$.

Omgekeerd nu , zij Q in $\mathrm{Ass}_{R[T]}(M^*)$. Uit voorgaande stelling volgt dat er een x in $h(M^*)$ is met : $Q = \mathrm{Ann}_{R^*}(R^*x)$. Stel nu $P = \mathrm{Ann}_R(Rx_*)$.Een zelfde redenering als in 1. toont nu dat $P^* = Q$, dus P is priem en men gaat makkelijk na dat P in $\mathrm{Ass}_R(M)$ zit.

(6.4) Zij N een deelmoduul van M. We noemen N een <u>primary deelmoduul</u> van M als Ass(M/N) een singleton is. We noemen N <u>P-primary</u> als $\mathrm{Ass}(M/N) = \{P\}$.

(6.5) stelling

Zij R een links-Noetherse ring,M in R-mod en P in Spec(R) equivalent zijn :

1. 0 is P-primary deelmoduul van M
2. $(0:P)_M = \{x \text{ in } M : Px = 0\}$ is een essentiëel deelmoduul van M en bevat ieder ideaal dat een niet-nul deelmoduul van M annihileert

---

bewijs

1. impliceert 2. : Zij X een niet-nul deelmoduul van M zodat

dus : $Ass(X) = \{P\}$ en dus ook : $X \cap (0:P)_M \neq 0$. Verder, als I een ideaal is dat M' een niet-nul deelmoduul van M annihileert. Omdat $Ass(M') = \{P\}$, bestaat er niet-nul deelmoduul M" van M' met $P = Ann(M")$. Verder geldt natuurlijk : $IM" = 0$ en dus : $I \subset P$.

2. impliceert 1. : Omdat R links-Noethers is weten we dat $Ass(M) \neq \emptyset$. Zij dus Q in Ass(M) , dan volgt uit 2. dat $Q \subset P$. Beschouw nu $M' \neq 0$ waarvoor $Q = Ann(M')$. Omdat $M' \cap (0:P)_M \neq 0$ volgt : $P \subset Ann(M' \cap (0:P)_M) = Q$. Dus : $P = Q$ en we zijn klaar !

<u>opmerking</u> : Als R een gegradeerde ring is, M in R-gr en volgens stelling (6.2) P dus gegradeerd priem mogen we in (6.5.2) ideaal door gegradeerd ideaal vervangen.

(6.6) Volgende stelling is een veralgemening van Corollary II.10.7 uit LNM 758 :

<u>stelling</u>

R een links-Noetherse gegradeerde ring, M in R-mod, equivalent zijn :
1. 0 is een P-primary deelmoduul in M (in R-mod)
2. 0 is een P^*-primary deelmoduul van M^* (in R^*-gr)

<u>bewijs</u>

1. impliceert 2. : $(0:P^*)_{M^*}$ is essentiëel deelmoduul van M^*. Stel nml. N een gegradeerd deelmoduul zodat : $N \cap (0:P^*)_{M^*} = 0$ dan ook $N_* \cap ((0:P^*)_{M^*})_* = 0$ en dus : $N_* \cap (0:P)_M = 0$. Wegens voorgaande stelling impliceert dit $N_* = 0$ en dus ook $N = 0$ .klaar. Zij verder I een gegradeerd ideal van R T dat een niet-nul gegradeerd deelmoduul N van M^* anniheert, dan annihileert I_* , N_* en bijgevolg zit I_* in P en dus ook : $I \subset P^*$. Wegens voorgaande stelling zijn we nu klaar!

2. impliceert 1. : $(0:P^*)_{M^*}$ is essentiëel in M^* , dan is $(0:P)_M$ essentiëel in M . Als I, N annihileert, dan annihileert I^*, N^* dus $I^* \subset P^*$ en bijgevolg $I \subset P$. klaar !

(6.7) Volgende stelling is een kleine uitbreiding (lees: herinterpretatie) van stelling (6.5) :

<u>stelling</u>

Zij R een links-Noetherse ring, M in R-mod, N een niet-nul deelmoduul van M, P in Spec(R), equivalent zijn :

1. N is een P-primary deelmoduul van M
2. a) voor alle M' : $N \subsetneq M' \subset M$: $M' \cap (N:P)_M \neq N$ met :

   $(N:P)_M = \{ x \text{ in } M : Px \subset N \}$

   b) M' : $N \subsetneq M' \subset M$ en I ideaal : $IM' \subset N$, dan $I \subset P$

<u>bewijs</u>

N is een P-primary deelmoduul van M als en alleen dan als 0 een P-primary deelmoduul is van M/N. De stelling volgt dan onmiddellijk uit (6.6) want voorwaarde 2. van (6.7) is niets anders dan de voorwaarden van (6.6.2) op het niveau van M (en niet op dat van M/N).

(6.8) <u>stelling</u>

R een links-Noetherse gegradeerde ring, $0 \neq N \subset M$ in R-mod, equivalent zijn :

1. N is een P-primary deelmoduul van M (in R-mod)
2. N^* is een P^*-primary deelmoduul van M^* (in R^*-gr)

<u>bewijs</u>

1. impliceert 2. : M' gegradeerd deelmoduul : $N^* \subsetneq M' \subset M^*$ en stel $M' \cap (N^*:P^*)_{M^*} = N^*$ dan : $M'_* \cap ((N^*:P^*)_{M^*})_* = N$ en verder is het gemakkelijk na te gaan dat : $((N^*:P^*)_{M^*})_* = (N:P)_M$ en dus moeten we hebben : $M'_* = N$ en dus ook : $M' \subset (M'_*)^* = N^*$, een kontradiktie !

Neem M' een gegradeerd deelmoduul met $N^* \subsetneq M' \subset M^*$ en zij I een gegradeerd ideaal van R[T] met $IM' \subset N^*$, dus ook : $I_*(M')_* \subset N$, dus $I_* \subset P$ en bijgevolg $I \subset (I_*)^* \subset P^*$.ok!

2. impliceert 1. : M' deelmoduul van M met : $N \subsetneq M' \subset M$ en stel dat $M' \cap (N:P)_M = N$ dus ook : $(M')^* \cap ((N:P)_M)^* = M^*$ Men gaat wederom eenvoudig na dat : $((N:P)_M)^* = (N^*:P^*)_{M^*}$ en dus $(M')^* = N^*$ dus : $M' = N$, een kontradiktie ,newaar?

M' deelmoduul van M met : $N \subsetneq M' \subset M$ en I een ideaal van R met $IM' \subset N$, dus : $I^*(M')^* \subset N^*$ en bijgevolg $I^* \subset P^*$ en tenslotte : $I \subset P$; klaar!

(6.9) Een eindige verzameling van primary deelmodulen van M, N_i noemen we een primary decomposition voor een deelmoduul N van M als $N = \cap N_i$.
Zulk een ontbinding noemen we gereduceerd als geldt :
1. $\bigcap_{j \neq i} N_j \not\subset N_i$,voor alle i
2. Als $Ass(M/N_i) = \{ P_i \}$ dan zijn de P_i verschillend.
Uit het voorgaande volgt nu natuurlijk :

(6.10) stelling

R een links-Noetherse gegradeerde ring,N een deelmoduul van M, equivalent zijn :
1. $\{ N_i \}$ is een (gereduceerde) primary decomposition voor N van M
2. $\{ N_i^* \}$ is een(gereduceerde) primary decomposition voor N^* van M^*

(6.11) Een deelmoduul N van M noemen we een classical P-primary deelmoduul als N P-primary is en er een n bestaat zodat : $P^nM \subset N$ .Het begint eentonig te worden maar we hebben nu natuurlijk ook volgend :

triviaaltje

R een links-Noetherse gegradeerde ring,N een deelmoduul van M,P in Spec(R),equivalent zijn :
1. N is een classical-P-primary deelmoduul van M
2. N^* is een classical-P^*-primary deelmoduul van M^*

hoofdstuk zes : QUASI-KOHERENTE MODULEN

(overigens moet IV natuurlijk in spiegelschrift gelezen worden,waarvoor andermaal mijn verontschuldigingen !)

<u>over een droom die tussen nacht en morgen staat</u>
(met dank aan hugo claus voor de prettige samenwerking)

Dit hoofdstuk ontstond uit een kemel in de "reflectors".Op blz. 119 ervan staat een droom van een stelling :

QC(X,R) is een Grothendieck-kategorie met generator R

Omdat ik op dat moment iets wilde weten over de quasi-koherente Modulen boven een affien schema (teneinde een goede definitie te hebben voor de dimensie van variëteiten enz.) en omdat je met de hulp van voorgaande stelling al moeilijk aan iets anders kunt denken dan Gabriël-Popescu,vuurde ik dit kannon af op QC(X,R) en kreeg te mooië resultaten :

- zo zouden voor een links-Noetherse ring alle symetrische lokalizaties aan priemen platte modulen zijn
- de verzameling van de T-staken zou open liggen in Spec(R)

Deze resultaten brachten fvo aan het twijfelen omtrent de juistheid van de reflector-stelling.Daarom restte er me weinig anders dan een klasse van ringen in te voeren met de eigenschap van de "stelling" als definitie : de geometrische. Uit voorgaande resultaten was dan al duidelijk dat dit een mooië klasse van ringen is, te mooi wederom voor fvo die , als hij es een week tijd zou hebben,wel zou bewijzen dat alle geometrische ringen T-staken hebben.Waarschijnlijk heeft hij intussen nog geen tijd gehad , en dus blijf ik nog een tijdje voortdromen....

II.1 : QUASI-COHERENTE MODULEN EN DE GABRIEL-POPESCU INBEDDING

(met ekskuses aan Alain voor het flagrante plagiaat)

(1.1) Voor definitie en elementaire eigenschappen van (quasi-coherente) Modulen over een geringde ruimte verwijzen we naar Godement "Théorie des faisceaux" en Grotendieck-Dieudonné "Eléments de Géometrie Algébrique , 0.4 en 0.5".

(1.2) <u>notationele afspraken</u>

Met (X,O_X) zullen we een geringde ruimte boven X aanduiden, de globale sekties $O_X(X)$ vormen een ring die we R noteren.De kategorie van de quasi-coherente O_X-Modulen duiden we aan met $QC(X,O_X)$.

(1.3) Laat $\underline{C}$ een Grothendieck-kategorie zijn en G een objekt in $\underline{C}$. Stel $q(G) = \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(G,G)$, dan is $q(G)$ een ring en we krijgen bijgevolg een funktor :

$$q = \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(G,-) : \underline{C} \longrightarrow q(G)\text{-mod}$$

Men kan gemakkelijk aantonen dat q een links-toegevoegde heeft, zeg T. En verder $T\circ q \longrightarrow 1_{\underline{C}}$ een "adjunction arrow" van T met q . In dit decor plaatsen we nu volgende sleutelstelling :

(1.4) <u>stelling</u> (Gabriël-Popescu)

---

equivalent zijn :

1. G is een generator van $\underline{C}$
2. q is vol-trouw
3. $T\circ q \longrightarrow 1_{\underline{C}}$ is een funktoriëel isomorfisme en T is exact.
4. T is exact en induceert een equivalentie tussen $\underline{C}$ en q(G)-mod/Ker T

<u>bewijs</u>

Zie Popescu "Abelian Categories"

(1.5) <u>definitie</u>

(X, O_X) noemen we een <u>geometrische</u> geringde ruimte als $QC(X, O_X)$ een Grothendieck-kategorie is met generator O_X.

(1.6) We willen nu natuurlijk het Gabriël-Popescu kannon afvuren op $QC(X, O_X)$ voor (X, O_X) geometrisch. Daarvoor moeten we eerst de funktoren q en T een meer konkretere vorm geven :

(1.7) <u>stelling</u>

---

1. $q(O_X) = \mathrm{Hom}_{QC}(O_X, O_X) = O_X(X) = R$
2. voor iedere F_X in $QC(X, O_X)$: $q(F_X) = F_X(X)$

<u>bewijs</u>

1. Er bestaat een kanonieke pijl van $\mathrm{Hom}_{QC}(O_X, O_X)$ naar $\mathrm{Hom}_R(R, R) = R$ door aan elk O_X-Moduulmorfisme het O_X-moduulmorfisme op de globale sekties te associëren. Rest ons nog te bewijzen dat elk O_X-Moduulmorfisme vastligt door het morfisme op de globale sekties. We weten dat voor iedere U open in X hetvolgende diagram kommutatief hoort te zijn :

$$\begin{tikzcd} O_X(X) \arrow[r, "f(X)"] \arrow[d, "j_U^X"] & O_X(X) \arrow[d, "j_U^X"'] \\ O_X(U) \arrow[r, "f(U)"] & O_X(U) \end{tikzcd}$$

Hierin is j_U^X een ringhomomorfisme en dus : $j_U^X(1) = 1$ en $f(U)$ is een $O_X(U)$-moduulmorfisme en ligt bijgevolg vast door het beeld van de eenheid. De kommutativiteit van het diagram levert :

$$f(U)(1) = j_U^X(f(X)(1))$$

en wordt dus bepaald door het morfisme op de globale sekties.

2. We kunnen een analoge redenering als in 1. toepassen zij het nu op volgend diagram :

$$\begin{tikzcd} O_X(X) \arrow[r, "g(X)"'] \arrow[d, "j_U^X"] & F_X(X) \arrow[d, "i_U^X"'] \\ O_X(U) \arrow[r, "g(U)"] & F_X(U) \end{tikzcd}$$

Er geldt nu :

$$g(U)(1) = i_U^X(g(X)(1))$$

en g ligt dus wederom vast door g(X).klaar!

(1.8) Nu moeten we nog een links-toegevoegde funktor uit de duim zuigen.Hiervoor kunnen we ons laten leiden door volgende situatie in moduul-theorie :
Zij B in mod-R en in S-mod zodat $s(br) = (sb)r$ voor alle s,b,r resp. in S,B,R. Dan is $B \otimes_R -$ een links-toegevoegde funktor van $\mathrm{Hom}_S(B,-)$.Dit laat ons vermoeden dat voor alle M in R-mod : $T(M) = O_X \otimes_R M$, met $O_X \otimes_R M$ de verschoofde van de preschoof $(U, O_X(U) \otimes_R M)$.Volgende stelling is een ode aan onze wiskundige intuitie :

(1.9) <u>stelling</u>

---

1. voor alle M in R-mod : $O_X \otimes_R M$ in $QC(X, O_X)$
2. $O_X \otimes_R -$ is een links-toegevoegde van q

<u>bewijs</u>

1. Voor alle M in R-mod bestaan er I,J,f en g zodat :

(1) $\quad R^I \xrightarrow{f} R^J \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$

Vermits tensorprodukten nog steeds rechts-exact zijn en kommuteren met direkte sommen komt er voor elke open U :

$$(O_X(U) \otimes_R R)^I \xrightarrow{1 \otimes f} (O_X(U) \otimes_R R)^J \xrightarrow{1 \otimes g} O_X(U) \otimes_R M \longrightarrow 0$$

of m.a.w. :

$$O_X(U)^I \xrightarrow{1 \otimes f} O_X(U)^J \xrightarrow{1 \otimes g} O_X(U) \otimes_R M \longrightarrow 0$$

Na verschoven (exact!) krijgen we de exacte rij :

(2) $\quad O_X{}^I \xrightarrow{\bar{f}} O_X{}^J \xrightarrow{\bar{g}} O_X \otimes_R M \longrightarrow 0$

Waarin $\bar{f}$ en $\bar{g}$ de verschoofden zijn van de preschoofmorfismen $1\otimes f(U)$ en $1\otimes g(U)$. Merk tenslotte op dat $1\otimes f(U)=\bar{f}(U)$.

2. Zij nu F_X in $QC(X,O_X)$, we passen de links-exactheid van $Hom_R(-,F_X(X))$ resp. $Hom_{QC}(-,F_X)$ toe op de exacte rijën (1) en (2) . Dit levert :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Hom_R(M,F_X(X)) \arrow[r, "-\circ g"] \arrow[d, "v_1"] & Hom_R(R^J,F_X(X)) \arrow[r, "-\circ f"] \arrow[d, "v_2"] & Hom_R(R^I,F_X(X)) \arrow[d, "v_3"] \\
0 \arrow[r] & Hom_Q(O_X \otimes_R M,F_X) \arrow[r, "-\circ \bar{g}"] & Hom_Q(O_X{}^J,F_X) \arrow[r, "-\circ \bar{f}"] & Hom_Q(O_X{}^I,F_X)
\end{tikzcd}$$

met v_1 als volgt gedefiniëerd :
Neem h in $Hom_R(M,F_X(X))$, h^* het preschoofmorfisme :

$$\begin{aligned} h^*(U) \ : \ O_X(U) \otimes_R M &\longrightarrow F_X(U) \\ 1\otimes m &\longmapsto i_U^X(h(m)) \end{aligned}$$

en $v_1(h)$ is nu de verschoofde van h^* .

met v_2 als volgt gedefiniëerd :
Neem h in $Hom_R(R^J,F_X(X))$ dan is $v_2(h) = h^*$ met :

$$\begin{aligned} h^*(U) \ : \ O_X{}^J(U) = O_X(U) \otimes_R R^J &\longrightarrow F_X(U) \\ 1\otimes a &\longmapsto i_U^X(h(a)) \end{aligned}$$

v_3 wordt analoog gedefiniëerd.

<u>opmerking 1</u>

v_2 en v_3 zijn isomorfismen , dit volgt uit de kommutativiteit van het diagram :

$$\begin{tikzcd}
Hom_R(R^J,F_X(X)) \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "v_2"] & \prod_J Hom_R(R,F_X(X)) \arrow[d, "a_3"] \\
Hom_{QC}(O_X{}^J,F_X) \arrow[r, "a_2"] & \prod_J Hom_{QC}(O_X,F_X)
\end{tikzcd}$$

Met a_1 en a_2 de kanonieke isomorfismen , a_3 is het isomorfisme uit stelling (1.7.2).

opmerking 2

Het rechterdiagram is kommutatief. Dit volgt uit hetvolgende kommutatief diagram :

$$
\begin{tikzcd}
 & O_X(X) \otimes_R R^J \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "h"] \arrow[dd, "j_U^X \otimes 1"] & \\
O_X(X) \otimes_R R^I \arrow[rr, "h \circ f"] \arrow[dd, "j_U^X \otimes 1"'] & & F_X(X) \arrow[dd, "i_U^X"] \\
 & O_X(U) \otimes_R R^J \arrow[dl, "1 \otimes f(U)"'] \arrow[dr, "v_2(h)(U)"] & \\
O_X(U) \otimes_R R^I \arrow[rr, shift left, "v_3(h \circ f)"] \arrow[rr, shift right, "v_2(h)(U) \circ (1 \otimes f(U))"'] & & F_X(U)
\end{tikzcd}
$$

en het nodige diagrammetjes-jagen.

opmerking 3

We hebben dus bewezen dat :

$\mathrm{Hom}_R(M, q(F_X)) = \mathrm{Hom}_{QC}(O_X \otimes_R M, F_X)$ en dus zijn we klaar!

(1.10) Hoewel we in dit algemene kader enkele interessante stellingen zouden kunnen bewijzen,gaan we nu over naar meer konkrete geringde ruimten.

II.2 : GEOMETRISCHE RINGEN

(2.1) <u>definitie</u>

Een ring R noemen we <u>geometrisch</u> als QC(<u>Spec</u>(R)) een Grothendieck-kategorie is met generator : <u>Spec</u>(R).

(2.2) Geometrische ringen komen nogal eens voor. Bvb. alle kommutatieve ringen zijn geometrisch zoals bewezen door A.Grothendieck (EGA I,Corollaire(1.4.2)).Verder vermoeden we dat alle links-Noetherse ringen geometrisch zijn.We zullen in deze paragraaf enkele gevolgen van de Gabriël-Popescu stelling bewijzen voor links-Noetherse geometrische ringen.

(2.3) <u>stelling</u>

Elke M_X een quasi-koherent Moduul boven <u>Spec</u>(R) is van de vorm : $M_X = \underline{\mathrm{Spec}}(R) \otimes_R M_X(X)$

<u>bewijs</u>
dit is niets anders dan een herformulering van stelling 1.4.3 rekening houdend met stellingen 1.7 en 1.9 .

(2.4) En om verstokte ringtheoretici een beetje warm te krijgen volgende stellingen die hen slapeloze nachten zullen bezorgen als alle links-Noetherse ringen geometrisch zouden zijn :

(2.5) <u>stelling</u>

R een links-Noetherse geometrische ring , dan is $Q_{R-P}(R)$ een plat R-moduul voor alle P in Spec(R)

<u>bewijs</u>
Zij $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ een exacte rij in R-mod.

Gabriël en Popescu leren ons dan dat $T = \underline{Spec}(R) \otimes_R -$ een exacte funktor is (1.4.4), dus :

$$0 \longrightarrow \underline{Spec}(R) \otimes_R M' \longrightarrow \underline{Spec}(R) \otimes_R M \longrightarrow \underline{Spec}(R) \otimes_R M'' \longrightarrow 0$$

is een exacte rij in $QC(\underline{Spec}(R))$.We krijgen dus ook exacte rijën tussen de staken.Men moet niet Golan heten om in te zien dat induktieve limieten kommuteren met tensorprodukten en dat $S_P(\underline{Spec}(R)) = Q_{R-P}(R)$.Daarom :

$$0 \longrightarrow Q_{R-P}(R) \otimes_R M' \longrightarrow Q_{R-P}(R) \otimes_R M \longrightarrow Q_{R-P}(R) \otimes_R M'' \longrightarrow 0$$

is exact in $Q_{R-P}(R)$-mod en dus ook in R-mod.En dan is er koffie,Douwe Egberts koffie,lekkere koffie want we zijn klaar!

(2.6) <u>een vermoeden</u>

F. Van Oystaeyen is de mening toegedaan dat voor links-Noetherse ringen de T-staken een open verzameling vormen in Spec(R).

(2.7) <u>stelling</u>

R een links-Noetherse geometrische ring dan voldoet R aan het vermoeden van F. Van Oystaeyen.

<u>bewijs</u>

Uit stelling (2.5) en een jeugdzonde van Golan volgt dat k_{R-P} een T-funktor is als en slechts als $j_{R-P} : R \longrightarrow Q_{R-P}(R)$ een epimorfisme is in $\underline{Ring}_1$. Dit epimorfisme is equivalent met te eisen dan $Q_{R-P}(R) \otimes_R Q_{R-P}(R)$ isomorf is met $Q_{R-P}(R)$ (zie bvb. Stenstrôm : "Rings of Quotients").Dit alles spoort ons aan te gaan kijken naar de verschoofde van de preschoof :

$$(X_T \; , \; Q_I(R) \otimes_R Q_I(R))$$

Deze schoof noteren we effe $\underline{A}$. Zij nu P een T-staak dan is $S_P(\underline{A})$ isomorf met $S_P(\underline{\mathrm{Spec}}(R))$.Verder zijn zowel $\underline{\mathrm{Spec}}(R)$ als $\underline{A}$ koherent en dan leert de schooftheorie ons dat er een omgeving X_I van P bestaat zodat $\underline{A}$ en $\underline{\mathrm{Spec}}(R)$ isomorf zijn op X_I.Neem nu Q in X_I , dan is dus :

$$Q_{R-Q}(R) = S_P(\underline{\mathrm{Spec}}(R)) = S_P(\underline{A}) = Q_{R-Q}(R) \otimes_R Q_{R-Q}(R)$$

en als we de eerste opmerkingen nog herinneren dan kunnen we weer koffie slurpen want we zijn klaar!

II.3 : MEETKUNDIGE EIGENSCHAPPEN VAN GEOMETRISCHE RINGEN

(3.1) In deze paragraaf is R steeds een links-Noetherse geometrische ring.We zullen trachten A.Grothendieck's : "Faisceaux quasi-cohérents sur un spectre premier" (EGA I) uit te breiden tot links-Noetherse geometrische ringen. Spec(R) noteren we X, de globale sekties s(-,X) , de struktuurschoof geassocieërd met een moduul M noteren we S(M) en $\underline{\mathrm{Spec}}(R) \otimes_R M$ noteren we T(M).

(3.2) <u>stelling</u>

R T-staken ,
de funktoren s(-,X) en S(-) zijn quasi-inversen van elkaar en definiëren bijgevolg een natuurlijke equivalentie tussen QC($\underline{\mathrm{Spec}}$(R)) en R-mod .

<u>bewijs</u>

In stelling (I.7.14) bewezen we dat voor ringen met T-staken de funktoren S(-) en T(-) samenvallen.Omwille van wat abstrakte nonsens (à la Swan's "Algebraic K-theory") volstaat het te bewijzen dat s(-,X) surjektief is maar dit is duidelijk want s(S(M),X) = M (stelling I.7.3).klaar!

(3.3) In volgende stelling bewijzen we dat voor een tamelijk grote klasse van ringen de voorwaarde van vorige stelling essentiëel is.

(3.4) <u>definitie</u>

Een links-Noetherse geometrische ring R noemen we een <u>Uia-ring</u> (what's in a name?) als voor alle M in R-mod : $S_P(\underline{\underline{a}}Q(M) = Q_{R-P}(M)$.

Merk op dat Uia-ringen een veralgemening zijn van zowel ringen met goede T-voorwaarden als van priem-ringen.

(3.5) <u>stelling</u>

R een Uia-ring, equivalent zijn :
1. R heeft T-staken
2. s(-,X) en S(-) definiëren n.e. tussen QC(<u>Spec</u>(R) en R-mod

---

<u>bewijs</u>

2. impliceert 1. : Vermits we een n.e. hebben geldt dat S een exacte funktor is. Zij dus een exacte rij in R-mod :

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

gegeven, dan geldt voor alle P :

$$0 \longrightarrow S_P(S(M')) \longrightarrow S_P(S(M)) \longrightarrow S_P(S(M'')) \longrightarrow 0$$

wegens het Uia-zijn krijgen we een exacte rij :

$$0 \longrightarrow Q_{R-P}(M') \longrightarrow Q_{R-P}(M) \longrightarrow Q_{R-P}(M'') \longrightarrow 0$$

Rest ons nog te bewijzen dat $Q_{R-P}(-)$ met direkte sommen kommuteert:

$$\begin{aligned} Q_{R-P}(\oplus M_i) &= S_P(S(\oplus M_i)) && \text{(Uia)} \\ &= \oplus S_P(S(M_i)) && \text{(Godement)} \\ &= \oplus Q_{R-P}(M_i) && \text{(Uia)} \end{aligned}$$

Merk tenslotte op dat we in de eerste gelijkheid nogmaals de natuurlijke equivalentie gebruikt hebben om te besluiten dat : $S(\oplus M_i) = \oplus S(M_i)$.

(3.6) We hebben bewezen (I.7.14) dat voor ringen met T-staken de funktoren S(-) en T(-) samenvallen, dit geldt dus ook voor kommutatieve ringen en hier begint de verwarring want verschillende eigenschappen die Grothendieck en Dieudonné in hun EGA toekenden aan S(-) zijn in feite eigenschappen van $T(-)$. We zullen hiervan enkele voorbeelden geven voor geometrische ringen :

(3.7) stelling

de funktor $T(-)$ is exact

bewijs

cfr (2.5)

gevolg (EGA, Proposition 1.3.5)

R heeft T-staken dan is $S(-)$ exact

(3.8) stelling

stel $M' = s(T(M),X)$; $N' = s(T(N),X)$ dan :
$\mathrm{Hom}_R(M',N') = \mathrm{Hom}_{QC}(T(M),T(N))$

bewijs

cfr (2.5)

gevolg (EGA, Corrollaire 1.3.8)

R heeft T-staken : $\mathrm{Hom}_R(M,N) = \mathrm{Hom}_{Mod}(S(M),S(N))$

(3.9) stelling

1. $f : M \longrightarrow N$ een R-moduulmorfisme dan geldt :
   $T(\mathrm{Ker}\, f) = \mathrm{Ker}\, T(f)$; $T(\mathrm{Im}\, f) = \mathrm{Im}\, T(f)$;
   $T(\mathrm{Coker}\, f) = \mathrm{Coker}\, T(f)$
2. Als M de induktieve limiet is van een familie R-modulen M_i dan is $T(M)$ de induktieve limiet van de $T(M_i)$

bewijs

1. Het volstaat de exactheid van $T(-)$ toe te passen op de twee exacte rijën in R-mod :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\, f \longrightarrow M \longrightarrow \mathrm{Im}\, f \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}\, f \longrightarrow N \longrightarrow \mathrm{Coker}\, f \longrightarrow 0$$

2. Het volstaat natuurlijk het isomorfisme te bewijzen voor de preschoven :

$$\begin{aligned} Q_I(R) \otimes_R M &= Q_I(R) \otimes_R \varinjlim_i (M_i) \\ &= \varinjlim_i (Q_I(R) \otimes_R M_i) \end{aligned}$$

klaar!

<u>gevolg</u> (EGA, Corollaire 1.3.9)

R heeft T-staken , dan :

1. $f : M \longrightarrow N$ dan : $S(\mathrm{Ker}\ f) = \mathrm{Ker}\ S(f)$, $S(\mathrm{Im}\ f) = \mathrm{Im}\ S(f)$
   $S(\mathrm{Coker}\ f) = \mathrm{Coker}\ S(f)$
2. Als M de induktieve limiet is van de familie M_i dan is $S(M)$ de induktieve limiet van de familie $S(M_i)$

(3.10) (EGA, I.1.3.10)

Als N een deelmoduul is van M dan geeft de injektie $j : N \longrightarrow M$ een monomorfisme $T(N) \longrightarrow T(M)$ die toelaat $T(N)$ op kanonieke wijze te identificeren met een deelmoduul van $T(M)$. Stel N en P twee deelmodulen van M :

$$T(N + P) = T(N) + T(P)$$
$$T(N \cap P) = T(N) \cap T(P)$$

Vermits $N + P$ het beeld is van het kanonieke morfisme $N \oplus P \longrightarrow M$ en $N \cap P$ de kern van $M \longrightarrow M/N \oplus M/P$.
Het is wederom duidelijk dat als R T-staken heeft het voorgaande nog opgaat met $S(-)$ ipv. $T(-)$.

(3.11) <u>stelling</u>

Voor iedere F_X in $QC(\underline{\mathrm{Spec}}(R))$: $T(H^1(X,F_X)) = 0$

<u>bewijs</u>

Zij $0 \to F_X \to G_X \to H_X \to 0$ een exacte rij in $QC(\underline{\mathrm{Spec}}(R))$ dan levert globale sekties nemen volgende exacte rij:

$$0 \longrightarrow s(F_X,X) \longrightarrow s(G_X,X) \longrightarrow s(H_X,X) \longrightarrow H^1(X,F_X) \longrightarrow \cdots$$

Wegens de exactheid van $T(-)$ en $T \circ s(-,X) = 1_{QC(\underline{\mathrm{Spec}}(R))}$

$$0 \longrightarrow F_X \longrightarrow G_X \longrightarrow H_X \longrightarrow T(H^1(X,F_X)) \longrightarrow \cdots$$

waaruit het gestelde volgt.

gevolg (EGA, Prop. 1.4.6 en Coroll. 1.3.11)

R heeft T-staken, dan geldt :
1. Voor iedere F_X in $QC(\underline{Spec}(R))$: $H^1(X,F_X) = 0$
2. $s(-,X) : QC(\underline{Spec}(R)) \longrightarrow R\text{-mod}$ is exact

bewijs

Het volstaat 1. te bewijzen. In dit geval hebben we :
$S(H^1(X,F_X)) = T(H^1(X,F_X)) = 0$ en pas nu (I.7.3) toe.

(3.12) stelling (Corollaire 1.4.7)

Zij $0 \to F_X \to G_X \to H_X \to 0$ een exacte rij in $\underline{Spec}(R)$-mod
indien er twee quasi-coherent zijn dan is de derde dat ook.

bewijs

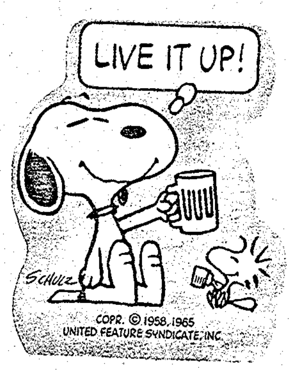
Het enige niet gans triviale stuk van het bewijs is aantonen dat G_X quasi-coherent is als F_X en H_X het zijn :
Globale sekties nemen levert de exacte rij :

$$0 \longrightarrow F_X(X) \longrightarrow G_X(X) \longrightarrow H_X(X) \longrightarrow H^1(X,F_X) \longrightarrow \cdots$$

Hierop T loslaten geeft volgende situatie

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & T(F_X(X)) \arrow[r] \arrow[d] & T(G_X(X)) \arrow[r] \arrow[d] & T(H_X(X)) \arrow[r] \arrow[d] & T(H^1(X,F_X))=0 \\ 0 \arrow[r] & F_X \arrow[r] & G_X \arrow[r] & H_X \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

De buitenste verticalen zijn isomorfismen, dus ook de middelste (slangenlemma) en dan zijn we klaar wegens (2.3)



(to be continued)

bij wijze van niet-alfabetische bibliografie

Grothendieck-Dieudonné : Eléments de Géometrie Algébrique, Publ.Math.Inst.Nantes,Etudes Sci.,1960

Golan : Localization of Noncommutative Rings , Marcel Dekker Inc.,New York 1975

Grothendieck : Sur Quelques points d'Algébre Homologique, Tohoku Math. J. ,1958,119-221

Goldman : Rings and Modules of Quotients,J. of Algebra 13 1969,10-47

Bourbaki : Algébre commutative,Eléments de Math. 27,28,30, 31,Hermann Paris,1961-1965

Godement : Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux , Hermann Paris,1958

Procesi :Rings with Polynomial Identities,Marcel Dekker Inc. New York 1973

Fulton : Algebraic Curves, an introduction to Algebraic Geometry, Benjamin Inc.,New York 1969

Gabriel : Des Catégories Abéliennes, Bull.Soc.Math.France, 90,1962,323-448

Herstein : Noncommutative Rings, Carus Math. Monographs , M.A.A.,15,1968

Lambek - Michler : The Torsion Theory at a Prime Ideal of a Right Noetherian Ring,J.Algebra 25,1973,364-389

Mumford : Introduction to Algebraic Geometry , Preliminary version of first 3 chapters

Rowen : Some Results on the Center of a P.I. Ring,Bull.Am. Math.Soc. 79 , 1973 , 219-223

Nauwelaerts : Zariski Extensions of Rings , thesis , U.I.A 1979

Van Oystaeyen : Prime Spectra in Non Commutative Algebra , LNM 444,Springer Verlag,Berlin,1975

Van Oystaeyen : Birational Ring Homomorphisms and Extensions Marcel Dekker,1978

Van Oystaeyen : Zariski Central Rings , Communications in Algebra , 6, 1978, 799-821

Van Oystaeyen - Verschoren : Reflectors and Lokalization, Appl. to Sheaf theory : Marcel Dekker,New York 1978

Van Oystaeyen : Graded Rings and Modules of Quotients ; Comm. in Algebra , 1979

Van Oystaeyen - Nastacescu : Graded and Filtered Rings and Modules , LNM 758 , Springer Verlag,Berlin,1980

Verschoren : Les extensions et les Schémas Non - Commutatifs , preprints UIA

Verschoren : Localization and the Gabriel-Popescu Embedding, Comm. In Algebra 6 , 1978 , 1563-1587

Verschoren : Some Ideas in Non-Commutative Algebrai Geometry thesis U.I.A. , 1978

en vele,vele anderen...

Verder ben ik nog onnoemelijk veel dank verschuldigd aan : The Beatles,Bob Dylan,The Police,Creedence Clearwater Revival,Crosby Stills Nash and Young,Joan Armatrading,Super-Tramp,Fisher Z,RvhG,Patty Smith,Ravel,Tom Robbinson Band, en al die anderen wiens muziek het uitschrijven van deze thesis aanzienlijk vergemakkelijkte.

(deze thesis kwam tot stand ZONDER de medewerking van de algemene spaar en lijfrentekas)